
ÆRARIVM
PHILOSOPHIÆ
MATHEMATICÆ
IHS
F. Curtus Bonon Incid.

ÆRARIVM PHILOSOPHIÆ MATHEMATICÆ.

IN QVO

ELEMENTA

Philosophiæ Geometricæ de Planis, Curuis, & Solidis figuris

APPLICATA, ET ORNATA-

-Vsibus eximijs in omni Scientiarum, & Artium genere, nouis Praxibus, Paradoxis, locis Aristotelicis, & aliorum Philosophorum, & Scriptorum, Corollarijs, Scholijs, Eruditionibus, Moralitatibus, Demonstrationibus nouis, facillimis, & vniuersalissimis confirmata,

METHODO

Iucundiore, ac breuiore in TRES TOMOS distributa sunt.

INTERCESSERE

Ingeniosæ inuentionis EXODIA HORARIA.

TOMVS PRIMVS

Cum SEXDECIM INDICIBVS.

AVTHORE

MARIO BETTINO BONONIENSI E SOC. IESV, olim in Parmensi Academia Philosophiarum Mathematicæ, ac Moralis publico Lectore.

BONONIÆ, Typis Io. Baptistæ Ferronij cum facultate Superiorum, Anno M.DC.XLVIII.

a 2

Aerarij Mathematicæ Philosophię tomum primum ab Eruditissimo Adm. R.P. Mario Bettino Societ. Iesu fulgentissimis elucubrationibus editum summo gaudio vidi, & attente lectitaui; In quo tantum abest, vt contra fidem, aut bonos mores qnid inueniatur, vt potius thesauris auro, & argento pretiosioribus refertissimum inueni, quot Scholia, & Paragraphos, tot gemmas agnosco, quibus facile ditari, & exornari possunt huius Scientiæ amatores, & pro huius comparatione merito quisq; omnia vendere potest, vt emat illud. faustè igitur in publicum bonum prodeat æternumq; viuat. In quorum. &c.

Ego D. Octauianus Finatius Cler. Reg. S. Pauli Sac. Bonon. Pœnit. Rect. pro Eminentiss. & Reuereudiss. D. D. Cardinali Ludouisio Archiepisc. Bonon. Librorum Censor.

Imprimatur. Fr. Io. Vincentius Paulinus de Garexio Sac. Theol. Mag. Sanctiss. Inquisitionis Bononiæ Vicarius Generalis.

Ego Franciscus Manfredinus in Prouincia Veneta Præpositus Prouincialis potestate ad id mihi facta ab Adm. R. P. Nostro Generali Mutio Vitellesco, facultatem concedo, vt opus, quod inscribitur: *Aerarij Philosophiæ Mathematicæ. &c. Tomus Primus*, à Patre Mario Bettino Bononiensi è Societate nostra conscriptum, & trium Doctorum virorum nostræ Societatis iudicio approbatum, Typis mandetur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Bononiæ die 17 Aprilis 1641.

Franciscus Manfredinus.

Locus † Sigilli.

INDICATA ALIQVA-

-Præcipua è plurimis, quę in tribus Tomis huius Ærarij Philoſophiæ Mathematicæ proponuntur, exercentur, ac demonſtrantur.

I.

ADmiranda,& non vulgata proprietas rectæ lineæ ſub angulo recto, quæ medio ſui puncto circularem, extremis rectas lineas, reliquis intermedijs numero infinitis punctis numero infinitas ellipſes vno, eodemq; motu deſcribit Pluriformium, ac mixtarum linearum facillimæ deſcriptiones.

Recta linea peripheriæ circuli ęqualis,etiam ſine ſpiralibus Archimedis, &c.

II.

Multiplices, ac noui modi rectarum linearum proportionalium, præſertim duarum mediarum inueniendarum. Variæ, nec paſſim vulgatæ, ac nouæ etiam aliquæ ſectionum Conicarum deſcriptiones. De linearum, planarum, & ſolidarum figurarum diuiſionibus, augmentationibus, imminutionibus, transformationibus, proportionibus multiplicia, vniuerſalia, noua, & facillima problemata demonſtrata.

III.

Dati anguli rectilinei in quotlibet æquales, & in cuiuſlibet proportionis partes non ſolum demonſtratiuè organica, ſed & præcisè geometrica diuiſio. Inſcriptiones cuiuslibet regularis figuræ in circulo, & circuli circumſcriptiones facillimæ, ac demonſtratæ.

Curuilineorum inter ſe, atque in rectilinea variæ transformationes, ac dimenſiones. Varia, & vniuerſalia de quadrationibus ſuperficierum, circularis, cylindricæ, conicæ, ſphęricę, ac reliquarum omnium circa ſolida omnia rotunda.

Vſus

IV.

Vſus nouus Geometricus centri grauitatis indicatus, & exemplis expoſitus in planarum, & ſolidarum figurarum quantitatibus, dimenſionibus, proportionibus &c. facillimè demonſtratis.

Modus vniuerſaliſſimus demonſtrandi de toto genere quātitatis diſcretę, continuę, planę, ſolidę ea, quę apud Euclidem demonſtrantur de indiuiduis.

Campi Planimetrici, Stereometrici, Conici, &c. aperti ad propoſitiones, & libros omnes Elementares.

V.

Epinomis, in qua ſunt Gnomonica, & Machinariā horaria nouæ, atq; inopinatę inuentionis, Sandalium, Cithara, Microcoſmus, Arcus, Tympanum.

Breuiarium Stereometrię etiam vltraelementaris ſpeculatiuę, & practicę, & Epilogus planimetricus cum demonſtrationibus facillimis ex ortu ipſarum figurarum planarum, & ſolidarum.

VI.

Vſus alij quamplurimi elementarium propoſitionū Aſtronomici, Gnomonici, Muſici, Optici, Machinarij, Arithmetici, practicè Geometrici, Corographici, Militares, Iaculatorij, Architectonici, Pictorij, Plaſtici, Sectorij, Aquarum, & planorum libratorij, Agrarij, Hortenſes. &c. expoſiti.

Quarum, & quamplurimarum aliarum rerum vſu, iucunditate, ac nouitate præſtantium indices peculiares proponuntur in 1, & 3 Tomo.

IN DOCTRINIS GLORIFICATE DOMINVM.

Iſai. 24.



ILLVSTRISSIMO
ac Reuerendissimo D.
CAROLO EMMANVELI MADRVZZIO
Tridentinorum Episc. & Principi;
Chiallanti, Auij, &c. Comiti; Nouocomi S. Abundij Abbati. &c.

Perpetuam felicitatem.

EX quo nobilissima Tridentina Ciuitas tuæ Celsitudinis Principatu felix, Oecumenici Concilij sacro cætu iampridem consecrata est, augustissimi quasi Templi quoddam instar apud me semper obtinuit. Cuius in adytis te, Illustrissime, ac Reuerendissime animorum Episcope, ac populorum Princeps, velut augustissimum Templi Hierosolymani Propitiatorium, qui te de proximo norunt, admirantur, ac venerantur.

Sacri Propitiatorij instar in Episcopo, & Principe nostro.

Quod quidem Propitiatorium conflatum erat ex aurea tabula, & aureis geminis Cheru-

b binis,

binis fusili, ac productili opere inter se omnibus continuatis.

Tu medius inter Deum, & homines, dignitate supra homines, & proximus Deo

Virg.

– Rex idem hominum, diuumq; Sacerdos

viuum te præstas tuis populis exorati Numinis Propitiatorium. Ac gemini ad opposita latera Cherubini, qui obuersis in Propitiatorium alis mutuo se contuebantur, vtramq; in te prænotant dignitatem Episcopatùs, & Principatùs, quarum apud te vsus in id vnum conspirat, vt tibi commissis, ac submissis propitia omnia nūquam non obueniant. Tibi ergo, qui Ecclesiasticà in animos, politicà verò Principatùs dignitate in corpora, & fortunas tuorum populorum mitissima exerces imperia, pro vtraq; potestate hic ego nunc literarium hoc munus offero earum scientiarum, quæ Ecclesiastico, & politico Principi aptissimè congruunt, & mirificè prosunt.

Gemini Cherubini alis ad Propitiatorium obuersis quid sint in nostro Principe.

Mathematicæ Philosophiæ geometrica hęc elementa Ægyptiorum olim Sacerdotum solertię accepta referuntur, dum, post annuas Nili exundationes, quæ agrorum limites oblitерabant, siccatis mox aquis, camporum latè patentium spatia ijs populis iustà, & scientificà gometricarum figurarum lineatione diuiderent.

Geometricæ Philosophiæ elementa quā apta, & vtilia Ecclesiastico, & Politico Princip.

rent.

rent. Ac noſtri etiam hoc æui eadem geometrica hęc elementa Chriſtianę religionis primis elementis primos aditus in orientalia, & occidentalia ethnica regna reſerarunt. Iure igitur, ac merito à Sacerdotibus orta, & animis verâ religione imbuendis ancillantia, tibi Sacerdotum Antiſtiti, & animorum Paſtori ſcientifica hæc debentur elementa. Quæ prætereà etiam, dum geometricæ abſtractionis alis animum à rebus ſub ſenſum cadentibus auocaut, facillimos tibi gradus adſtruent ad rerum diuinarum contemplationem, quæ vnicæ tibi, ac veræ ſunt delitiæ.

Geometrica elementa Chriſtianæ religioni famulãtur.

Geometricæ abſtractionis vtilitas.

Politicæ verò tuæ adminiſtrationi quantum hinc opis hauries tum pace, tum bello vel in geometrica præmiorum, ac pænarum diſtributione, vel in ciuibus tutandis apta bellicorum propugnaculorum figuratione? Quin etiam dum Geometrica Philoſophia lineis per horaria diſpoſitis quaſi videtur ludere, ac exiguâ ſtyli vmbrâ diurnæ ſolis circulationi quodammodo illudere, tum verò maxime ſerium, ac publicum Eccleſiaſticæ, ac politicæ rei peragit negotium. Lineis enim horarijs certa temporum interualla diſcriminantur, & diuinis in Templo laudibus, ac Sacrificijs, priuatis verò, ac publicis in Ciuitate negotijs certi recurrunt

Præmia, & pęnę ĩ pace, munimenta in bello e Geometrica Philoſophia.

Lineis ſacra, & prophana humanæ vitę negotia dirigantur.

ordines. Quibus ex hominum cætu ſublatis, quid humanæ vitæ ſocietas, ac vrbes niſi confuſa quædam ferarum luſtra videantur? Quapropter antiquorum Philoſophorum antiſtes Plato à perfectæ Reipublicæ forma nō eſt paſſus abeſſe Geometricæ Philoſophię ſcientiam, & Diocletianus Imperator publico Edicto ſanciuit publicè in Ciuitatibus edocendam. Huius igitur regiæ Philoſophiæ geometricis figuris tuę Celſitudinis tiaram, & coronam, epiſcopale pedum, & principale ſceptrum pàtere quodam quaſi erudito décore, ac ornamento vermiculari.

Sceptra, & coronæ figuris geometricis ornata.

Iam verò Hieroſolymani Propitiatorij aureus fulgor nobiliſſimæ tuæ familiæ antiquiſſimum ſplendorē, & illuſtriſſima refert dècora, quibus maximi totius Europę Principes, ac Reges, atq; adeo totius Chriſtiani orbis termaximi cōplures Pōtifices inter ſe quaſi certaſſe viſi ſunt, vt Madruzzios heroas laureis militaribus, equeſtribus dignitatibus, coronis, tiaris, purpuris, Dynaſtijs, Thorpachijs, & regij etiam ſanguinis affinitatibus cumularent. Quarum rerum, ac perſonarum præcipuæ aliquæ, ſeorſim ab hac Epiſtola memorādæ, hinc tamen etiam non excluduntur, dum in te vno complexum quemdam earum omnium virtutum intuemur,

Sacri Propitiatorij aurum quid ſit in noſtro Principe.

Madruzziæ familiæ nobiliſſima decora indigitata

Auitarū virtutum in noſtro Principe cōpēdiū.

mur,

mur, quas in tuorum proauorum singulis distributas anteriora sæcula mirabantur.

Sed aureos iterum Propitiatorij obumbratores Cherubinos obtueor. In quibus sacræ non vulgaris doctrinæ viri quadruplicem animanium formam ita sunt interpretati, vt esset Cherub humani vnica quædam forma corporis iuuenili facie, Aquilinis alis, bifidis, & quasi bouinis pedibus, aurea cæsarie per colla, humeros, & pectus profusa leoninum in morem iubati. Quatuor ea tuarum virtutum aptissima symbola sunt.

Cherubinorũ Propitiatorij quatuor hieroglyphica in nostro Principe.

Nam tu diuinæ, humanæq; sapientæ quasi geminis alis supra homines in Deum attolleris. Ac diuinam quidem sapientiam copiosè vt haurias princeps in te Principe cura, & negotium est in diuinarum legum pronunciatis diu, noctuq; meditari. Quas tu leges, non vt olim antiqui sua volumina bifidis inserta paxillis, sed cum Vate regio medio geris in corde. Tu diuinis admotus àlloquijs, dum inaccessi Numinis latè radianti vultui obuersaris, verè animo specularis, hoc est quoddam quasi speculum efficeris, in quo diuinæ sapientiæ, ac bonitatis, formosissimum exemplar eniteat. Ac dum animi tui vires omnes quasi lyræ chordas in Deum intendis, Deo verè concordas, hoc

Aquilinæ Cherubinorũ alæ diuina, & humana in nostro Principe sapientia.

Quæ pariant, & alant in nostro Principe diuinarũ rerũ Sapientiam.

est

est diuino cordi cor tuum componis, atque attemperas, vt cum Dauide à Deo & ipse andias: inueni virum secundum cor meum. Secundum cor Dei cor Principis congruat oportet, vt recta, & publica sit amussis, & regula priuatis populorum actionibus, quasi lineis, ad virtutem dirigendis.

Quæ humanā, & politicam in eodem Principe prudentiā perficiāt.

Secundùm diuinam humanæ præterea prudentiæ, quasi secundæ legalis tabulæ, ac alæ, cura tibi secunda est. Quam in te fouent, ac alunt & mortuorum monumenta, & viuorum præsentia, hoc est doctorum & librorum, & virorum consuetudo. Nimirum legisti apud tragicum: Sapientes euadunt Reges conuersatione Sapientum. Hi abs te aduocati, ac munerati frequentes, & lubentes te, tuo sine ambitu, ambiunt; hi tuæ assident mensæ. Horum tu, quasi mineruallium serpentum implexione, Principatùs tui sceptrum exornas, ac munis longè præstantius Mercurij Caducæo. Regiæ tuę virgæ hi apponunt & oculum prouidentię, & alas solertiæ in rebus agendis. Si quando hi absunt, tum tu Musęi tui delitias arripis, hoc est de regia prudentia libros, quos liberos à dolosis aulicorum assidentium assentationibus experiris. Hos interdum tu versaris, illi te niditissimo regię Sapientię splendore vndiq; ornant, & quasi conuestiunt,

Eurip.

Doctorum virorum amor, & consuetudo in nostro Principe.

Quòd in caducæo serpentes, in virga oculus.

Libri liberi sunt ab assentatione.

ac

ac byssinam in te Sacerdotalem tunicam, iuxta hebræi Pontificis ritum, stringunt, hoc est, ex hebræa interpretatione, ocellant, scilicet crebris ciuilis prouidentiæ luminibus; vt merito Sacerdotes, quos inter tu Princeps, Deus ipse appellarit oculorum suorum pupillas, quibus nempe Reipublicæ corpus innoffenso pede ad veram felicitatem dirigatur.

Quænam hebræi sacerdotis tunica ocellata.

Cur Sacerdotes Dei pupilla.

Ac vt olim à Propitiatorij parte Cherubicis alis obumbratà diuina edebantur oracula, ita & abs te, diuinæ, humanæque prudentiæ quasi pennis alato, & (iuxta Cherubicum nomen, quod scientiæ copiam interpretantur) abundè instructo prudentissima tuis populis æqui, iurisq; responsa pronuntiantur.

Humanæ vero Cherubinorum facies humanitatis, mititatis, comitatis in te suauissimas præferunt facies. Quæ tamen leniores virtutes tui Principatus fastigium non frangunt, sed inflectunt. Quam concinna, quasi ex graui, & acuto, verborum tuorum, grauitate, ac humanitate temperatorum, harmonia? quæ non tam aures, vt Hercules ille Gallus, quám corda tuorum populorum in tui venerationem, & amorem abripiat. Tuæ mansuetudinis merito tuæ Vrbis delitię tu es verius, quàm Titus olim audiuit: Orbis delitiæ. Talem te tuis cum po-

Cherubinorũ humana facies quas indicet virtutes in nostro Principe.

Eius Humanitas.

Mansuetudo.

pu-

pulis verbo, & facto geris, vt appareat Principem te sedere in throno spiritus eius mitissimi, (verba Tertulliani de Patientia) qui non turbine glomeratur, non nubilo liuet, sed est teneræ serenitatis, apertus, & simplex, quem tertiò vidit Elias. Tenera vero tuæ frontis serenitas solo compassionis nubilo subliuet, si quando (ac quando non?) miseris, & ægris vel animi, vel corporis ipse dolore fis concolor. Alieni corporis tui cordis vulnera sunt, & magis quàm illi patiuntur, ipse compateris. Sua priuatum quemq; te Patriæ publicum Patrem omnium mala premunt. Si quando iustas de sontibus pænas exigete cògeris; dare magis, quàm exigere videris. Vindicatrici iustitiæ, ne temerè, aut immodicè sæuiat, Clementiæ oculum apponis, & pro publico bono viuida in te zeli fax semper in Misericordiæ quodam quasi oleo blandior elucet. Nec oleum, & operam perdis, dum perditos aliquando aliquos ad animi, & morum sanitatem reuocant clementiora potius, quàm seueriora remedia.

Compatientia.

Clementia.

Misericordia.

Nec vero te, magnamine Princeps, Leonina Cherubinorum cæsaries destituit, qui munificentiæ aureo es iùbare iubatus. Magnanimi viri nullum specimen præclarius est, quàm in contemptu, & munifica diuitiarum

Leonina cherubinorū iuba quid in nostro Principe.

ero-

erogatione. Quæ in hiſce temporum iniquitatibus in te præſtantior enitet, dum noſtra hęc Martis verè ferrea ſæcula tuo licet Aerario infeſtiſſima, tuæ tamen munificentiæ omnes arculas non ita funditus exhauriunt, vt non inde crebra, & diues auri vena profluat eluendis, & eleuandis alienæ indigentiæ calamitatibus. Ac tuæ Gratiæ, non ſemper exauditarum precum exoratæ ſunt filiæ, ſed plerumq; quos pudor, aut ægritudines arcent, eorum tu pedes tuæ liberalitatis præuenis manibus, & multorum lacrymas abſterſiſti, quorũ oculos numquam vidiſti.

Munificentia; --

Sed nulla & honeſtius collocata, & magis publica, & diuturniora, & viro Principe digniora ſunt beneficia, quàm quę apud eos collocantur, qui virtutem ornant latè micantibus eloquentis doctrinæ ſplendoribus. Quorum nocturnæ lucubrationes diem pariunt æternitatis, quorum priuata ſilentia publico bono eloquuntur, quorum horę vel pauculæ poſterorum ſæcula erudiunt. Horum tu doctis lucernis munificentiæ oleum largè infundis, ac Muſis, vt melius concinant, tuarum Gratiarum chorum addis. Tuis vero Gratijs, ne ſerpant, ac vt etiam ad poſteros volitent, ſcriptoriæ pennæ doctorum virorum perennis famæ

-- præſertim in Viros Doctos --

alas apponunt. Ac merito argenteas, & canoras tuæ famæ tubas tuum procudit Aerarium. Sine quo & meum hoc Mathematicum exiguum esset Aerarium; cuius præcipua moles geometrica stetit aureis tuę munificentiæ nixa fundamentis.

-- Speciatim in Aerariũ Philosophiæ Mathematicæ.

Bouinæ tandem Cherubinorum plantæ hieroglyphica tuæ gerunt tolerantiæ sub iugo diuinæ in aduersis prouidentiæ. Cuius tu virgam multiplici virtutum flore (vt olim Aronica) in te vernantem venerabundus exoscula∣ris, & in eius floribus mellitissimum manna libas diuinæ clementer nos cædentis indulgentiæ. Te de pacatæ mentis tranquilla statione nec domesticæ tuorum clades, nec exteri alienæ maleficentiæ turbines exturbarunt. Habes in recondito animi tui sinu pacatissimũ æquanimitatis portum gemino Innocentiæ, atq; Constantiæ adamantino scopulo munitum, quorum obiectu

Bouinæ Cherubinorũ plãta quid signent.

In aduersis tolerãtia nostri Principis admiranda.

Portus Aequanimitatis.

— omnis ab alto
frangitur, inq; sinus scindit sese vnda
reductos,

Virg. 1. Aen.

si quando fortunæ in te sæuientis irruerint tempestates. Hæreditaria nobilissimæ tuæ familiæ fortitudo, qua præcipui proauorum tuorum in bello floruerunt, tibi domi, atq; in pa-

ce glo-

ce gloriosiore triumpho refloruit. Vnus tu togatus, & infulatus pluribus armatis, & laureatis anteponendus, qui longè præclarius de impatientia, quàm illi de hostibus, triumphasti. Vt enim difficilius est mala perferre, quàm inferre, sic & honestius, & gloriosius. Habet & pax suas palmas, quæ ponderibus non depressæ bellica lauru altius comascunt.

Fortior vir patiens expugnatore urbium.

Ratio è Morali Philosophia.

Eum te in aduersis tua tolerantia præstitit, quem Aristoteles in moralibus appellat virum τετραγώνικον. Tui te in omni fortunæ te versantis. & vexantis inconstantià semper eàdem, & æquali vndiq; animi figurà perstantem obstupuerunt. Tu deniq; fortunæ inconstantis & circulum quadrasti, & sphæram cubasti, vt firmam in te basim perfectæ virtutis forma possideat. Tua in aduersis fortiter tolerandis constantia ipsam animi tui moralem figuram sacri Propitiatorij figuræ non modo adsimilem arguit, sed & illa præstantiorem. Nam Propitiatorij rectangula oblongior à quadrata configuratione deficiebat, quam tu virtutis merito plane imples. Geometrica etiam hæc mea figurarum acies, quæ vniuersa deniq; in extremo libri primi problemate perfectam Quadrati figuram induit, quidni tetragonicæ virtutis Principi debeatur? Submissè igitur

Vir moraliter quadratus.

Moralis qadratura circuli apud nostrum Principẽ.

In nostri Principis animo figura perfectior, quã olim in Propitiatorio.

Tomus hic 1 suas figuras absoluit quadrato.

oro, & enixè obſecro Celſitudinis tuæ magnanimã benignitatem, dignare, Princeps humaniſſime, intra tuæ protectionis tutiſſima munimenta excipere primum hoc, ac etiam ſecundum geometricæ militiæ quadratum agmen tuæ munificentiæ ſtipendijs potiori ex parte coactum, ac tuæ virtutis obſequijs vltra mortem apud poſteros militaturum. Aeuiternum vale. Bononiæ die 7 Martij, ann. Chriſti 1643.

— & quadrata virtutis Principi D.D.

Celſitudinis tuæ

Humillimus, & obſequentiſſimus
in Chriſto ſeruus

Marius Bettinus.

AMICO LECTORI

Iohannes Antonius Roffenus in almo Bononiæ Collegio Philoſophiæ, & Medicinæ Doctor, Mathematicarum ſcientiarum Studioſiſſimus, & Cultor.

Aerarij Mathematici allegoria.

AErarium hìc tibi, Amice, ac Mathematicarum Scientiarum Studioſe lector, reſeratur, vbi ſcientificæ monetæ ingens copia cuditur. In vniuerſà Philoſophià Mathematicà nullius pretij æſtimatur, nec in cẽſum ſcientificę certitudinis admittitur, niſi quod geometricarum demonſtrationum figuris fuerit obſignatum. Tandem hìc habes aliquando id, quod per omnia retro ſæcula vſque ad hæc noſtra tẽpora publicis fuit in votis, nempè condimenta, & vſus Geometricorum elementorum, quæ Tyronibus Mathematicis nullius ſaporis, aut fructùs videbantur. Hoc opus non vnius, aut alterius Tomi, ſed penè numeroſæ Bibliothecæ futurum eſt, ſi vita ſuperſit Authori hoc in Ærario aſſiduè laboranti, vel poſt ipſum alij exponere voluerint, quæ ille indicat in initijs, & finibus librorum 2, 3, 4, 5, & in campis inter propoſitiones apertis, & in Breuiarijs ſolidorum, planorũ, & modorũ demõſtratoriorũ vniuerſaliſſimorum, &c. Animus eſt elemẽta Geometrica vniuerſa in cõmodiorem, & breuiorẽ methodum contracta præclaris vſibus applicare, atq; ita explicare, ac eleuare, vt Tyrones ea hìc habeant, quæ viã ſternant intelligentiæ Antiſtitum ſcriptorum etiam reconditioris Geomerricæ Philoſophiæ Archimedis, Apollonij, Pappi, atq; aliorũ. Velut non pauca in exemplis habes, vbi de ſectionibus conicis, de aſymptotis, de ſolidorum pluriformium ſuperficiebus, ſoliditatibus, dimenſionibus, proportionibus, &c. Ingentium planè promiſſorum,

Vastiſſimus cãpus occupandus ab Aerarij mathematici ſtructura.

& pu-

& publicæ ſpei expectatione quaſi obæratum in hoc Ærario dixeris noſtrum hunc ſcriptorem, cui vix aliquid ſupereſſe videatur, quod in Geometrica elementa impendat poſt ingentes illas opes, quas Clauij fertile ingenium Euclidi ditando iampridem effudit. Sed nimirum Mathematicæ Syluę feracitas ea eſt, vt dum carpitur, etiam cum fœnore multo repullulet, & ab ipſo —

Horat.

— Ducat opes, animumque ferro.

Ab alijs etiam pluribus ramo

Virg 6. Aeneid.

— Vno auulſo, non deficit alter
Aureus, & ſimili frondeſcit virga metallo.

Structura Aerarij prorſus alia à commentationibus aliorum in elemẽta geometrica.

Ab alijs, inquam, vel non detectus, vel planè, ac plenè nõ patefactus (neſcio an tentatus) eſt hic theſaurus Applicationum Geometricarum, & aurificium hoc obſignatoriæ artis, qua ſcientiarum, & artium omniũ, quaſi rude argentum, aureis Geometricæ Philoſophiæ formis impreſſum ſcientificæ certitudinis valorem, & pondus indipiſcitur.

Præiuit Author alijs plura addituris.

Inexhauſtas ſcientifici aurifodinas in ſingulis Geometricis elementarijs propoſitionibus eruditi, & acris ingenij, quaſi lyncei oculi, acies proſpectabit, & multo plura poſt hæc, vt ſperamus, & optamus, extundet. Interim quę hìc in exemplum, & quaſi pro indigitationibus habento ij, quibus plus otij, valetudinis, & ingenij eſt, vt Geometricarum propoſitionum abditam opulentiam in literarię, ac politicæ rei publicum bonum, & decus exponant.

Cur Chinenſis Philoſophus in veſtibulo huius Aerarij.

Hoc ipſum innuit in huiuſce Geometrici Ærarij veſtibulo Chinẽſis Philoſophus, qui iuueni Mathematicas opes ādpetenti partim de proximo monetas aliquas iam ſignatas, & paratas aperit, partim plures in penitioribus adytis apparandas, & efformandas indigitat. Iurè, ac merito Chinenſis primos hìc aditus occupat: in eius enim ingenioſiſſimæ, atque in primis Mathematicarum Scientiarum ſtudioſiſſimæ nationis gratiam extructum eſt hoc Ærariũ, vt qui Euclidianis Elementis (à Sacræ memoriæ Admod. Reu. P. Matthæo Riccio Maceratenſi Soc. Ieſu iampridem Chinenſis linguæ cultu donatis) perfruuntur, habeant etiã

Chinẽſibus, præ alijs, extructum hoc Aerariũ --

Mariani

Mariani huius Ærarij opes pro copia plurium aliorum nostratium voluminum Mathematicorum, quibus orientalia ea regna destituūtur. Et qui Stereometrica nostratia non dum viderunt (quæ tamen apud Euclidem prolixè, ac difficilè demonstrantur) habeant hìc in Breuiario (in fine 3 Tomi huius Ærarij) facillimè ad theoricen, & praxim demonstrata.

-- & stereometricum. Breuiarium in fine 3 To.

At ecce ab Ærarij vestibulo satyrica me vox auuocat:

O curas hominum! o quantum est in rebus inane!
Quis leget hæ? vel duo, vel nemo.

Persius Sat. 1.

Ab eàdem satyra repono, ac respondeo: *Min' istud ais? quis leget hæc?* Immò verò quæ natio non hæc leget? Nam scientiæ Mathematicæ omnium nationum sunt, nec vnius Vrbis, sed totius Orbis. Catholici, Sectarij, Ethnici, & cuiuscumque religionis, vel superstitionis homines, quibus alia alijs literarum studia vel amica, vel inuisa sunt, hoc vno conueniunt, quòd Mathematicas scientias non excludunt, sed admirantur, & amplectuntur. Mahumetanæ leges, quæ subiectis sibi populis aliarum scientiarum cognitionem interdicunt, Mathematicarum tamen (& medicinę) studia permittunt. Occidentalium, & Orientalium regionum, atq; adeo totius noui Orbis incolæ, cętera rudes, vnicè Mathematicis erudiuntur, quas etiam auidissimè audiunt, & hauriunt à Soc. Iesu Religiosis Doctoribus, qui Christianę Religionis propagandę gratia remotissimas, & vastissimas eas regiones peruaserunt. Hoccine igitur est: *quis leget hæc? vel duo, vel nemo?*

Scientiæ Mathematicæ omnium nationū.

Sed quid ego remota perquiro? in Europæ nostræ cultissima, & amplissima vtriusq; Germaniæ Regna nuper vix inuecta sunt plurima Mathematicorum Apiariorum exēplaria, cùm statim omnia magno pretio distracta sunt, & paucos post menses Germanico idiomate donata, & latino in compendium redacta, publicis typis recusa sunt, & iam Bononiæ quarta editio cum Analectis vulgata est, vt publicis vndique votis, & postulationibus, quà licet, fieret satis. Nec sæuus ille Mars Mineruæ hostis, qui iam tot

Apiaria Philosophiæ Mathematicæ quanta beneuolētia sint excepta.

annis vniuersam Europam ferro, flammisq; deuastat, aditum intercludere potuit Mathematicis voluminibus extra omnes bellicorum tormentorum eiaculationes tutò, ac fæliciter euolantibus. Hoccine est: *quis leget hæc? vel duo, vel nemo?* Hoccine: *O curas hominum, ò quantũ est in rebus inane!*

Mathematicæ ĩ Republica sunt vniuersalis vtilitatis.

In nullis humanarum scientiarum, ac artium minus est inane, quam in Mathematicis. Nam cæteræ peculiarẽ aliquam in homine, vel extra hominem vtilitatem pariunt, Mathematicæ verò vniuersim, ac multimodis hominum generi sunt *frugiferentes*. Vide, ò quicumque hìc legis, quæ te in hac nostra sententia abunde confirment, præsertim in huius Ærarij primi Tomi cap. 3 in prolegomenis ante definitiones geometricas. Hoc verò Mathematicum Ærarium in primis est communis, ac multiplicis vtilitatis refertissimum in omni genere Philosophiæ Aristotelicæ, Platonicæ, ac plurium aliorum Philosophorum, quorum insignia loca hìc explicantur; præterea in Architectura ciuili, ac militari, in humanis ad iustitiam commercijs, in re Vestiaria, Vasaria, Machinaria, Vstoria, & Iaculatoria præsertim bellicà, in Pictura, & pluribus alijs in artibus humanam vel vtilitatem, vel ornamentum spectantibus. Quibus adde Astronomica, Sciot[e]rica, Cosmographica, Musica, Optica, & alia multiformia, quorum vsus singulares, applicationes, & explicationes in hoc Ærario visurus es, amice Tyro, ad penè singulas Elementares propositiones. Adeo nihil hìc est publicæ, ac multiformis vtilitatis inane.

Quẽadmodũ & Ærariũ hoc vniuersale omnibus artibus, ac scientijs.

Mathematicæ scientiæ cõsecratæ; quarum occasione, ac ope patet aditus Religioni Christianæ ĩ Ethnica Regna.

Sed præcipui momenti est quod, nostri huius Authoris ope, atq; industrià pietatis plenissimà, Mathematicæ scientiæ id iam assecutæ sunt, vt quasi quædam vehicula substruantur Christianæ religioni facilius in vastissimum Sinarum Imperium inuehendæ. Harum enim Scientiarum occasione Soc. Iesu Religiosi Doctores aditum sibi apud eos populos aperuerunt ad diuinæ legis promulgationem. Quo profecto nullum apud mortales grauius negotium est. Hoccine est in scientijs Mathematicis *ò quantum inane?* An vlla vsquam san-

ctiora

ctiora studia, quàm earum scientiarum, quæ verã in Ethnica Regna sanctimoniam inducunt? O felices huius Authoris hoc fine pientissimo labores! O spes fęlices æternæ fęlicitatis præmio certissimè compensandas! Hoc nimirum est vnum aliquem in cellula latitantem publico bono vtiliorem esse, quàm plures alios πολυπράγμονας.

Sacri labores in mathematicis.

Priuatũ hoc, quod iniquis ęstimatoribus videtur otium, publicum est omnium Populorum, & sæculorum negotium. Nec vlla sunt apud mortales amplissima pręmia, subsidia, solatia, quæ viris publico bono, etiam posteritatis, tacito calamo laborantibus non debeantur. De præsentibus auferendi sunt quicumq; neminem nisi præsentibus, & suis ipsorum rebus vtilem magni faciunt, ac fouent. Quapropter noster hìc Author cum Morales, & sacras aliquas commentationes typis edendas in promptu haberet, illis interim pro tempore præhabendam censuit Mathematici huius Ærarij structuram, ac molem pietati, ac religioni apud omnes, etiam Posterorum nationes consecratam. Eat nunc antimathematicus liuor, exclamet: in studijs, & sciẽtijs Mathematicis: *o quantum inane!* Nimirũ in alienis ignorantia cæca est, inuidiæ verò, dum obliquo tuetur oculo aliena bona, sub minori angulo minora, quàm verè sint, apparent.

Quanti faciendi labores ĩ publicũ; & posteritatis bonum.

Notent, qui præsentia tantum vident.

Ratio optica cur inuidiæ oculus attenuet aliena.

Euclides ipse (ò Diuinæ Prouidentiæ miraculum!) licet Ethnicus, Christianæ tamen Religionis apud Sinas quodammodo Apostolum se præstitit. Literis enim ex eo Imperio huc trasmissis proditum est Mandarinum non neminem (nomen id Doctoribus eius gentis) qui fidem, atque assensum Christianis mysterijs, ac præceptis pernegabat, cum Apostolici Iesuitę hortatu Geometricis Euclidis elementis intelligendis aures, atq; animum præberet, & admirabundus secum ipse reuolueret ordinem, perspicuitatem, & nusquam fallentem certitudinem Geometricarum demonstrationum, inde prudenter ratiocinatum fieri non posse, vt nostri Doctores assueti generi scientiarum, in quibus nihil, nisi demonstratiua certitudine firmatum admitti-

Geometricorum elemẽtorum occasione Chinẽsis Philosophus Christo nomen dedit.

mittitur, Christianæ Religionis arcanis, vel suam ipsi fidem impenderent, vel alienam exposcerent, nisi essent planè certissima. Quibus & ipse statim pium, ac firmum assensum præbuit, & sacris mox aquis caput submisit illud verè doctum, in quod Geometrica elementa Christianæ veritati, ac fidei obliquum, & inopinatum aditum reserarant. Nimirum Diuina prouidentia ludit in Orbe terrarum, & cùm lubitum illi fuerit, humana ingenia etiam Geometricarum figurarum quasi retibus æternæ captat fælicitati; ne sit locus inani contra Mathematicas disciplinas exclamationi: *ô quantum in illis inane!* Sed de cæteris minoribus vtilitatibus Mathematicarum scientiarum (iterum moneo) vide, amabo Lector, capita in Prolegomenis huius Ærarij. Hìc propriè id genus attigi, quod præcipuè spectauit Author Ærarij, nempe, vt Lectores, non solum doctiores, sed etiam meliores, quà posset, efficeret.

Geometricis moralia cur interspergat Author Ærarij.

Qua gratia nihil moratur eorum murmura, quibus fortasse non probanda videbuntur aliqua vel Moralia, vel sacra, quibus aliquando geometricas hìc suas commentationes inspergit. Ethnicos olim Socraticos Philosophos aiũt in geometricis id verbo, & re vsurpasse: *figura, & gradus.* Pudeat non probari Christiano Lectori gradum hìc aliquando fieri à geometricis figuris ad bonos mores, & veram Religionem. Denique moralia aliquando apponuntur, ne quis dicat: *ô quantum est* in hisce Geometricis theorijs *inane!* Verè omnia literarum, & scientiarum studia sine bonis moribus, & vera in Deum Religione inania sunt.

Exẽplũ gradus religiosi à figura

Quid multis? elementa hæc elucidata non sunt inania, quia sine horum elucidatione reliquæ, etiam extra Mathematicas, humanæ scientiæ labuntur in inania. Fœdas aliquorum ageometricas hallucinationes vide apud Authorem Ærarij ad definitiones 4; & 13 lib. 5. & ad propositiones 16, 31, &c. lib. 3.

Exẽplũ Ageometria circa primũ principiũ

Hìc exemplum indico inanitatis, dum aliqui nec verba ipsa intelligunt primorum Geometricorum principiorum,

quæ

quæ tamen audent negare, vt inanes in physicis opinationes tueantur. Velut dum negant id: *duarum rectarum linearum non esse commune segmentum*. Cuius primi principij veritas etiam apud rudiores patet, dummodo verba ipsa intelligant. Vide Authorem Ærarij ad id. Palmare verò mendacium est, quemquam vnquam, qui verè sit geometricè sciens, affirmasse non satis certum esse id principium. O Preclaros Philosophos, qui primorum principiorum vel verba non intelligunt, vel veritatem peruicaciter negant, vt inania inaniter suffulciant! Hìc vere: *ò quantum est in rebus inane!* non autem in Geometricis elementis, in quibus nihil non plenum demonstratæ veritatis, & solidæ ad recõditiora vtilitatis. Archimedea, Apolloniana, Pappiana, Ptolemaica, siue Astronomica, & cætera Mathematicarum scientiarum genera his egent elementis, hæc verò elementa sine illis se tuentur, illorum solida fundamenta sunt, & ad illa tutò prouehunt. Videbis, præsertim in 2. huius Ærarij Tomo, exempla partim expressa, partim indicata ab huius Ærarij Authore, in quibus apparet eleuari Tyrones ab elementaribus propositionibus ad recondita geometricæ, atque adeò vniuersæ Mathematicæ Philosophiæ, vt constet etiam apud Criticos vilitatores licere in geometricis elementis cum laude versari, ac se prodere scriptorem non elementarium. Hactenus maioris momenti aliqua indicata sunt.

Reliquæ Mathematicæ, atq; aliæ humanarũ scientiarum egent his elemẽtis, hæc elementa nõ egent illis.

In elemẽtis licere non elementarũ se prodere.

Minoris momenti monita breuissimè accipe. Cur vsus sit Ærarij Author interpretatione Lantzij, vide in ipsius interpretis proloquio.

Iuxta vsum, siue abusum aliquorũ contra nomen Scholij, in hoc etiam Ærario Scholia aliqua minus breuia sunt.

Methodi, quà vtitur hic Author in elementorum geometricorum dispositione, rationes vide in Proloquio ante secundum tomum, vbi primum eam methodum vsurpat.

Illud in primis moneo, ac polliceor, Amice Lector, semper meliora visurum te, quò ad posteriora, & vlteriora magis progressus fueris in hoc Ærario, non solum ex ipsarum

Meliora in postremis reposita.

rum elementariarum propoſitionum neceſſitate, ſed etiã, quia hic Author eſt ex eorum hominum genere, qui cogitant (vt cecinit Venuſinus in arte poetica de Homero)

Non fumum ex fulgore, ſed ex fumo dare lucem.

In primo Tomo vt Tyrones alliciantur, circa aliqua aliquando quaſi proluditur. In ſecundo Tomo de planorum affectionibus curioſiora, in 3 Tomo de ſolidis ſolidiores, reconditiores, ac maioris pretij opes huius Ærarij expanduntur. Relege *INDICATA* ante dicatoriam huius 1 Tomi Epiſtolam. Ac vale interim, Amice Lector, & faue.

Compendia literarum Prol. C. Def. Pet. Ax. P. Ib. num. &c. significant Prolegomena, Capita, Definitiones, Petitiones, Axiomata, Ibidem, numerum marginalem, Propositiones Euclidis. &c.

INDEX PRIMVS
Capitum in Prolegomenis.

INDEX II
Vsuum, & Applicationum in omni scientiarum, & artium genere.

 ctura,

Vsus

Vide in Indice Praxeωn, Paradoxorum, Problematum, Theorematum, Scholiorum, &c. alios vſus.

INDEX III

Praxeωn.

Pra-

Vide & plures praxes alias in indicibus Vsuum, Problematum, Paradoxorum, & Scholiorum, Corollariorum. Ad Def. 2. § 2. &c. in primis ad propos. 10, 11, 12, &c. ne hic repetantur indicata, præsertim in indice antecedenti Vsuum.

INDEX IV

Paradoxorum.

Vide & alia paradoxa in Indice Praxeon, Vsuum, & Applicationum, Problematum, Theorematum, &c.

INDEX V

Locorum Aristotelicorum,& aliorum Philosophorum.

Habes & plura alia loca tum Ariſtotelis, tum aliorum Philoſophorum explicata; velut ad Prop.1 Eucl. de reſolutorijs libris Ariſtotelis de conſultationibus per reſolu-

solutionem &c. Martianum explicatum ad eandem Propos. 1. Proclum sapissimè, præsertim vbi de ellipticà lineà mirè designandà, &c. ad definitionem Eucl. de rectà lineà. Eundem cum Boëtio illustratum vbi de circulo, & de centro. & alios authores ad 37, 38, &c. & ad 47 vbi de duplatione quadrati, &c.

Vide & inter indices Vsuum, Scholiorum, Problematum, Theorematum, &c. Corollariorum, vbi & quæstiones physicæ, morales, Theologicæ solutæ apud Philosophos, & Theologos. &c.

INDEX VI

Corollariorum.

Co-

Co-

Co-

INDEX VII

Aliquot Scholiorum præcipuorum.

Scho-

Scho-

Omissa sunt & alia plusquam quadraginta quinq; Scholia minoris momenti. Quæ videas licet in Paginarum faciebus 61, 121, 125, 126, tria, 128, 130, 145, 147, 148, 149, 210, 228, 236, 249 duo, 251, 257, 276, 292 bis, 344, 352, 358, 361, 373, 388, 404, 426, 455, 472, 479, 494, 521, 547, 587, 593, 627, 641, 644, 651, 667, 669, 670.

INDEX VIII

Lemmatum.

Vide & alia Lemmata in Indicibus Theorematum, & Problematum.

INDEX IX

Problematum.

Pro-

Pro-

Vide in Indicibus Vsuum Praxeon, Corollariorum, Paradoxorum, Lemmatum plura alia Problemata.

INDEX X

Theorematum.

Theorema 20.
Parallelogrammata, quæ habent vnũ vni angulo æqualem, æquiangula sunt etiã in reliquis angulis. Ib. § 15.

Theorema 21.
Area cuiuslibet trianguli æqualis est rectangulo comprehenso sub perpendiculari à vertice ad basim protractà, & dimidià parte basis. Ad Prop. 44, sub § 2.

Theorema 22.
Area cuiuslibet figuræ regularis æqualis est rectangulo contento sub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & sub dimidiato ambitu eiusdem figuræ. Ibid.

Theorema 23.
Area cuiuslibet figuræ regularis æqualis est triang. rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale est perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductæ, alterũ vero ęquale ambitui eiusdem figuræ. Ibid.

Theorema 24.
Si recta linea secta fuerit vtcumq; in duo segmenta, quadrata duarum mediarum proportionalium inter totam, & vtrumq; segmentũ æqualia sunt quadrato totius. Ad Prop. 47, § 21.

Vide alia Theoremata in Indicibus Lemmatum, Corollariorum, Paradoxorum. &c.

INDEX XI

Porismatum.

Porisma 1.
Datà rectà terminatà, extra eam inuenire punctum, ad quod rectæ ductę ab extremis lineæ datæ faciunt angulum rectum. Ad Pr. 32 § 16.

Porisma 2.
Dati circuli centrum aliter, quàm Euclides in lib. 3. inuenire geometricè, & organicè. Ibid. § 13.

Porisma 3.
Dato triangulo, inuenire punctum in basi etiam extra triangulum, si sit opus, productà, ad quod cadat perpendicularis à trianguli vertice deducta. Ibid. § 19.

Porisma 4.
Supra latera dati trianguli constitutis duobus parallelogrammis cõmune latus habentibus, inuenire puncta, per quæ ducta recta linea auferat triangulum æquale dato triãgulo. Ad Prop. 35. § 9.

Porisma 5.
Intra datum triangulum inuenire pũctum, a quo fiat diuisio trianguli in duo æqualia triangula, quorum alterum sit oxygonium, siue cauiangulum. Ad Prop. 38. § 5.

Porisma 6.
Intra datum triangulum punctum inue-

Vide & inter Praxes.

INDEX XII

Moralium.

Vide & alia Moralia inter Scholia.

IN-

INDEX XIII

Auctorum, qui partim citantur, partim illustrantur in hoc I Tomo.

Pos-

Reliquos tres Indices 14, 15, 16. *vide post* 1 *hunc Tomum.*

POSTHVMÆ MEMORIÆ

Illustrissimorum heroum Spectatissimæ Madruzziæ familiæ.

Vigilius Vescoui Protonotarius Apostolicus, Theologiæ Doctor, & Medij S. Gotthardi Archipresbyter.

VT fidem liberem (amice Lector) Authoris huius Ærarij, qua se quasi obstrinxit in epistola dedicatoria, vbi affirmauit seorsim ab epistola posterorum memoriæ tradendos aliquos precipuos heroas Madruzziȩ gentis, censui aliquos eorum hic apponẽdos. Occasionem hanc lubens amplector testandi apud posteros aliquam grati animi mei significationem erga Illustriss. ac Reuerendiss. Principem meum, cuius humanitati, ac munificentiæ mea omnia obsequia, & me ipsum debeo. Vtar oratione non calamistrata, ne fidẽ detraham candidæ veritati, quæ sola quæritur in breuibus hisce historicis memorijs.

Madruzzia familia iam à multis sæculis primæ apud Tridentinos nobilitatis apicem semper obtinuit, essentq; per infinitã retrò seriem innumeri enumerandi Proceres, ac Oppidorum Dynastæ, quibus illa splendorem suum longè, lateq; diffudit. Hìc ego nunc exordium ducam tantùm ab eo tempore (nempe ab anno 1530) quo apud Austriacos Principes plurimum existimationis, ac dignitatis cœpit obtinere.

Consanguinitatibus attingit Madruzzia familia maximos orbis Christiani Principes, Summos Pontifices, Imperatores, Reges, Duces, &c. Austriacos, Lusitanos, Saxonios, Sabaudos, Mediceos, Gonzagas, Borromeos, Vrsinos, Altempsios, &c.

Obtinuit, ac obtinet nobilissimos Principatus, Marchionatus, Comitatus, Toparchias, Dynastias Ducatuum, Prouinciarum, Exercituum à Summis Pontificibus, Imperatoribus, Regibus demandatas honorificentissimas Administrationes, Præfecturas, legationes, Nuntiaturas exercuit.

Cardinalatus, Episcopatus, Abbatias, Canonicatus, primarias aulicas dignitates, & plura alia dècora prefert. Quæ quidem omnia partim indicantur in minoribus gentilitijs Stẽmatibus hìc antepositis, quæ partes hìc sepositæ sunt totius, ac integri stemmatis Madruzzij, quod vidisti apud effigiem Illustrissimi, & Reuerendissimi Episcopi, ac Principis, cui dicatus est 1 To. hu. Ærarij Mathematici, partim etiam mox leges in symbolis, & memorijs Heroum Madruzziormu, quorum consanguineam hìc arborẽ antepos. aspicis. Ordinem sequar & propagationis, & notarum incisarum numerariarum.

I. Vbi sceptrum bellicum, & clauis aurea. Iohannes Gaudenzius Madruzzius insignitus est dignitate Supremi Cubicularij Principum Austriacorum, & Generalatu Militarium copiarum vniuersæ Tridentinæ ditionis. Vir fuit eximiæ prudentiæ in rebus maximi momenti strenuè gerendis.

II. Vbi tuba laureata. Aliprandus Madruzzius Gaudenzij primogenitus. Qui plurimùm gratia pollebat apud Carolum V Imperatorem.

Stre-

Strenuum ſpecimen bellicæ fortitudinis præbuit tum in prælio ad Cereſolum in Pedemontana regione,tum in bello contra Proteſtantes. Vlmæ obijt extremum diem ætate iuuenis, pręclarè geſtis ſenex.

III. Vbi gladius cum ſcuto. Nicolaus Madruzzius Gaudenzij ſecundogenitus. Supremus Equitum Theutonicorum magiſter in Italia pro Carolo V Imperatore, & Philippo ſecūdo Hiſpaniarum Rege. Huic Nicolao commiſſa eſt cum ſuprema militari poteſtate honorifica cuſtodia Oecumenici Concilij, quod Tridenti celebratum eſt.

Religioni, & ſacro cætui tutandis militare ſcutum conſecrauit.

IV. Vbi galerus Cardinalitius, Mitra Epiſcopalis, Corona Principalis. Chriſtophorus Madruzzius Gaudenzij tertiogenitus Tridentino, Brixinenſiq; Epiſcopatibus, ac Principatibus inſignitus. Mox auguſtiſſimo Cardinalium Collegio à Paulo III Pontif. Max. adſcriptus eſt. Huic debet Tridentina Ciuitas quod dignata ſit honore, ac cætu Sacroſanƈti Oecumenici Concilij,cuius etiam primæ ſeſſioni ſub eodem Pontifice Paul.III in ſua Tridentina Baſilica, ac iterum ſub Iulio III interfuit. Vir fuit ſummæ in publicis negotijs, & adminiſtrationibus pru-

dentiæ. Magnanimus, & munificus totam Europam sui famà impleuit. A Marcelli II, & Pij IV lateribus Legatus suprema cum auctoritate Picenum, & Romandiolam Prouincias prudētissimè administrauit. Mediolani supremus Gubernator arcem in summa rerum angustia nutantem, amoto custode, proprij consilij, & vigilantiæ munimentis Regiæ ditioni confirmauit. Fuit etiam Episcopus Portuensis, vnius è septem Cardinalibus Episcopis Pontificem summum consecrātibus. Romę obijt eodem annorum recurrentium, quo natus est, die, ac sepulcrum habet in sacra Æde Sancti Onophrij.

Prædictis plura, & egregia de hoc heroe iam vulgata vide, Lector, apud Illustrissimum Equitem Ioan. Antonium Petramellaram de summis Pontific. & Cardinalibus, num. 18 sub Gregorio 13, pagina 23.

V. Vbi tympanum inscriptum literis, & notis musicis. Iohannes Federicus Madruzzius Marchio Callesij, & Comes Auij eàdem suprema militari Præfectura, qua Nicolaus eius Pater, insignitus. Eius tympani bellici membrana literata est, quia heros ille Marti Musas adiunxit. Fuit enim non minus bellicà prudentià, quàm in omni scientiarum, & liberalium artiū genere spectatus. Musicorum modorum, &

lin-

linguarum Hebrææ, Græcæ, Italicæ, Germanicæ, Hiſpanicæ, Gallicæ, in primis Latinæ ſcientiſſimus. Regiam ſibi Bibliothecam inſtruxit in Oppido ſuo Iſſognio. Semper abſtemius: verborum, ac riſus parciſſimus: aſſiduis doctarum literarum laboribus addictus: pietatis, ac religionis cultor eximius.

Vxorem accepit Iſabellam Chiallantiam filiam Renati Comitis Chiallanti nobilitate, ac opibus primarij inter Dynaſtas, ac Proceres Pedemontani Ducatùs. Ex hoc nobiliſſimo matrimonio plurimùm ſplendoris, ac opum acceſſit ad Madruzziam familiam. Cùm enim Iſabella Chiallantia vnica eſſet parentum hæres, Madruzzij Dynaſtæ obtinuerunt comitatũ Chiallanti, Toparchiam Amarellæ, Dynaſtias Granç, Verrezzi, Iſſogni, Caſtellioni, Veſſelli, Sancti Marcelli; quæ Oppida, & Ditiones in Valle Auguſtà ſunt. Ac præterea Valengini Principatum prope Bernam Heluetiorum, Dynaſtiam Boſſermontij in Lotaringia, Toparchias Mõtalti, & Setemij, & Ceremæ in Pedemontio; præter plurimùm & agrorum, & palatiorum prope Caſale.

Eadẽ Iſabella Federici Madruzzij vxor matrem habuit Mẽtiam filiam Dionyſij Ducis Brangantiæ, & Conſobrinam duarum Sororum, ac filia-

filiarum Emmanuelis Regis Lusitaniæ, quarum altera Beatrix vxor fuit Caroli Ducis Sabaudię, altera Isabella vxor Caroli V Imperatoris.

Renatus verò pater Isabellæ Chiallantiæ fuit Eques Ordinis Sancti Mauritij, & Magnus Sabaudiæ (vt vocant) Maresciallus, quin & vniuersi Sabaudici Ducatus Gubernator, quo tempore Dux Sabaudus in Belgio diuersabatur.

Comites verò Chiallantij originem trahunt à Saxoniæ Ducibus, quorum vnus Aleramus nomine, sub Othone III Imperatore creatus est primus Marchio Monferrati, Gotifredus verò filius Alerami ab Henrico Imperatore insignitus est Vicecomitatu Magnæ Vallis Augustæ, cuius longitudo biduanum iter obtinet, & cuius nunc potiora saltem Oppida possident Madruzzij Comites Chiallanti. Itaq; vt redeamus ad Federicum Madruzzium, heros ille, ductà Isabella Chiallantià vxore, præter opes, & oppida, contraxit etiam affinitates, & consanguinitates Imperatoriam, & Regiam, vt prædictum est.

Deniq; apud Pium, & Sixtum quintos, & Gregorium XIII Pontifices Maximos Oratoris Imperialis honorifico munere, ac vita Romæ perfunctus est.

VI. Vbi pugio inter claues Pontificias, Scilicet

licet nobilitati familiæ Madruzziæ nec deest etiam consanguinitas Pontificia. Nam fortunatus Madruzzius Secundus Nicolai filius vxorem habuit Vrsulam Altempsiam filiam Sororis Pij IV Pontificis Medicei, & consobrinam Sancti Caroli Borromæi. Dotis nomine accepit Marchionatum Suriani in agro Piceno. Equidem nihil honorificentius accidisse arbitror Madruzziæ familiæ, quàm quod sanguinis Madruzziæ nobilitas affinitate Sancti Caroli consecrata est.

VII. Aliprandus Madruzzius tertius Nicolai filius Ecclesiæ Tridentinæ, ac Salzburgicæ Canonicus, ac Tridentinæ quidem etiam Decanus. Sacris ædibus extructis, & splendidè instructis magnanimæ suæ munificentiæ reliquit monumenta, quasi quædam documenta quasnam in res Ecclesiasticæ pecuniæ impendendæ sint.

VIII. Ludouicus Madruzzius quartus Nicolai filius Tridenti Episcopus, Princeps, & Cardinalis, vir genere omni doctrinarum excultissimus. A latere Pontificio Legatus Pragam ad Imperatorem Rodulphum, & à Gregorio XIII Augustanis Comitijs Præfectus. Germaniæ, atque Hispaniæ Protector. Hæreticæ prauitatis Supremus Inquisitor. In electione Clementis VIII ne ipse in Pontificem Maximum eligere-

tur

tur sola ei sua magnitudo repugnauit. Romæ, vbi Pontificatum promeruit, obijt.

IX. Gaudēzius Madruzzius Fortunati filius. Militaribus supremis honoribus, dignitatibus, præfecturis cumulatissimus in bellis Pedemontanis, Monferratensibus, Vngaricis. Vir animo, sumptibus, & familia splendidis, ac regijs. Primam vxorem duxit à Ducibus Vrsinis, secundam è Gonzaga familia nobilissimas. Vita functus sine mascula prole. Martij nominis famà etiam post mortem spirat.

X. Emmanuel Renatus Madruzzius filius Iohannis Federici, Martis, & Musarum studiosus, Martē in Belgicis, & Sabaudicis bellis præstitit. Musas excoluit Chiallanti sua in ditione. Mathematicas disciplinas, hoc est verè nobiles, ac regias scientias in delitijs habuit, earumque non vulgarem cognitionem adeptus est. Domi hospites, & mensæ suæ commensales peregrinos, & religiosos viros etiam numerosos pientissimus heros adhibebat. Temporis aliquando superuacui honestè fallendi gratià pictoriæ arti succisiuam operam dabat, in qua mirè etiam excelluit. Sed nullum præstantius ab eo simulacrum prodijt, quàm filius Carolus Emmanuel paternarum virtutum viua, & vera effigies.

XI. Carolus Madruzzius alter filius Iohan-

nis

nis Federici; Tridenti Episcopus, Princeps, & Cardinalis. Temporis, ac iustitiæ momenta omnia expendebat: quæ duæ res etiam oculatissimos facillimè fallunt. A Pauli V latere legatus in Ratisbonensi cætu præclarum specimen dedit prudentiæ, ac dictorum, factorumque constantiæ. Doctorum virorum amantissimus, & munificus Protector. Singulari fuit animi modestia, qua tanto maiores laudes assecutus est, quanto eas magis refugiebat. Meritis eius laudabilius fuit laudes refugere, quàm laudari. Romæ, vbi obijt, iacet quartus è Madruzzia familia, qui Pōtificiam eam vrbem etiam post mortem incolunt, ac ornant.

XII. Vbi lilium inclinatum. Victor Gaudenzius Madruzzius secundogenitus Emmanuelis Renati Madruzzij. Patri successit in Theutonicæ militiæ Magistratu, & præfecturà; quam tamen militarem dignitatem non exercuit, in ipso primæuæ iuuentutis flore mortis falce succisus. Cùm eo spes ingentes extinctæ. Sine masculo hęrede mortuus anno 1632. Eius laudes hoc vno breuissimo compendio complexas habes: scilicet, frater fuit adhuc viuentis Caroli Emmanuelis.

XIII. Vbi augustissimum veteris Testamenti Propitiatorium. Carolus Emmanuel

c Ma-

Madruzzius primogenitus Emmanuelis Renati Madruzzij, Tridenti Epiſcopus, & Princeps, Comes Chiallanti, Auij, &c. Supremum nunc virile germen, & ſummus apex Madruzziæ familiæ.

Quem vt noris, admireris, ames, ac venereris, ò amica poſteritas, lege, amabo, Epiſtolam dedicatoriam primi Tomi Ærarij huiuſce Mathematici, in quà digniſsimus ille Princeps ſub ſymbolo auguſtiſsimi antiqui Propitiatorij Hieroſolymani deſcribitur. Eius effigies ante Dedicatoriam præfert ætatem annorum 44.

ÆVITERNÆ MEMORIÆ SACRA
HÆC SVNTO.

AMI-

AMICO LECTORI

Frater Ioannes Baptiſta Riccius Carmelita Bononiēſis Sacræ Theologię Doctor Collegiatus, Mathematicarum ſcientiarum publicus Lector in Archigymnaſio Bononienſi.

Breuitas, vtilitas, neceſsitas methodi ab Ærarij Authore inſtitutæ in elementis Geometricæ Philoſophiæ.

ANtiquam methodū elementariam in Geometrica Philoſophia huius Ærarij Author non ſolum non reprehendit, ſed ſummopere laudat; & citationes omnes ſemper facit iuxtà Methodum antiquam. Quoniam verò Ærarium hoc extruxit præcipue in gratiam Chinenſium Philoſophorum admirantium, & auidiſſimè appetentium elementa, & vlteriora noſtrę Geometriæ theoremata; & Chinenſibus deeſt copia librorum geometricorum in Chinenſem linguam translatorum, viſum eſt factu optimum, ſi breuiore alia, & iucundiore methodo exponerentur ea ex Elementis geometricis, quæ plurimum varijs, & eximijs vſibus inſeruiunt.

In duo pręcipua genera proportionales quantitates diuidi ſolent. Alterum genus eſt proportionum rationalium, alterum irrationalium. Rationalis proportio eſt quæ numeris exprimi poteſt, irrationalis quæ numeris exprimi nequit, & complectitur lineas, planas & ſolidas figuras incommenſurabiles.

De vtroq; genere proportionatæ quantitatis elementa ſunt apud Euclidem ita concinnata, vt poſt ſex priores libros de figuris planis, earumq; proportionibus, antequam

ad ſolidas figuras gradum faciat, interponat libros aliquot arithmeticos pro, & de incommenſurabilibus præſertim lineis. Quæ quidem incommenſurabilium interiectio, vt plurimum (teſte rei experientia) laſſat animos diſcentium, ac pleriq; ſunt, qui moleſtiam illam non vorent, ſed ab ea vorentur, nec ſuperſint, vt admiranda, & iucunda de ſolidis figuris ſaltem attingant.

In hoc ærario proportio rationalis, etiam in ſolidis ſeorſim ab irrationali.

Cenſuit igitur Author Ærarij Chinenſibus proponendum alterum proportionalis quantitatis genus ſeorſum ab altero, ne alterum alteri cum detrimento diſcentium incommodet. Itaq; priore loco proponit elementa de planis, & ſolidis ad propotionem rationalem ſpectantia, quę duobus, ſeu tribus hiſce Tomis abſoluit. In locum vero poſteriorem reijcit ſpectantia ad irrationalem, & ad incommenſurabilia.

Cur à primo ad ſextū elemētū.

Præterea, quoniam in antiqua, & vſitata (& ab Ærarij Authore laudata) methodo circà ſex libros de figuris planis, inter primum, & ſextum libros (in quibus admiranda, & præcipua vſu, ac iucnnditate latitant, & produntur) intercedunt reliqui quattuor libri, (qui non ſine moleſtia detinent ſpes auidas diſcentium) pretium operę arbitratus eſt, ac prouidit vt Tyrones à primo immediatè ad ſextum elementorum gradum facerent, quoniam id fieri poterat ſine ſcientiæ vlla deficientia, expoſitis poſt primum, & antè ſextum ſolis definitionibus libri quinti. Hac enim ſua Methodo expertus eſt Author Ærarij, dum publicè Mathematicas ſcientias doceret, breui temporis, & ſcientiæ compendio Mathematicarum ſcientiarum ſtudioſos adeo iucunditate Vſuum, ac Theoriarum, quæ deducebat ex propoſitionibus libri ſexti, fuiſſe illectos, vt ſine vllo tædio deinde percurrerent reliqua, quæ in quattuor intermedijs libris demonſtrantur.

Conſonātia libri primi cum ſexto.

Conſonantia etiam plurium propoſitionum libri primi cum propoſitionibus libri ſexti concinnè vtrumq; inter ſe immediatè committit. Confer inter ſe, ac vide ſimilitudinem in libro 1 propoſitionum 9, 10, 23, 35, 36, 37, 38, 42,

43,

43, 44, 45, 47, cum libri 6 propositionibus 9, 10, 18, 24, 25, 31.

Quid si (permissà cuilibet suà sententià, & antiquà methodo etiam ab hoc Ærario non exclusà) non modo breuitas, vtilitas, iucunditas, sed & necessitas sit instituendæ methodi, quàm Author Ærarij proposuit? Hęc non tam illius, ac nostra, quam doctiorum interpretum, & expositorum Elementariæ huiusce Philosophiæ sentētia est & verbo, & vsu ab ipsis comprobata. Qui censent cognitionem de proportionibus linearum, & figurarum planarum necessario pręmittendam libris inter Primum, & Sextum positis. Vide huius veritatis testimonia, & exempla in Ærario cùm alibi, tum in § 1 ad lib. 4. & in 5 extremo ad lib. 5. Sæpius habes ad varias propositiones librorum 2, 3, 4, 5 indicata commoda nouæ huius elementaris methodi.

Necessaria cognitio proportionum ante 2, 3, 4, 5 libros.

Antiquorum exēplo, & iuxta vsum in geometricæ philosophiæ demonstrationibus, in quibus aliqua (ne incommodent pręcipuæ demonstrationi) seponuntur lemmatum loco postdemonstranda, etiam Author Ærarij præcipua Elementa præponit, nempe libros 1, & 6, & si quid aliquādo, ac rarò, superest quod quasi suppositum sit è reliquis libris inter primum, & sextum intermedijs, post sextum propositiones reliquorum librorum, lemmatum loco, seponit; præsertim ex lib. 5, in quo per numeros demonstratæ propositiones non egent vlterioribus propositionibus; vel si qua semel è libro 3 citetur, ea demonstratur è lib. 1 anteposito.

Antiqua de more quasi lēma apo[s]tposita libro 6 aliqua li. 5.

Habes ex hactenus dictis consilium methodi ab Authore Ærarij vsurpatæ pro Chinensibus, atq; etiam pro nostratibus Europæis, si qui vti velint; sin abnuant, habes & hic libros omnes de planis figuris antiquæ methodo reponendos. Aequum præterea fuit, vt sine longiore mora in intermediorum librorum explicatione habeant Tyrones praxeω̄n aliquarum in lib. 1 exhibitarum perfectas, quas Author Ærarij in hoc libro adducit, demonstrationes.

In lib. 6 demonstrationes aliquarum praxeω̄n in li. 1.

At enim obijcies, quæ ista breuitas est, quæ præ ceteris

li-

librũ Primum, & Sextum producit in molem duorũ,ac etiã triũ Tomorum? Respondeo,methodi breuitatem non confundendam cum rerũ copia,quę proponitur,in qua lubitũ est cuiq;(si nolit omnia) seligere,quæ magis arriserint. Via ipsa compendiaria est, licet in compendio viæ plura diuerticula indicentur pro publicis Lectoribus ad condimenta elementorum. Quid breuius,quã post elementum I inducere Tyrones ad Theorias, & vsus eximios proportionum,& à planis ad solida gradum facere,sine alia mora in alijs, quæ minus iucunda, minusq; vtilia sunt, & rectè licet in locum posteriorem reponere?

Copia rerum in breuitate Methodi.

Interim ego ingentes gratias ago, ac plurimum debere me profiteor huius Ærarij Author, quod Mathematicas meas lectiones frequentissima Auditorum corona excepit. Expertus enim sum quam iucundè Tyrones à nobis audiant Euclidianas propositiones, dum eas ex huius Authoris Apiarijs conditas expono, scilicet ope indicis in duodecimo Apiario appositi. Quid ergo fiet cum Euclidē non solum ex Apiarijs, sed etiam ex huius Ærarij diuitijs vndiq;ornatum,& illustrem meis Auditoribus proponam?

Applicationes in Aerario p- vtiles frequentiæ auditorum.

Permirum verò est hominem semper afflictæ valetudinis, ac ætatis iam occasantis Scientificas plurium Tomorum lucubrationes partim expositas, partim indicatas in duo, vel tria volumina cogere, & sub prælo ante natas, quam animo conceptas publicæ luci eniti potuisse inter corporis ęgritudines,inter illatas animo iniquissimas molestias, inter bellicos tumultus, & sacrilegas coniurationes circa innocẽtis patriæ fines fœdissimè grassantes,inter quotidiana molestissima nuntia vicinarum(licet in hostes) cladium,latrociniorũ, incendiorum,& ab hostibus sacrilegiorũ cælestes iras, & vltricia pro læso Numine barbarorum arma prouocantium, canente interim Lucano.

Bella geri placuit nullos habitura triumphos,

& succinente Horatio:

Quidquid delirant Reges, plectuntur Achiui.

Sed interim ego Cælum exoratum velim, vt Ærarij huiu-

huiusce geometrici Authori amico, & conciui meo pacata diu tempora, & vitam publico bono dicatam proroget, & auxiliarios literariæ rei Amicos prouideat. Quales olim expertus est, & in monumentum grati animi posteritati à me nominandos indicauit. Vnus est Adm. R. P. Iosephus Feurstainus Collegij Tridentini Soc. Iesu Rector, cuius magnanimæ liberalitati primam suorum Apiariorum editionem debet Author. Cuius viri modestiæ inuisas laudes inuitus hìc sileo. Alter est Dominus Bartholomæus Prouasius vir in Mathematica, præsertim machinaria, & in ciuili, ac militari Architectura ingenio, manuq; plurimũ pollens, qui numerosam illam, & speciosam figurarũ, quæ in Apiariorũ Mathematicorum vtroq; Tomo visuntur, varietatem, & Exodiorum schemmata in fine secundi huiusce Tomi, ad huius Authoris mentem aptè admodum delineauit. Dignus, qui publici Bononiensis Ærarij est incola, etiam Ærarium hoc scientificum laudato nomine incolat.

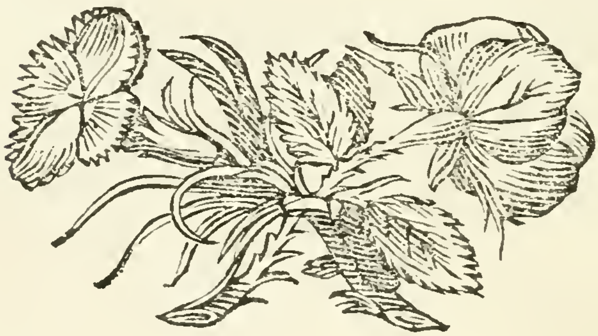
Grati animi monumẽta.

Inter auxiliarios Amicos colloco illos etiam, qui candidè, nec precario pronunciarunt honorifica iudicia de hactenus editis ab huius Ærarij Authore. Nihil enim maioris axilij, ac virium est magnanimis animis bono publico laborantibus, quàm audire literarios suos labores viris doctis, & probis probari, & cum laude publicè prodesse. *laudata virtus crescit.* Præter honorificam viri doctissimi gratulationem, quam habes, Amice Lector, in præfatione ad quartam Apiorum editionem, lubet hic apponere sequẽtia verba vt iacent in litteris Duaci 24 Iunij 1646 huc Bononiam ad amicum scriptis à viro scientijs omnibus ornatissimo, quas publicè iamdiù profitetur, quiq; annis preteritis Mathematicas (nunc Theologicas) scientias summa cum laude docebat: *Habet R. Vestra illic R. P. Bettinum mihi ex operibus satis notum, à quo facilè amœniores Mathematicæ partes posſit discere. Eum mihi, licet aliunde non notum, vel communi Mathematici nomine plurimum saluere iubeo, & de ingeniosis inuentis à me sepius examinatis, & publicè propositis gratulari.* Potuisset & compati, si doctissimus ille vir, ac quicumque

huius

huius Ærarij Authorem amant, ſcirent, aut animo concipere poſſent quantũ valetudinis, ac temporis (quo egeret ad alias lucubrationes literarias perſcribendas) cogatur impendere in rebus planè mechanicis curandis pro typographia, & figuris incidendis, & alijs apparandis, & vrgendis, & vitandis contrà ignauiam, & ſupinitatem eorũ, ad quos hæ curæ ſpectant indignæ homine ad altiora, & vtiliora facto. Coactus eſt Author, auxilijs vndiq; deſtitutus, vnus ſubire onera omnia Typographię: *tantus amor partûs*, cui mater ipſa cogitur obſtetricari.

Vale, Amice Lector, & meliora, & correctiora in hoc Secundo, ac Tertio, quàm in primo Tomo, auido, ac beneuolo animo perlege.



TOMI PRIMI
PARS PRIMA,
IN QVA
Prolegomena, Definitiones, Postulata, Axiomata.

PROLEGOMENA.

CAPVT I.

De Mathematici nominis notione, dignitate, ac distinctione à fucatis Mathematicis.

I. Μάθησις *discentiam, disciplinam, doctrinam sonat ijs, qui græcæ linguæ aliquam cognitionem indepti sunt; quasi Mathematicam Philosophiam discere sit verè discere sine dubitationum ambiguitate, qua carent inprimis puræ Mathematicæ, præsertim Geometria. Quod Aristot. in Rhetoricis dixit* μάθησιν ποιεῖν, *dixit & Cicero* : scientiam afferre. *Itaque Mathematicæ ab ipso nomine scientias se produnt.* Μαθήματα *disciplinæ, doctrinæ, scientiæ per excellentiam vocantur huiusce Philosophiæ scita.* Ἀμαθὴς *græcis, latinis est illiteratus, insciens.*

Mathematica doctrinas, et sciẽtias sonãt.

Illiteratus & insciens ἀμαθής.

II. Mathematicorum Philosophorum, & Mathematicarum scientiarum honorificum nomen vnde primum prodierit prodit Gellius *lib. 1. cap. 9. vbi de Pythagoræ discipulis loquitur :* Vbi res didicerant rerum omnium difficillimas, tacere, audireq;, atque vbi esse iam

cæperant ſilentio eruditi, cui erat nomen ἐχεμυθία, tum verba facere, & quærere, quæq; audiſſent ſcribere, & quæ ipſi opinarentur expromere poteſtas erat. Hi dicebantur in eo tempore μαθηματικοὶ, ſcilicet ab ijs artibus, quas iam diſcere, atque meditari inceptauerant: quoniam Geometricam, & Gnomonicam, Muſicam, cæteraſque item diſciplinas altiores μαθήματα veteres Græci appellabāt. Vulgus autē quos gentilitio vocabulo Chaldæos dicere oportet, Mathematicos dicit. Exinde his ſcientiæ ſtudijs ornati, ad perſpicienda mundi opera, & principia naturæ procedebant, ac tunc denique nominabantur φυσικοὶ. *Audis nomen Mathematicæ à priſcis primum inditum altioribus diſciplinis, Geometriæ, &c. ac Mathematici nomen tunc primum Pythagoricos Diſcipulos promereri ſolitos cum iam didicerant, ac ſcientes erant.*

Altiores ſcientiæ μαθήματα.

III. Sed egregiè in primis, ac philoſophicè Proclus dum è Platonicorum ſententia opinatur diſcere eſſet reminiſci earum rerum, quas anima, antequam in corpus deijceretur, impreſſas à rerum omnium Conditore Deo acceperat, ac poſt multa doctè dicta ſic pergit: Hæc itaque Matheſis eſt, ſiue diſciplina, quæ æternarum in anima rationum reminiſcentia eſt. Mathematicaque (hoc eſt diſciplinatiua ſcientia, vt ſic exponam) propter hanc ea cognitio potiſſimum nuncupatur, quæ nobis ad earum rationum reminiſcētiam maximè confert. Et opus igitur, atque officium huiuſce ſcientiæ quale porrò ſit à nomine fit manifeſtum. Id nempe quod inſitam mouet cognitionem, & exuſcitat intelligentiam, & purgat cogitationem, & promit formas, quæ nobis ſecundùm eſſentiam inſunt, & aufert obliuionem, atque ignorantiam, quæ nobis ab ortu noſtro innatæ ſunt, & ſoluit vincla, quæ ab irrationabilitate proueniunt: ad Dei planè ſimilitudinem huius ſcientiæ præſidis, qui intelligentiæ munera manifeſtat, & cuncta Diuinis rationibus complet, & animos ad mentem erigit, ac veluti è profundo excitat ſopore, & inquiſitione ad ſe ipſas conuertit, & obſtetricatione quadam perficit, puræq; mentis inuentione ad vitam beatam deducit. Cui ſanè nos quoq; præſens opus dicantes, de Mathematica ſcientia contemplationem perſcribemus.

Deus Mathematicarum ſcientiarū præſes.

Notaſti ne Deum Mathematicæ ſcientiæ præſidem? & quam religiosè Philoſophus, licet Ethnicus, Deo ipſi litteraria ſua opera dicet? Quanto æquius eſt Chriſtianos Scriptores ſua litterarum ſtudia in id, animo ſaltem, dirigere, vt Dei cognitionem, & reuerentiam animis lectorum ingenerent?

IV. Sed ad Gellium reuertor, & in eius verbis animaduertas velim, mi Tyro, ab eo in cenſu haberi vulgaris hebetudinis eos, qui Chal-

Chaldæis, nempe nugatoribus genethliacis, Mathematicorum nomen impertiunt. Quos cùm in historijs Romanis constet sub fucato Mathematicorum nomine non semel Vrbe exactos, vulgus hominum, quorum (Vt inquit Philosophus in extremis lib. Ethicorum) non est distinguere, ac rectè dijudicare, exilij notam iniuriosam inussit nomini Mathematico, quæ nota merito pseudomathematicis Chaldæorum sectarijs debetur, non verò veris, ac scientificis Philosophiæ Mathematicæ professoribus, quos semper & Romani, & exteri Reges magno in honore habuerunt. Quod longa historiarum serie potest confirmari.

Chaldæi Genethliaci fucati Mathematici sæpius vrbe exacti.

CAPVT II.

Indicatæ apud alios laudes Mathematicæ Philosophiæ. Eiusdem singulares vsus theorici, morales, theologici; suauitas, pulchritudo per se expetendæ. &c.

I *Vide præ omnibus Platonem lib.7. de Repub. Deinde Proclum in Euclidis elementum primum, Tertio loco Clauium in Prolegomenis ad Euclidem, vbi plura de præstantia, nobilitate, vtilitate, iucunditate, diuisione, &c. Scientiarum Mathematicarum. Adde aliqua è præfatione ad Lectorem initio prioris Tomi nostrorum Apiariorum vniuersæ Philosophiæ Mathematicæ. Ex Platonicis appono nonnihil. Post celebratissimam sentẽtiam ex Platone de oculo animæ, qui à solis Mathematicis scientijs recreatur, addit Proclus lib. 1. in Eucl. cap. 8.* Rectè Socrates aiebat à Mathematicis scientijs oculum animæ excitari ad eius, qui est, Dei contemplationem, & à simulacris ad ea, quæ vera sunt. Nam pulchritudo, & ordo Mathematicarum rationum, firmitudoq; ac stabilitas contemplationis nos ipsis coniungit intellectibus, perfectèq; in ipsis obfirmat, perpetuò quidem manentibus, & diuina pulchritudine collucentibus, ac mutuum ordinem seruantibus.

II. Marsilius Ficinus Doctissimus Philosophus Tom. 2. paullo ante mediũ, vbi epitomen habet Dialogi 7. de Iusto, ex Platone Mathematicas apponit aquas, formas, gradus, lumina, & per interualla sic infit: Diuina in tribus, vt ità dixerim, aquis repræsentãtur. Primò quidem, licet confusius, in rationibus Physicis, secundò distinctius in

Diuina in Mathematicis distinctius repræsentantur, quā in physicis &c.

Mathematicas formas sine materia licet excogitare.

Diuinarū formarum imagines mathematicæ sunt.

Mathematici gradus ad Deum.

Mathematicis, tertiò clarissimè in Metaphysicis penitus absolutis. Formas quidem physicas Plato omnino materiales appellat, quia & communi, & propria materia indigent, & absque illa cogitari non possunt. Mathematicas verò formas non adeò materiales, quia & propria non egent materia, sed aut communi tantum, vt dimensiones, aut nulla, vt numeri. Atque hæc sine materia licet excogitare. Diuinas denique formas omnino immateriales existimat, resque veras, quarum imagines quidem sint Mathematicæ formæ, vmbræ verò res naturales. Mysterium verò hoc est Pythagoricum. &c. Platonis septimus hic liber de Rep. vbi animam ad summum bonum, solemque, idest Deum; Deosque diuinos, quasi stellas, conuenientibus perducit gradibus, nullam in ipso ascēsu naturalis peritiæ efficit mentionem. Sed Mathematicos quosdam gradus ad Diuina commodius perlucentes adducit in medium, inter quos duo sunt puri, Arithmetica, &c. & Geometria, &c. tres mixti, &c. Astronomia, &c. Musica &c. Stereometria &c. Cum dicit Plato animam à lucerna ad Lunam, à Luna ad Solem attolli, significat à formis naturalibus ad Mathematicas, ab his ad Diuinas denique eleuari, &c. figuræ, quarum ratio vera in mente reperitur, ad incorpoream nos essentiam erigunt &c.

III. Vides, Lector, Mathematicæ contemplationis, & abstractionis (de qua plura inferius cap. 6.) fructum infinitum, dum nos ad summum bonum Deum disponit, ac eleuat. Vide plura apud Ficinum, & alios Platonicos. Ex ijs, atque ijs rursus Proclum appono, lib. 1. cap. 10. Plato animæ purgatricem, sursumque ductricem Mathematicam perspicuè asseuerat, quippe quæ caliginem aufert ab intelligenti cogitationis lumine, quod potiùs conseruandum est, quàm infiniti corporales oculi. *Et cap.* 5. Ad Philosophiam moralem nos Mathematica instituit, ad eamque postremam perfectionem perducit, ordinem, concinnamque vitam moribus nostris inferens. Figuras prætterea virtuti conuenientes, & modulationes, & motus nobis tradit, à quibus sanè Atheniensis etiam hospes eos instituti, ac perfici vult, qui moralem virtutem ab ineunte adolescentia sunt consecuturi. *Mox.* Idcirco Socrates in Gorgia quidem Calielem inordinatæ, intemperatæq; vitæ accusans, Geometriam, inquit, ac Geometricam æqualitatem negligit.

Mathematica animū purgāt, &c.

Mathematica ad moralem Philosophiam disponūt, et instituunt.

Intemperata vita accusatus quispiam propter mathematicarum scientiarum negligētiam.

IV. De pulchritudine Mathematicæ Philosophiæ Aristoteles lib. 13. *Metaph. summa* 1., *in fine, cap.* 2. *sic*; Cùm autem bonum, & pulchrum differant (si quidem illud semper in operatione, pulchrum verò etiam in immobilibus est) qui dicunt Mathematicas scientias

nihil

nihil de bono, vel pulchro dicere, falsum dicunt, dicũt.n.& maximè ostendunt, nam, etsi non nominant, cùm tamen opera, & rationes ostendunt, nonne dicunt de eis? Pulchri namq; maximè species sunt ordo, commensuratio, & definitum, quæ maximè ostendunt Mathematicæ Scientiæ. *Proclus Aristotelem, interpretatur, vbi supra*: Mathematicarum disciplinarum pulchritudinẽ quidem ab ijs ostendentes, à quibus Aristoteles quoq; nobis persuadere conatus est. Tria enim hæc potissimum & in corporibus, & in animis pulchritudinem efficere, ordinem, inquam, conuenientiam, atque determinationem fatemur. Siquidem turpitudo quoque corporea quidem à materiali inordinatione, & deformitate, & inconuenientia, & indeterminatione iam in composito prædominante: animæ verò, ab irrationabilitate perperam, inordinatèque se se mouente, & rationi dissonãte, & terminum illinc non suscipiente exoritur. Quamobrem pulchritudo etiam ipsa in contrarijs quidem, ordine videlicet, & conuenientia, determinationeque existit. Hæc autem in Mathematica scientia maximè inspicimus, ordinem quidem in posteriorum quidem, magisque variorum ex primis, atque simplicioribus ostensione; semper enim sequentia præcedentibus annexa sunt, & hæc quidem principij rationem habent, illa verò consequentium primas suppositiones: conuenientiam verò in consonantia ad inuicem eorum, quæ demonstrantur, ad mentemq; omnium relatione; communis siquidem mensura totius scientiæ mens est, à qua principia quoque accipit, & ad quam discentes conuertit: determinationem autem in manentibus semper, immobilibusque rationibus; non enim interdum quæ sub ipsius cognitionem cadunt aliter se habent, quemadmodum opinabilia, atque sensilia, sed eadem semper sese offerunt, intelligentibusq; formis determinata sunt. Si itaque pulchritudinis parandæ vim habentia hæc præcipuè sunt, Mathematicæ autem res per hæc exprimuntur, perspicuum quidem est, quod in his etiam eximium illud decus reperitur.

Mathematicæ scientia maximè dicunt de bono, & pulchro, Arist.

Tria, quæ ad pulchritudinem requiruntur, in Mathematicis scientijs maximè spectantur.

V. Igitur meritò per se expetibilis est tam speciosa Philosophia, etiam si nullam extra se pàreret vtilitatem. Cap. 9. Et Mathematicam igitur scientiam, ex ipsaque contemplationem propter se expetendam esse ponendum est, non autem propter vsus humanos. Si autem prodeuntem ex ipsa vtilitatem ad quoddam aliud referre opportet, ad intelligentem cognitionem ipsa referenda est. Ad ipsam enim nos deducit, animæque oculum ad vniuersorum cognitionem præparat, impedimenta, quæ à sensibus proueniunt, abstergens, atque auferens. Quemadmodum igitur totam purgantem virtutem

Mathematica per se expetenda, etiam sine vsu.

non

Vsus mathematicarum ad contemplationem, & ad purgationem anim. referendus.

non ad huius vitæ vsus, sed ad vitam contemplantem respicientes vtilē, vel inutilem dicimus, ita sanè Mathematicæ quoque finem ad mentem, vniuersamque sapientiam referre opportet. Præterea quæ in ipsa quoque est actio & per se quidem, & propter vitam intelligentem studio digna est. *&c. mox*: non igitur hac de causa mathematica spernenda est, quia ad humanos vsus *(videbis tamen inferius apud nos etiam ad humanos vsus prodesse)* nobis non prodest (vltimæ enim eius desinentiæ, & quæcunq; cum materia operantur huiuscemodi vsum considerant) sed contra eius immaterialitatem, ipsiq; soli quid boni esse admirandum, &c.

VI. De suauitate, ac iucunditate in Mathematicis theorijs verè idem Proclus: Qui Mathematicarum disciplinarum cognitionem contemnunt, voluptates, quæ in ipsis sunt, minimè degustarunt. *Causam verò cur aliqui voluptates syncerissimas Mathematicas non degustent affert ex Varrone Aulus Gellius Noct. Att. lib. 16. cap. 18.* Mathematicas aut omnino non discimus, aut prius desistimus, quàm intelligamus cur discendæ sint. Voluptas autem, aut vtilitas talium disciplinarum in postprincipijs existit, cum perfectæ, absolutæque sunt, in principijs verò ipsis ineptæ, & insuaues videntur. *Rectè*: videntur, *non enim sunt etiam earum principia insuauia, si ritè discantur. Quamobrem nos elementa hæc Geometrica vsibus, & principia hæc postprincipijs condire conamur, appositis ad ea nostris hisce commentationibus. Narrat Proclus lib. 2. c. 4. Euclidem olim Ptolomæo Regi affirmasse nullā esse viam Regiam ad Geometriam; at nos regiè ornatam, & amœnam, & facilem, quatenus tenuis industriæ nostræ opibus licuit, instruimus, ac sternimus hìc viam ad Regiam humanarum scientiarum Reginæ, hoc est Mathematicæ admirandæ Philosophiæ.*

Voluptas mathematicarū maximè in postprincipijs.

Nos mathematica principia conamus postprincipijs.

Ad Geometriam viā regiam nō esse quid significet.

Nos eam viam instruimus.

CAPVT III.

Mathematicæ Philosophiæ vsus amplissimi in vniuersa Ciuili vita.

I E*Vdoxus Gnidius, & Archita Tarentinus, cùm primi scientias Mathematicas ad vsus Mechanicos traduxissent, à Platone reprehensi sunt, quasi nobilissimam Philosophiam prostituissent. Censebat nimirum Plato satis esse Philosopho Mathematico mirificis Geometriæ, Astronomiæ, ac cæterarum* con-

A Platone cur reprehensi qui mathematicas ad

contemplatiuarum Mathematicarum scientiarum theorijs detineri, ac perfrui, quarum dignitas suis opibus contenta nihil extra se quæreret, ac dedignaretur vulgaribus vsibus contaminari. Cæterùm quoniam hominum ingenia, præsertim hoc æui ita vsu, seu potius ab vsu, comparata sunt, vt à Mathematicis scientijs ob id in primis abhorrere videantur, quod eas nullius esse publicæ vtilitatis arbitrētur, libet hic ex nostri Villalpandi præfatione saltem eam partem apponere, in qua vtilitates Mathematicarum scientiarum in omni ciuilis vitæ genere persequitur. Latent hæc recentiora in To. 1. parte 2. Apparatus Vrbis Hierosolymitanæ, ac Templi, libri primi initio.

vsus mechanicos traducūt.

II. Cum cæterarum disciplinarum suas quæque Reipublicæ vtilitates, & commoda subministret, eoq; maiora, quo meliorem nostri partem magis, magisque exornat, ac perficit; eæ tamen, quæ Mathematicæ facultates nominantur, principem inter disciplinas locum tenere suo iure censendæ sunt. Nam, vt earum nobilitatem, ac certitudinem, cæteraque vtilitatum commoda prætermittam, ea sanè omnium longè maior est huius disciplinæ vtilitas, quòd omnia Oppida, Vrbes, Regna, Respublicæ, omnis denique hominum Societas vno Mathematicarum rerum præsidio muniantur, vt si Mathematici artes, ingeniumque è Ciuitate sustuleris, ne ipsa quidem hominum in societatem propensione, quanta quanta sit, diutius aut Respublica, aut Ciuitas ipsa consistat. Quid enim profuisset hominibus in vnum simul locum conuenisse, nisi harum scientiarum legibus Domos extruere, Vrbes munire, Ciuitates excolere, præsidia excitare, Ciues denique ab hostium incursibus tueri docerentur? Hæ facultates Reipublicæ commoda domi parant, foris tuentur, in pace sunt ornamēto, in bellis præsidio, ac munimento, Castra erigunt, Vallos muniunt, arma ministrant, earumque tractationem, atq; exercitationem homines docent,

Mathematicarū scientiarū vtilitates in humana republica.

In bellis.

III. In tranquillo verò, ac pacato Reipublicæ statu quis enumeret quot, ac quanta mortalibus Mathematicæ scientiæ commoda largiantur? Quid enim? An sine Astrologiæ beneficio temporum quisquam curam, atque exactam rationem tenere possit? Annorum, mensium, dierum spatia perscrutari, tempestatum vicissitudines inuestigare, quibus nauigationem inire, quibus longis itineribus se dare, quibus aliqua ad communem vsum, ad vitamque iucundè, & ciuili more ducendam necessaria haberi queant, quibus, inquam, temporibus negotiatorum, ac mercatorum munera exercere liceat, probè cognoscere? Agri porro colendi ratio, omnisque Agricolarum opera, atque vtilitas nonne ex temporum lunaris, atq;

In pace.

Ab Astronomia publicæ vtilitates.

sola-

ſolaris curſus cognitione maximè pendet, ſine qua nec aptè arbores ſerere, nec ſemina iàcere, nec fructus, vt reliqua taceam, maturè percipere poſſumus? Eam verò cognitionem Aſtrologię acceptam referendam eſſe nemo, niſi planè fatuus, negabit.

A machinaria. IV. Age vero, quis vnquam ſine libræ, menſuræ, ac numeri diſpoſitione aut cõmercia exercebit, aut ius inter diſſidẽtes dicet, aut ſuum vnicuique partietur? Agros autem metiri, temporum, vel iniquorum iniurijs abolitos præfigere eorum terminos quis vnquam abſq; Geometriæ præſidijs poterit? *A Geometria.* Commoda verò, quæ ſuaui concentu Muſice hominum generi afferat euoluere non eſt huius loci. *A muſica.* Prius enim me vires, papyrus, tempuſque deficerent, quàm vt ſingulas Mathematicæ ſcientiæ vtilitates percenſere numerando poſſem. Nulla eſt enim in Republica ars, nulla Artificum exercitatio, nulla Agricolarum opera, quæ non aliquo Mathematici adminiculo fulciatur.

A machinaria rursum publica vtilitates. V. Quis enim niſi Mathematicarum artium peritus, piſtrinum frumento, alijſque rebus molendis, ac triturandis inuenit? Quis torcular, ac prælum, quo vinum, oleum, ac infiniti liquores guſtui, medicinæ, ac voluptati neceſſarij exprimuntur, excogitauit? Quis nautas mali, & antennæ vires, temonis penè inexplicabilẽ vim, magnetis propè diuinam virtutem edocuit? Mathematicus eſt, qui omnia ferè omnibus artibus inſtrumẽta ſuppeditat, artificum vires auget, labores leuat, mercatoribus rerum gerendarum rationes præſcribit, & ſtudioſis omnibus ad omnia penè optimarum artium, ac diſciplinarum ſtudia viam aperit, ingenia exacuit, mentes illuſtrat.

VI. Ac mihi quidem hæc omnia prudenter ſatis, vt cætera perſecutus videtur ſapientiſſimus Plato. Qui cum Rempublicam omnibus ſuis numeris abſolutam conſtituere conaretur, verba illa adiunxit ad Mathematicarũ facultatum laudem, & commẽdationem ampliſſima.

Reſpublica Platonica nõ ſine Mathematicis ſcientijs. Quam maximè igitur præcipiendum eſt, vt qui præclariſſimã hanc habitant Ciuitatem nullo modo Geometriam ſpernant; Nam & quæ præter ipſius propoſitum quodam modo eſſe videntur, haud exigua ſunt. Et roganti qualia reſpondet: quæ tu circa rem bellicam commemorabas. Scimus quin etiam ad diſciplinas omnes facilius perdiſcendas intereſſe omnino attigeritne Geometriam aliquis, an non.

Deinde quoque de ordine addiſcendarum Mathematicarum idem continuò diſſerens, poſt linearum, ac ſuperficierum Geometricarum tractationem, ſtatim addiſcendam tradit Aſtrologiam. &c. *Vide reliqua in citata præfatione Villalpandi. Vide etiam epiſtolam*

lam 45. lib. 1. apud Cassiodorum, in qua nomine Theodorici regis Italiæ ad magnum Boetium dum scribit, laudes luculentas addit mathematicarum scientiarum ab earum vsibus admirandis, &c.

Vtilitas Propositionum, ac theorematũ mathematicorum in omnib. scientijs, ac artibus ciuilibus à nobis prodi tur in hisce cõmentarijs.

VII. Habent ex antepositis qui à Mathematicarum scientiarum cognitione abstinent, & earum sterilitatem causantur, vnde opinationem eam ignorantiæ matrem abijciant. At nos, vt publico malo medeamur, & publico bono prosimus, singularum in Euclidem propositionum vsus in omni scientiarum, & artium genere nostris hisce cõmentationibus aperiemus. Claudo caput sola memoratione edicti, quo Diocletianus Imperator sanciuit, vt Geometria publicè doceretur, & exerceretur ob ingentes ab ea in Rempublicam vtilitates.

Edictũ imperatorium pro Geometria.

CAPVT IV.

Quænam sint elementa Geometrica. Eorum necessitas, ac dignitas. Cur hæc (quæ sine controuersia sunt ab Euclide concinnata) præ alijs habeantur.

I ARist. lib. 5. Metaph. cap. 3. Elementum dicitur ex quo componitur primo inexistente indiuisibili specie in aliam speciem. Vt vocis elementa, ex quibus componitur vox, & in quæ vltima diuiditur; illa verò nõ amplius in alias voces ab ipsis specie diuersas; sed etsi diuiduntur, particulæ tamen eorum eiusdem speciei sunt, vt aquæ particula aqua, sed nõ syllaba. Similiter etiam corporum elementa dicunt, ea dicentes vltima, in quæ corpora diuiduntur; illa verò non amplius in alia specie differentia corpora, & siue vnum, siue plura huiusmodi sint, hæc elementa aiunt. Similiter autem signationum *(idest figurarum, & demonstrationum Geometricarum)* quoq; elementa dicuntur, ac simpliciter demonstrationum. Primæ enim demonstrationes, quæ in pluribus demonstrationibus insunt, hæc elementa demonstrationum dicuntur. *Mox*: Vnde euenit, quæ maximè vniuersalia sunt elementa esse; quoniam etiam vnumquodque, aut eorum vnum, & simplex sit, in multis, aut omnibus, aut quamplurimis inest, & vnum & punctum (in Arithmetica, & Geometria) principium quibusdam esse videtur. &c. *Vide reliqua. Concludit*: Omnibus verò commune est illud cuiusque esse elementum, quod primum cuique inest.

Elementi significationes apud Aristotelẽ.

Elementa Geometrica quanã propriè?

Elementũ vniuersale & commune ad plura, &c.

B II. Pro-

II. Propositionum, ac Demonstrationum Geometricarum aliæ sunt elementa, aliæ elementariæ, aliæ neutrum. Elementa sunt (*inquit Proclus*) quorum consideratio ad aliorum pertransit scientiam, & ex quibus dubiorum, quæ in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio. *Deinde addit similitudinem grammaticorum elementorum, quam habes ex Aristotele. Mox idem Proclus:* totius Geometriæ sunt quædam theoremata principalia, & ad ea, quæ sequuntur principij rationem habentia, & ad omnia spectantia, quæ elementa appellant. Elementaria verò sunt quæcunque ad plura se extendunt, & simplicitatem quandam, atque suauitatem habent, non tamen eiusdem sunt dignitatis, cuius elementa; eo quod eorum contemplatio ad omnem scientiam communis non est. Quæcunque denique neque extensam in multitudinem cognitionem habent, nec porrò scitum quicquam, atque elegans patefaciunt, hæc cadunt etiam extra elementariam vim.

In Geometria quænã elementa.

Quænam elementaria.

Quænam neutra.

III. Peculiarem, ac geminam elementi vim, ac denominationem sibi vindicant hæc Euclidis elementa, quia, præter dicta, sunt peculiariter sibi ipsis mutuo elementa. Nam vt aiebat Menechmus apud Proclum: Quod confirmat eius, quod confirmatur, elementum est vt primum apud Euclidem secundi, quintiq; quartum. Sic porrò multa quoque inuicem alterum alterius elementa esse dicentur, mutuo enim confirmantur. *Paullo post:* Non omne omnis elementum vocabitur, verum ea, quæ principalissima sunt eorum, quæ in rei effectę ratione sunt constituta.

Elementa Euclidis his Elemẽta.

Sine elementis litterarijs impossibile est vel legere, vel loqui: pariter sine cognitione, & familiari, atque creberrimo vsu Geometricorum horum elementorum nemo vnquam fiet Mathematicæ Philosophiæ peritus.

Impossibile mathematicas discere sine hisce elemẽtis.

IV. Cardanus lib. 16. de subtilitate: Euclidis sunt duæ præcipuè laudes, inconcussa dogmatum firmitas libri elementorum, perfectioq; adeò absoluta, vt nullum opus huic iure comparare audeas. Quibus fit vt adeò veritatis lux in eo refulgeat, vt ij soli in arduis quæstionibus videantur posse verum à falso discernere, qui Euclidem habeant familiarem.

Nullũ opus humanarũ scientiarũ comparandum hisce elementis.

Elementares propositiones, ac demonstrationes à varijs olim inuentas collegerunt, & concinnarunt olim aliqui. Hypocrates Chius, Leon discipulus Neoclidis, Theudius Magnes, Hermotimus Colophonius. Quibus successit Euclides anterioribus in elementaria institutione merito prælatus. Qui, vt refert Pappus Alexandrinus in proloquijs ante librum septimum Mathematicarum collectionum, dedit ope-

Quinam antiquorũ Geometriæ elementa contin[uarint].

operam discipulis Alexādriæ longo tēpore, ex quo adeò excellentem in Mathematicis habitum est assecutus, neque vsquam deceptus est. *Proclus lib. 2. cap. 4.* Euclides elementa collegit, & multa quidem construxit eorum, quæ ab Eudoxo multa verò perfecit eorum, quæ à Theęteto reperta fuerāt. Ea pręterea, quę à prioribus molliore brachio ostensa fuerant, ad eas redegit demonstrationes, quæ nec coargui, nec conuinci possunt. *Idem cap. 5.* Præcipuè verò circa Geometricam Elementorum institutionem eum quispiam admirabitur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa distribuit; etenim non ea assumpsit omnia, quæ poterat dicere, sed ea duntaxat, quæ elementari tradere potuit ordine: Adhuc autem omnis generis syllogismorum modus, alios quidem à causis fidem suscipientes, alios verò à certis notis profectos, omnes autem inuincibiles, & certos, ad scientiamque accommodatos. *Proclus item lib. 2. cap. 7. vbi enumerat conditiones, quæ requirūtur ad perfectam elementarem Geometricam institutionem, nempè vt superflua non habeat, vt necessaria non omittat, perspicuitatem, & breuitatem, vniuersalitatem, &c. omnia ea præ alijs in Euclide præcellere ostendit, quia dum aliqua omittere videtur, ea vel sunt consectaria, quæ facilè deducentur ex demonstratis, vel aliena ab elementaria, faciliq; institutione &c. Ramus lib. 3. Schol. Math.* Nullus paralogismus, nulla pseudographia in totis elementis Euclidis, nobis quanquam seuerè inquirentibus, animaduerti potuit. Quam laudem singularē esse profiteor, quanque nulli adhuc neque Grāmatico, neque Rhetori, neq; Logico concedere potui, vt in Grammatica, Rhetorica, Logica nihil falsi docuisset.

Quod verò aliqui ausi sunt aliqua in Euclide caninè carpere, nihil officit firmitudini geometricæ. Nam Peletarius, ac nescio quis Alphonsus Molinensis Canus, & si qui alij mures, egregiè, ac doctè vapularunt cùm ab alijs, tum in primis à Io. Buteone, Clauio, & nuperà nostro Guldino, præsertim lib. 2. cap. 1. de centro grauitatis; vbi festiuè irridet Canum illum vtentem pro fundamentis suarum nouitatum præcipuis Euclidis propositionibus, quas deinde reprehendit. Adeo Geometricæ philosophiæ ignorantia sibi asciam (vt est in prou.) cruribus allidit dum Geometras antiquos Antistites temerè impetit.

V. Hæc verò Geometrica elementa esse illa ipsa olim ab ipso Euclide concinnata, & perfecta, nec esse post Euclidem à Theone mutata, & ad nos aliter, quàm ab Euclide perscripta fuerant, transmissa, nos euidenter confirmamus ad 22. propos. inferius, in loco. Ibi vide.

Nos hæc nō solum explicamus, & ornamus, sed etiam confirmamus.

Propter prædicta nos Elementa Geometrica Philosophiæ Mathematicæ ornaturi, & ad vsus traducturi, hæc ab Euclide concinnata præ alijs aliorum, si quæ extant, habuimus, & selegimus. Ea confirmauimus, vbi alij nimium sibi placentes infirmare conati sunt, atq; effecimus, vt appareret non temerè discedēdū ab ijs Authoribus, quos consequētium Mathematicorum Philosophorum ingeniosissimi quiq; per longam sæculorum seriem & admirati, & irrefragabilium Præceptorum loco sunt venerati.

Interpretatione fidā græci Autographi sequimur.

VI. Ac vt Euclidem, licet latinum, græca tamen Autographi fidei quam proximum haberent Geometrici Tyrones, missis, & laudatis aliorum paraphrasticis versionibus, Euclidem hìc ipsum exhibuimus. Relege quæ huc faciunt in præfatione interpretis posita mox post nostra hæc Prolegomena, & alia quæ habebis apud nos ad aliquas libri primi vel definitiones, vel prępositiones, vbi Euclidianis ipsis verbis adhæremus, ne nobis, atque alijs fucus aliquis fiat, & in hoc Aerario Mathematico vitiatæ aliquid monetæ pro syncera supponatur.

Hactenus in hoc 4 cap. indicata ideò sint, vt tyronibus cōstet inscriptio necessitas, ac dignitas elementorum Geometricorum; atq; etiam vt videant qui Mathematicarum scientiarum scientes non sunt, non esse Philosophiæ Geometricæ elementa puerilia. At enim Pueri olim Mathematicas docebantur. Audi in sequenti capite puerili obiectioni viriles à Philosophis responsiones.

CAPVT V.

An pueri Philosophiæ Mathematicæ apti. Loci Aristotelici eam in rem vera interpretatio. Ordo scientiarum discendarum. Muscæ ageometricæ, & misastronomicæ contemptim abactæ.

Geometria Philosophiæ humanarū scientiarum subtilissima.

CArdanus lib. 16. de subtilitate. Nihil mirum Geometriam esse omnium scientiarum subtilissimam, quæ cum tamen à manifestissimis initium ducat, meritò ansam præbuit, vt prima omnium etiam pueros doceretur. Mirum est quam breui ex apertissimis ad obscurissima trahat, & ex humilli-

millimis in altiſſima ſtatim aſſurgat. *Vt quiſq; ingenioſiſſimus fuerit experietur in demõſtrationibus Geometricis non eſſe ludum puerilem, ſed opus eſſe acerrima mentis intelligentia, vt adſtrictas, & crebras, & acutiſſimas in ijs illationes, conſequentias, inopinatas, & abditas veritates perſpiciat, conferat, penetret, &c. Quod non eſt puerorum. Irridendi ſunt qui vix aliqua Geometricæ Philoſophiæ principia libarunt, & ex paucis, & facilioribus de cæteris pluribus, & reconditioribus cenſent, & ſcientiam omnium ingenioſiſſimam paruifaciunt, quaſi nimis apertam, ac facilem, ac ſe putant tridui ſtudio Mathematicos Philoſophos futuros. Non ſecus ac ſi quiſpiam Architecturæ ignarus ex angulo, vel ex parte aliqua veſtibuli putet ſe vniuerſam Prætorij ſymmetriam percepiſſe, ſeque continuò arbitretur Architectum. Eſto, poſſent facilè Mathematicas conſequi ſcientias, non tamen poſſe, ſed actu, ac re ſcientiam poſſidere ſcientem efficit, & in honore habendum præ ijs, qui actuali, vel habituali ea ſcientia ſunt deſtituti. Sunt in Geometrica Philoſophia aliqua, in quibus demoſtrandis per plura ſæcula caſſo labore deſudarunt mirißima hominum ingenia. Vide ſpecimen inferius ad propoſ. 9. lib. 1. Euclid. Circa ea experiantur ingenium, qui ſe mirantur, profectò alas ſubmittent.*

Ex apertis breui ad recondita ducit.

Nõ eſt puerorum geometrice philoſophari.

Non poſſe, ſed actu ſcire laudabile, & honorificum eſt

II. Habes ex antedictis vnde veram interpretationem afferas verbis Philoſophi, dum in 6. Moral. Nicom. cap. 8. affirmat. Iuuenes, licet Geometrici, & Mathematici, atque in eiuſmodi rebus ſapientes euadant, prudentes tamen euadere non videntur. *Et paullo poſt quos iuuenes appellauit, de ijs quærit.* Quid eſt quòd puer fieri Mathematicus poteſt, ſapiens, aut naturalis non poteſt? *Cauſam affert ab experientia, quæ requiritur in naturalibus, & moralibus, cuius experientiæ habitus non acquiritur niſi lõgo rerum vſu, quo caret ætas vel iuuenilis, vel puerilis. Itaque puerum ibi Ariſt. appellat iuxta quod paullò ante appellarat iuuenem. Atque intelligendus eſt iuxta citata è Cardano de apertioribus principijs, & facilioribus demonſtrationibus Geometricis, ceù paullò ante prædiximus. Ad quẽ Philoſophi locum verba D. Thomæ ſunt, quæ docent ordinem docendarum, & addiſcendarum ſcientiarum. Quem ordinem noſtra Societas, ac Religio prudenter ſequitur. Ac vide, Lector, ne te fallat in D. Thomæ verbis verbum* imaginationis, *quod vſurpat non ſolum in Mathematicis, ſed etiam in Phyſicis, atq; intellige vehementem animi erga obiecta ſcientifica apprehenſionem vnà cum perſpicaci, & acutiſſimo (præſertim in Mathematicis) animi motu ad inferendum, deducendum, concludendum, &c.*

Vera interpretatio Ariſt. cur affirmarit pueros aptos ad ſciẽtias Mathematicas.

Imaginatio quid ſignificet in rem noſtrã.

III. Erit

Ordo scientiarū apud nos confirmatus à D. Thoma.

Sine Logicis Mathematica ne adeunto.

III. Erit ergo *(ait Doctor Angelicus)* congruus ordo addiscendi, vt primò quidem pueri Logicalibus instruantur, quia Logica docet modum totius Philosophiæ. Secundò autem instruendi sunt in Mathematicis, quæ nec experientia indigent, nec imaginationem transcendunt. Tertiò autem in naturalibus, quæ etsi non excedunt sensum, & imaginationem, requirunt tamen experientiam. Quartò in moralibus, quæ requirunt experientiam, & animum à passionibus liberum. Quintò autem in Sapientialibus, & Diuinis, quæ transcendunt imaginationem, & requirunt validum intellectum. *Huic ordini tete appara, mi Tyro; ac nisi per hosce gradus scietiarum ad Deum ascendas, frustrà laboras.*

IV. Antequam caput hoc claudam non possum non muscas aliquas saltem per contemptum abigere, ac sunt nescioquæ mimica, & iniuriosa scommata Philosophis indigna, digna scurris de triuio, dum nescio qui blaterant ex Platone Mathematicos somniare, nescio qui verò alij non metiri, sed mentiri. Possent enim hæc ficta somnia, & scurriles istæ mentitiones in ipsos verè, ac serio regeri. Videant (nec ex auditu obloquantur) Platonem in 7. de Rep. qui apertis verbis asserit, Mathematicam, licet vltra Physica eleuetur, si comparetur cum Theologia, ipsam etiam quodāmodo somniare. Vide & Ficinum citatum in antecedentibus ad eum librum. Vtinam verò potius dixissent quod vulgo: Quantum metitur Astronomus, tantùm mentitur Astrologus, *scilicet è grege Genethliacorum publicis legibus sæpius proscriptorum. At hi non Apes Mathematicæ, sed fuci sunt, qui credulis fucum faciunt. Vide sub finem præfationis ad Lectorem initio Tomi prioris nostrorum Apiariorum etiam nescio quos iocos Senecæ in Mathemata, sed iocosè pariter, imò seriò à nobis irrisos.*

Mathematicas somniare quid sit apud Platonem.

Metitur Astronomus, mentitur Astrologus.

Calumnias verò in Mathematicam Philosophiam repulsatas, & quomodo ea sit humanarum scientiarum contemplatiuarum potissima, & omnia causarum genera, atque alia possideat ad perfectissimam scientiam spectantia vide apud præcessorem meum Blancanum post interpretationem locorum in Aristotile Mathematicorum vbi de Mathematicarum scientiarum natura exemplis in primis ex ipsa Geometrica philosophia prolatis.

Calumnia in mathematicas scientias vbinā egregiè, & copiosè repulsata.

V. Appono huc in rem verba Doctoris Ruffeni Astronomicarum prædictionum peritissimi, qui quadam in dissertatione disertè scribit in hunc modum.

Licet Mathematicarum scientiarum species aliquæ, quas mixtas appellant, dum geometricas demonstrationes applicant Physicis materijs, præsertim à nobis remotioribus, quales sunt subliniores, ac

cæle-

cæleſtes, aliquando phyſicæ ipſius materiæ, non geometricæ formæ vitio, tantillum recedere videantur ab infallibili illa certitudine, qua pollet in primis Philoſophia pure Geometrica; tamen Mathematicæ ſcientiæ ſic etiam mixtæ gradum eum certitudinis poſſident, quem reliquæ humanarum ſcientiarum non facilè attingant. Teſtes ſint circa cæleſtia miræ illæ (præter cætera) prædictiones eclypſium, & aliarum effectionum, ac poſitionum, quibus cæleſtia luminaria & ſingulis momentis obnoxia ſunt, & per infinitam ſæculorum ſeriem numquam fallentia progrediuntur. Quas res verè ſublimes infallibili ſcientia compertas, vt habent, non haberent Aſtronomi, niſi cæleſtium globorum motus omnes, anomalias, parallaxes, vera loca, veras diſtantias, veras diametros, & plura alia certis arithmeticæ ſcientiæ ſupputationibus, & firmiſſimis Geometricæ Philoſophiæ demonſtrationibus munita poſſiderent. Quænam igitur eſt iſta neſcio quorum tanta hebetudo, vt non intelligant non poſſe tam certò præcognitos effectus; niſi à certiſſimis infallibilis ſcientiæ cauſis prodire? Hoccine (vt ignorantia Mathematicarum ſcientiarum oblatrat) eſt coniecturis vti circa cæleſtia. Si vel nomina ipſa primorum elementorum Mathematicorum ignorant, ſi neſciunt diſtinguere inter phyſicas hypotheſes, & Aſtronomicas concluſiones, quid audent blaterare contra reconditiora ſcita, & demonſtrationes, quarum admirandi, ac certi effectus in excelſo cælorum theatro vniuerſis mortalium oculis longè, latèq; pateſcunt? Diſcant antequam temere hiſcant contra ea, quæ etiam dum publicè vident non intelligunt; ac ſciant ijs, quæ obijciunt deberi non reſponſionem, ſed contemptum, quippe quibus apud ſcientes proditur non ingenium, ſed ignorantia earum ſcientiarum, quibus obganniunt. At benè quod iſti dum non dubitant, aut quærunt vt diſcant (quod eſſet ferendum) ſed in alienis rudes arbitri prorſus inepta ingerunt, & ſcriptitant de ijs, quæ non didicerunt, ſemetipſi exponunt publicis omnium ſæculorum irriſionibus. Quæ merito debentur ijs, qui Aſtronomicarum prædictionum, & concluſionum effectibus ipſis comprobatarum certitudinem negare nō poſſunt, negare tamen audent certitudinem mediorum ingenioſſimorum, ab ipſis negatoribus ignoratorum, quibus Aſtronomi ſuos illos in fines mirificos tendunt.

Mathematicæ etiam mixtæ certiores ſunt, quam reliquæ diſputatoria Philoſophia.

Nec intelligunt Aſtronomicæ philoſophiæ ignoratores varietatem aliquam circa dimēſiones aliquas aliquando eſſe à vario genere partialium menſurarum, quibus alij minutioribus, alij amplioribus vtuntur, ac in idem tendere plures minutiores, & pauciores ampliores; atque in tanta globorum, & diſtantiarum immenſitate inſenſibi-

Varietas apud aliquos Aſtronomos nihil officit

lem

lem esse eam varietatem, nec quidquam obesse, quo minus Astronomi certo assequantur admirandas in cęlis effectiones. Sed quid ego hic in tanta cælestium luminarium, & veritatum luce cæcutientibus frustrà collyrium impendo? Apage tandem illos ἀμαθᾶς.

Cæcis frustra collyria.

Acutè Doctor Roffenus vsus est verbo: Obganniunt. Gannire Vulpium est proprium. Vulpina quædam ingenia destituta cognitione, atque ornamentis Mathematicarum scientiarum, earum cognitionem, ac dignitatem scurrilibus, & fucatis oppositionibus nituntur etiam apud alios imminuere, vt priuatam ignorantiæ notam plurium numero vel tegant, vel solentur; vulpeculæ olim exemplo, quæ in furto deprehensa, & caudæ mutilatione mulctata in cæterarum vulpiũ cœtu suadere singulis caudæ mutilationem nitebatur. &c. ὁ μῦθος δηλοῖ. &c. *Addo ab eodem Doctore Roffeno sequentia.* Meminerint Mathematicarũ irrisores, qui sine cognitione Geometricarũ demonstrationum philosophantur, id quod memoriæ proditum est de magno illo Xenocrate philosopho tertio post Platonẽ Academiæ Principe. Cuidam enim Mathematum, ac Geometriæ ignaro gymnasium ingredienti, *Abi, inquit,* λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας *.i. ansas .n. Philosophiæ non habes.* Sine ansis vas apprehendi non potest, sine scientia demonstrationum demonstratiuè, hoc est scientificè, ac firmiter in scientijs humanis philosophari non licet. Qualis igitur illa nescio quorum irrisorum philosophia est, quę ansis, ac brachijs firmitudinis obtruncata, & contentiosa incertitudine mutilata, irridere tamen audet eam Philosophiam, quæ tota innumeris, ac certissimis demonstrationibus Geometricis ansata est? *Prædicta Roffenus tantùm iniuriosis irrisoribus. &c.*

Vulpinus astus ignorantiæ mathematicæ.

Qui caret mathematicis scientijs est sine ansis Philosophiæ.

CAPVT VI.

De Abstractionè Geometrica. Eius vsus, & ab ea propugnaculum in vniuersa Philosophia Mathematica.

Materia Mathematica intelligibilis.

I ARist. *metaph. lib. 7. cap. 12.* Materia quędam sensibilis, quędam intelligibilis, sensibilis quidem vt ęs, & lignũ, & quęcunque mobilis materia. Intelligibilis verò quę in sensibilibus existit non prout sensibilia, vtpotè ipsa Mathematica: *Lib. 13. cap. 3.* Quemadmodum vniuersalia in Mathe-

thematicis non sunt de separatis præter magnitudines, numerosque, verum de his non quatenus talia vt magnitudinem habeant,aut diuisibilia sint,patet quod etiam de magnitudinibus sensibilibus rationes, & demonstrationes sunt, verum non prout sensibiles, sed prout tales sunt. *Paullo post :* Prout superficies tantum, & prout longitudines tantum , & quatenus diuisibilia , & quatenus indiuisibilia situm habentia , & prout indiuisibilia tantum . *mox :* Geometria si accidit sensibilia esse quorum est , non est autem eorum , prout sensibilia sunt ; non erunt sensibilium Mathematicæ scientiæ , neque profectò circa hæc , alijs separatis . *Paullo post* : Prout longitudines solùm, & prout superficies, & quantò de prioribus ratione, ac simplicioribus tātò magis id certitudinē habet. *A puris ad mixtas transfert exemplum* : Eadem ratio de Harmonica,& Perspectiua.Neutra namque prout visus, vel prout vox speculatur, verùm prout lineæ, & numeri : at hæc propriæ illorum passiones sunt : Mechanica quoque similiter .

Mathematica circa sensibilia no vt talia versantur.

*Animaduertendum est, ac notandum , atque intelligendum subiectum, & obiectum Geometricæ Philosophiæ in aliquibus citatorum verborum Aristotelicorum:*Prout superficies, longitudines,&c.quatenus diuisibilia, indiuisibilia, situm habentia tantùm &c.*Nam Geometrica Philosophia contemplatiua versatur circa quantitatem terminatam, seu figuratam abstractam , & circa eiusdem terminos, velut superficies,lineas,&c. E subiecti huiusce ignorātia ineptæ aliquorum in Geometricam Philosophiam blaterationes prodeunt . Quemadmodum etiam ignorantia Geometricæ abstractionis prodit ageometriam aliquorum temerè carpētium quæ non intelligunt præsertim in antiquis acutissimis Geometricis Philosophis , velut in Archimede; &c.*

Subiectum, & obiectū Geometricæ Philosophiæ.

II. Ipse verò Aristoteles ex prædictis à se infert primò : Quare si quis ab accidentibus separet,ac de eis aliquid quatenus talia sunt consideret, minimè propter hoc mentietur . Quemadmodum nec cum in terra describat, ac eam, quæ pedalis non est, pedalem dicat . Non .n. in propositionibus falsitas inest . Optimè verò ita vnum quodq; profectò considerabit , si quis separans ponat quod non est separatum, quod Arithmeticus , Geometraque facit. *Lib.1.poster.cap.10.* Neq; Geometra falsa supponit, quemadmodum quidam asseruere, dicentes quod non oportet falso vti . Geometram verò mentiri dicentem pedalem non pedalem , aut rectam descriptam non rectam existentem. Geometra verò nihil concludit eo quod hæc est linea , quam ipse locutus est, sed quæ per hæc ostenduntur .

Mathematice abstrahere nō est mentiri.

Infert secundo : Quare propter hoc non malè Geometræ dicent,& de entibus differunt, vt entia sunt. Duplex enim est ens, hoc quidem actu,hoc verò materialiter. *Itaque Mathematicarum materia,& obiectum & vera, & realia sunt. Videbis in prima definitione:* punctum est,cuius nulla pars est, *quia scilicet est materialiter linea prout actu in extremis terminata. Ipsius verò termini postremi, quà talis est, non sunt alij termini; & terminus non est diuisibilis in alios terminos. Hoc est quod definit Philosophus Geometra:* cuius nulla pars est, *per abstractionem philosophando circa lineæ entitatem prout in extremis terminatam.*

Puncti definitio per abstractionem.

III. Proclus Aristoteli consonè lib. 2. cap. 2. Qui in Phantasia est circulus, partibilis, figuratus, & plures, &c. Qui verò in sensilibus compositus, magnitudine distans,& certa ratione diminutus,ac ineptiarum plenus, ab immaterialiumque puritate longè deficiens. Geometria itaq; cum de circulo quidquam loquitur,atque diametro, deq; passionibus, atque effectionibus,quæ ad circulum spectant, vt de contactibus, diuisionibus, & de ijs, quæ huiusmodi sunt, non de sensilibus docet, aut differit (ab ipsis siquidem separare conatur) & vniuersale quidem ipsum considerat, sed illud,quod in imaginabilibus distributum est circulis. Et alium quidem intuetur, per aliumque eum, qui in cogitatione est, circulum contemplatur, circa alium verò demonstrationes facit.

Circulus materialis ineptus, intelligibilis perfectus,

IV. Ex vtroque antecedenti Philosopho confice duplicem esse Geometricam abstractionem, prima est circa quantitatem sensibilem, eam considerando quatenus terminata est, seu figurata, partibilis, proportionem, magnitudinem habens, &c. Altera abstractio totalis ab ipsamet sensibili quantitate ad idealem, & prototypã in anima: in ea figuræ, diuisiones, auctiones, contactus, geometricæ incommensurabilitates, asymptoti, & mira alia in Geometrica, & vniuersa Mathematica Philosophia. Idealis ea quantitas immunis,ac pura est ab omnibus materiæ sensibilis deficientijs. Quid quid igitur disputent contentiosæ Philosophiæ sectatores circa quantitatis sensibilis imperfectiones, ēt si probarent (quod non possunt) eam constare in minimis lineis, quæ nullam vlteriorem partitionum ferant, vel in ea fieri non posse contactum in puncto, & alia in controuersiam producerent, quæ ijs qui Philosophiam Mathematicam probè callent nullam pariunt dubitationem; tamen etiam datis,& nō concessis deficientijs, quas persequuntur, nihil inde tamen detrimenti, vel incommodi patitur quantitas Mathematica, & eius miræ effectiones. Nam eæ deficientiæ non attingunt quantitatem, & figuras prototypas, & idea-

Duplex præcisio, & abstractio Geometrica.

Quantitas idealis mathematica, &c.

Admiranda Geometrica Philosophia vera sunt in ideali, id est abstracta quātitate.

ideales in anima, in qua concepta quantitas eo ipso quod dicit in sui ratione essentiali habere partes extra partes, hoc ipso intelligitur diuisibilis in infinitum. Et sphæra animo concepta perfectè sphærica, in qua nulla pars non recedit à plano, & plano concepto perfectè plano, si perfectè sphæricum animo cōceptum per intelligentiam imponatur perfectè plano per intelligentiam concepto, contactus fiat oportet in indiuisibili. Ac pariter de ceteris, quæ admiranda demonstrant Philosophi Geometræ.

V. Ex hac felici, ac nobili Geometrica abstractione prodit certitudo, & firmitas scientiarum Mathematicarum, dum versantur in materia eleuata, & educta extra incertitudines accidentium, quæ quantitatem, & materiam sensibilem variè alterant. Ideò rectè Aristot. lib. 2. metaphysicæ in fine extremi capitis: Certitudinem sermonis Mathematicam non opportet in cunctis quærere, sed in his, quæ non habent materiam. Quare non est naturalis modus, tota enim natura fortè habet materiã, *scilicet sensibilem, à qua se se abstrahit Mathematica Philosophia ad idealem, ac prototypam interiorem in anima primò, ac vltimò, ac per se à Philosopho Mathematico intentam, vt mirifica de ea philosophetur, atque demonstret. Geometrici Philosophi est lineares suas theoricas figuras, diuisiones, ductus, ad definitã angulorum quantitatem reflexiones abstractè in materia sensibili sine paralogismo demonstrare. Quod si Physica materia propter aliquod accidens, siue propter latentem aliquem defectum (quæ res ad Geometricum Philosophum non spectant) vel non ferat, vel eludat effectum physicum, qui Geometricæ demonstrationi debetur, elusio illa Geometrico Philosopho ritè geometricè demonstranti non est imputanda, sed physicæ materiæ vel infirmitati, vel renitentiæ, quæ formam Geometricam non patiatur admitti. Sic Antiquorum Geometricorũ Philosophorũ authoritas, & geometricè demōstrata veritas de vstione in cẽtro speculi sphærici à radijs Solis reflexis nihil apud rectè sapientes imminuta est, etiam si physicum experimentum ostendat fieri ad quartam diametri partem. Quod experimẽtum tam facile, atq; in promptu quis dubitet non latuisse diligentiam Euclidis, ac veterum? Tamen ipsi persecuti sunt veritatem geometricam abstractam cõcursus radiorum omnium (quasi linearum reflexarum ad angulos æquales) in idem punctum centrale speculi. &c. Paria intellige de geometricè à nobis demōstratis circa vstorias Portæ lineas, quidquid futurum sit de physico experimẽto, quod est à Physico & executore debitum, non à Philosopho Geometra, dummodo ille ritè geometricè demonstrarit. Vide in fine Apiarij septimi.*

Certitudo mathematica in abstractione à sensibili materia.

Physicæ materiæ defectus nõ sũt imputandi Mathematicæ.

Exempla Geometricæ abstractionis. &c.

Quis vnquam experiatur miram illam Archimedis propositionẽ: Datum pondus data potentia mouere? *vel* : da vbi pedem ponam, & terram, cælumque mouebo? *Quarum propositionum demonstratio, & veritas geometrica pendet à diuisione vectis facta in infinitum per abstractionem geometricam in quantitate, & materia non sensibili, & exteriore vectis, sed interiore in animo, vbi datæ lineæ quantitas purè concepta in infinitum diuisibilis est, &c. iuxta antedicta in num. antec. præsertim 3. His appone admiranda alia paradoxa in Machinaria Philosophia. Quorum exempla vide in nostris Apiarijs, Apiario 4. Vide prædictarum veritatum circa abstractionem geometricam luculentum exemplum etiam in Theologica applicat. ad 36. propos. Eucl. inferius. Et ad definitionem anguli, vbi ellipticum vstorium speculum à Griembergero inuentum memoramus.*

VI. Ad magis, ac magis explicandam, intelligendam, confirmandam prædictam abstractionem Geometricam, in qua vnica vniuersum fundamẽtum est cognitionis naturæ Mathematicarũ scientiarum, & propugnationis earum, & repulsionis omnium sophismatum, quæ cõtra eas parit ignorantia huius geometricæ abstractionis, lubet apponere sequentia, quæ sunt quasi quædam species prædictæ geometricæ abstractionis. Proclus lib. 2. cap. 7. Quoniam contemplatio in ipsa abundat Geometria, quemadmodum effectio in Mechanicis, omnia quoque problemata contemplatione participant, non tamen contra. Prorsus namque demonstrationes contemplationis sunt opus, cuncta autem, quæ in Geometria post principia sunt, per demonstrationem sumuntur. Proinde theorema communius est &c. *& lib. 3. comment.* 5. Propriè in Mathematicis disciplinis problema vocatur quod ad contemplationem operantem proponitur. Quod namq; in his fit finem contemplationem habet, & sæpènumero quidem eorum etiam quæ fieri non possunt quædam problemata vocant. *Quæ postrema Procli verba valde notanda sunt. Habes autem ex allatis ab eo Mathematicarum scientiarum, in primis Geometricæ Philosophiæ finem primario, ac vltimo intentum esse theoriam, non operationem, aut praxim; theoriam, inquam, in sua illa abstractione, & versatione circa materiam, & quantitatem intelligibilem, &c. Vide huc Schol. 2. ad propos. 1. Eucl.*

Contemplatio abundat in Geometria, & Theorema cõmunius est, quam Problema.

Etiam in problematis Geometricis contemplatio finis est. Id etiam aliquãdo problemata de impossibilibus.

VII. Igitur abstrahit Philosophus Geometra etiã ab effectione solũ geometrica rei propositæ etiam in propriè appellatis problematibus, in quibus aliquid geometricè operandum proponitur. Theoremata intendit, & quærit, hoc est veritatis theoricæ, atque abstractæ cognitionem, & demõstrationem potius, quàm opus geometricum, vt decet contem-

templatiuam Philosophiam, quæ est Mathematica, & in primis præcipua eius species Geometria. Ideò ingeniorum Phœnix Archimedes in aliquibus de sphæra, & cilindro propositionibus demonstrãdis supponit circuli quadraturam iam inuentam. Ac verè inuenta est theorematicè, atque abstractè ab vsu, & operatione propriè problematica, ideòque potest inseruire demonstrationibus aliquibus theoriarum circa sphæram. Quidquid enim sit de modo quadrandi circulum, demonstrauit Archimedes cuius trianguli area sit æqualis area circuli, & quæ recta linea sit æqualis peripheriæ, propos. 1. de dimensione circuli, & 18 spiralium. Nec magno illi Geometræ vllum facessit negotium, quod non extet modus, ac proprium problema de operatione, qua ducatur recta tangens spiralem; abstrahit enim ab operationibus, & concipit animo rectam, quæ spiralem tangat (cuius theoriæ nulla, quà theorema est, est repugnantia) ex qua hypotesi theorematica prodit deinde demonstrata theoria areæ triangularis æqualis areæ circulari. Ex eadem tactione theoretica rectæ ad spiralem prodit theorica, & theoricè demonstrata diuisio anguli rectilinei in quotlibet partes æquales; quid quid sit de problematica diuisione spectante ad Geometriam practicam, ad quam etiam pertinet circuli quadratio propriè problematica, siue geometricè operatoria. Paria intellige dum idem Archimedes demonstrat aliqua de sphæra; quæ pendent ab inuentione duarum mediarum proportionalium. Supponit enim eas theoricè conceptas, & datas, quarum nulla est repugnantia, &c. vt dictum est de theorica hypotesi tangentis spiralem.

Archimedes vindicatus his, et inanimentis? tibus exemplis.

Quid si nobiscum fortasse senserit Archimedes (vt habes apud nos in extremo Apiarij nostri secundi) de problematica inuentione duarum med. proport. per aliqua instrumenta? non minus quam per circinum, & normam, & regulam ducuntur circuli, rectæ, &c. Vide cit. Apiar.

Nobiscum sentit Archimedes de inuentione duabus medijs proportionalibus.

VIII. Abstrahit Philosophus Geometra non solum à quantitate sensibili, & ab operatione etiã problematica geometrica, sed abstrahit etiam à possibili (vt rectè Proclus) siue in geometrica operatione, siue in materia sensibili. Siue enim sint possibiles, siue impossibiles problematicæ, atque operatoriæ inuentiones vel quadrationis circuli, vel inuentiones duarum med. proport. siuè etiam sit impossibile in materia Physica quodlibet maximum põdus qualibet minima potentia mouere, siue in catoptricis etiam impossibilis esset vstionis effectus &c. nihili facit eas impossibilitates theoricus Geometra, & abstrahit ab effectu, & transfert se ad theoricã geometricam de ijs geometricè demonstratam veritatem, vt prædictum est in anteced. nu. 6.

Abstrahit Geometra philosophus etiam à possibili.

IX. Abs-

Abstractio Geometrica à vero, vel possibili loco.

IX. Abstrahit præterea etiam à loco, & ab impossibili Physico exercendi operationes aliquas geometricè informatas in loco opportuno, vt ritè geometricè, ac à veritate nō discrepātes fiāt. Nam Astronomicæ, ac Gnomonicæ operationes fiūt extra locū, vbi essent exercēdę. Astronomicæ.n.deberēt fieri in cētro terræ, siue vniuersi, quod punctū deberet esse commune centris Astronomicorum instrumētorum; Gnomonicæ verò deberent fieri circa centrum terræ in tanta ab eo distantia, quanta est Gnomonum horariorum longitudo. In vsibus etiam Planisphęrij, siue Astrolabij non solum organici, sed & purè geometricè vsurpati per ductus geometricos arcuum, circulorum, linearum circino, regula, & norma in singulis operationibus, fit abstractio à vero, & debito operationibus loco, & plana cartacea, & figuræ illæ supponunt pro cælestibus circulationibus, & interuallis, fitq; abstractio ab ijs ad imaginata (cum fundamento in re) in anima, & ad prototypa in Cælis. Abstractio verò illa à vero loco operationum distante per interuallum totius terræ diametri, vel semidiametri nihil incommodat problematibus, & praxibus Astronomicis, & Gnomonicis, quia & Astronomi ingeniosè corrigunt differentiam semidiametri terræ, dum anguli ad terræ centrum quantitatem assequuntur, &c. & Gnomonicis terræ moles præ immensa distantia superiorum Cęlestium luminarium nullam sensibilem facit differentiam. Quod geometricè à nobis confirmatum habes initio Apiarij nostri Gnomonici, vbi de terræ puncto, ac nihilo.

Geometricus Philosophus abstrahit ab errore non sensibili.

Iuxta abstractionem Geometricam hactenus à nobis expositam lege inferius ex Proclo, & è Griembergero ad primam propositionem Euclidis quæ habes de Theorematibus, & Problematibus in abstractione Mathematica acceptis, quæ nobis & consonant, & mirificè fauent.

X. Igitur Mathematici Philosophi Geometrici circa physicas materias aliquādo philosophantes habent ab hac multiplici, & nobili, & felici abstractione munimētum inexpugnabile, quo sese tuto recipiāt, & eludāt, & irrideant sophismatum tela, quæ tam nobilis, atq; admirandæ Philosophiæ ignorantia irrito conatu ausit intendere. Ac memento, mi tyro, moniti Aristotelici in libello aureo contra lineas insecabiles, siue contra opinionem de quantitate constante ex indiuisibilibus: Absurdum est quempiam præ ignauia succumbere, propter quod non audeat oblatas argumentationes dissoluere, atque sic imbecillitatem suam fouendo grauioribus insuper fallacijs se decipere. &: Mathematicorum scita multo magis ab omnibus concessa sunt, quam istorum dicta. & : Quæ Mathematici demonstrant, atque addiscenda

Ab Aristotele scutū contra sophismata etiam non soluta. Immutabilis ascita mathematica geometricè demōstrata.

propo-

proponunt mutare non decet, nisi probabiliores rationes habeamus. *Quid autem possit esse probabile, quod sit contra veras demōstrationes geometricas? Sed nimirum intelligēdæ sunt, ac discēdæ antequam contradicendæ, nec temeraria contradictione velanda est vel hebetudo intelligentiæ, vel ignorātia scientiæ humanarum omnium acutissimæ, ac certissimæ. Hactenus ante vestibulum sat morarum traximus: accedamus, & primum gradum faciamus in Aerarij Mathematici primum ostium iam securi hostium.*

Ante intelligēda, quā cōtradicēda Geometrica demōstrationes.

ELEMENTORVM GEOMETRICORVM

LIBRI SEX PRIORES

Noua interpretatione ex græco fonte in vſum ſtudioſæ iuuentutis in lucem dati

A Ioanne Lanz Societatis Ieſu.

Interpres candido Lectori.

DVas Matheſeos alas eſſe recte ſcripſit Plato, Geometriam, & Arithmeticam. hac poſteriore cùm vtcunq; inſtructa iam ſtudioſa iuuentus videretur, ſupererat vt eádem & priore inſtrueretur. Itaq; cùm de habenda aliqua Geometricorum Elementorum Epitome cogitationem ſuſcepiſſem, nihilq; melius ipſo ſummo Geometra Euclide in mentem veniſſet; cœpi ſollicitus & mecum ipſe,& cum alijs quoq; communicato conſilio deliberare quemnam potiſſimum ex tanta interpretum turma, quamque adeo in vniuerſum rationem Euclidis publicãdi deligerem. Mens vna fuit omnium iuuentutem nimia libri mole non eſſe grauandam. Recidenda ergo neceſſario fuerunt primùm ſcholia, & commenta-

tiones alienæ, quibus plerique dum ingenio suo indulgent maximè, minimè nobis Euclidem ipsum repræsentarunt. Tum deinde quoniam vix aliqua apparebat tam religiosa interpretatio, quæ non ab Authore, si sua lingua loquentem audias, licentiùs subinde recederet; optimum factum videbatur si in Latinum sermonem deintegro conuerteretur. Ad eam ego prouinciam postquam aggressus fui, illud antiquissimæ curæ habui, vt quamlibet simplici dictione genuinam demonstrationum sententiam ex Græco prorsus exprimerem, sed pro instituta breuitate verbis sic appēsis, vt longiorem alicubi circumductionem paullo breuiori gyro colligerem. Posteriores tamen libri quinti propositiones, quoniam in Euclide desiderantur, fraudi non erit earum loco Pappi Alexandrini ex commentarijs Federici Commandini substituisse. Quin ad difficiliores etiam definitiones breuiculas notas eo consilio apposui, ne in ipso statim limine aut hærere Lector, aut aliunde subsidium petere cogeretur. Deniq; nonam, & decimā propositionem libri decimitertij idcirco adieci, vt si quis Triangulorum Canonem, hoc est, Tabulas Sinuum, Tangentium, & Secantium aut condere, aut conditas à Typographorū non infrequentibus mendis vindicare cuperet, id libelli huius auxilio posset. Vale Lector, & his laboribus nostris ad Dei gloriam vtere.

LIBER PRIMVS ELEMENTORVM Geometricorum ex Græco fonte.

DEFINITIONES.

§. I.

SCHOLION.

Definitionum Geometricarum prestantia. De ijs aliqua notata. Perfectissima Geometricæ Philosophiæ methodus.

I. *CAue putes, Tyro, definitiones Geometricas, vt quidam pravè arbitrati sunt, esse quasdam nominum notiones. Definitionum harum Geometricarũ aliæ sunt quæ nominis, & rei essentiam indicant, aliæ quæ solam rei essentiam. Aliæ sunt quæ rei causam explicant. Primæ, ac secundæ formales, tertiæ causales appellantur. Omnes ad perfectas demonstrationes requiruntur. Exempla formalium, & causalium suis locis aliqua indicabo ad aliquas definitiones. Causalis tamen hìc appono id exemplum, quod est in Arist. lib. 2. de ani. tex. 12. vbi affert quadraturæ circuli, siue datæ figuræ duplicem definitionem. Formalis est :* Tetragonismus est effectio quadrati æqualis datæ figuræ. *Causalis:* est inuẽtio mediæ proportionalis. *Quia (vt videbis ad 14. propos. lib. 2. & in lib. 6.) inuentio, siue inuenta media proportionalis effectrix est quadrati æqualis datæ figuræ.*

Definitionũ Geometricarum variæ formæ.

Exemplum formalis definitionis Geometricæ in Aristotele.

Exemplum causalis.

II. Hinc videas Philosophos Mathematicos, vt scientiam pariant,

Mathematicæ procedunt à notioribus nobis, & naturæ.

procedere pulcherrimo ordine à notioribus nobis, & natura, contra quàm Physicus, & aliæ scientiæ, vt optimè animaduertit etiam noster Toletus quæst. 4. secundi Physic. Ex quo inferius audies ad primam demonstrationem huius libri primi Eucl. Progrediuntur igitur Pilosophi Geometrici à notioribus nobis, quia prius manifesta est tota figuræ essentia ex definitione ipsius præmissa, ignotis adhuc ipsius affectionibus; à notioribus natura, quia prius natura est subiecti essentia, quàm affectiones ab ea manantes.

III. Ante singulos libros Elementorum suorum Philosophus Geometra proprias earum figurarum, siue affectionum definitiones præmittit, de quibus philosophaturus, & demonstraturus est. Hic autem ante primum hoc elementum post definitiones eius proprias, præmittit etiam postulata, & axiomata vniuersæ Mathematicæ Philosophiæ communia. Quibus præmissis facilis deinde via præstruitur demonstrationibus, vt sine impedimento, vel mora mirifica theoremata, affectiones, & effectiones prodantur. Cōmuni nomine suppositionum appellantur definitiones, postulata, & axiomata, quæ demonstrationibus præmittuntur. Quid verò inter se differant videbis cum ad postulata, & ad axiomata ventum erit. Scientiæ igitur Mathematicæ recto, & perfecto ordine primò principia, deinde quæ prodeunt ex principijs, idest demonstrationes, & earum conclusiones exponunt; primò quæ simplici tantum egent, ac breui expositione vt cognoscantur, & in assensum admittantur, deinde quæ ab expositis per ratiocinationem demonstratiuam educuntur.

Suppositio commune nomē definitionibus, postulatis, axiomatibus.

IV. Circa verò hasce Geometricas definitiones ineptè quispiam tyro disputaret, quasi essent propositiones probandæ, ac demonstrandæ. Definitiones enim geometricæ tamquam hypotheses supponuntur, & ex condicto inter discentem, & docentem admittuntur. Nam exponunt, & exponunt quid rei significetur nomine, verbi gratia, circuli, puncti apud Geometricos Philosophos, quid sub nomine anguli recti, &c. in definitionibus libri tertij, quid sub nomine similium circulorum, &c. in definitionibus libri quinti, quid rei significetur in rationibus illis perturbata, permutata, conuersa, diuisa, &c. Quid rei significetur sub nomine proportionis; quid habere inter se proportionem; Quid eandem, vel maiorem, vel duplicatam, &c. In definitionibus lib. 6. quid rei significetur sub nomine proportionis compositæ, &c. Itaq; aperta, & apta sciētiæ (pro qua sunt definitiones) expositione, atque intelligentia absoluuntur, ijsq; animus ad theorias demonstrationum apparatur.

Ineptè disputatur de definitionibus Geometricis.

Defin. I.

I.

Punctum est cuius pars nulla.

§. II.

SCHOLION.

Geometrica definitio puncti explicata, & confirmata.

Duplex puncti definitio apud Euclidem.

1. EVclides *in* 1, *&* 3 *definitione dupliciter puncta definit. primo :* Cuius nulla pars est. *Secundo :* Lineæ termini sunt puncta. *Prima definitio est de puncto absolutè, secunda de puncto relatè ad lineam, cuius est terminus, siue negatio lineæ vlterius extensæ. In vtraque definitione negationem inuoluit, & abstractione Mathematica vtitur Geometra ad concipiendam puncti geometricam essentiam, ac naturam. Recole dicta num. 2. in cap. 6. Proleg. Proclus, præter plura alia ex omni genere philosophicæ eruditionis petita, maximè ad rem habet sequentia.* Solum pũctum iuxta Geometricam materiam partitionis est expers. Et puncti ratio, licet apud alium imperfecta sit, in præsenti tamen scientia perfecta est. Siquidem Medicus quoque corporum elementa esse ait ignem, atque aquam, hisque similia; & ipsorum resolutio ad hæc vsque progreditur. At naturalis Philosophus ad alia, quæ his simpliciora sunt, transit. Et ille quidem Elementum definit simplex, quod ad sensum; hic verò simplex quoad rationem, & vterq; rectè quoad propriam scientiam. Neque igitur puncti definitionem peccasse putauerimus, neq; imperfectam ipsam posuerimus. Nam quoad Geometricam materiam, eiusque principia sufficienter tradita est. Hoc siquidem ipsi tantum deest, quoniam clarè non ait: Quod impossibile apud me punctum est; meumque principium, & simplicissimum nil aliud est, quam hoc. Et ita conuenit, Geometra dicente, audire.

Explicatio definitionis de puncto.

Hæc Procli verba si rectè percipiantur, & applicentur, mirè elucidant Geometricam pũcti definitionem. Corpus partibile est in longũ, latum, & profundum; superficies partibilis in longum, & latum; linea in longum solùm; punctum neq; in longum, neq; in latum, neque

in profundum est partibile, per abstractionem Mathematicam; & apud Geometram est id, Cuius nulla pars est.

Atque hoc est meum elementum, ac primum principium, inquit Geometra, à quo figuræ omnes planæ, ac solidæ profluunt. Nam, vt quidam aiunt, puncti fluxus per Mathematicā apprehensionem (non per abstractionem) producit lineam, lineæ ductus in latus superficiem, superficiei motus secundum latitudinem sursum, vel deorsum producit corpus solidum, vt in sequentibus etiam magis explicabitur.

Aptè per negationē definitur punctum.

II. Quam verò aptè Euclides definitionem puncti expresserit per negationem docet idem Proclus: Euclides itaque à partium negatione principium nobis declarauit ad totius sibi subiectæ naturæ considerationem. Negatiuæ namque orationes principijs conueniunt, quemadmodum nos docet Parmenides, qui primam, vltimáq; causam solis negationibus tradidit. Omne siquidem principium diuersa ab eis, quæ scatent à principio, constat essentia: Et horum negationes illius nobis patefaciunt proprietatem. Quod enim horum quidem est causa nihil autem horum est, quorum est causa, huius modi Doctrina perspicuum fit.

Vsus abstractionis Geometricæ in definitione pūcti.

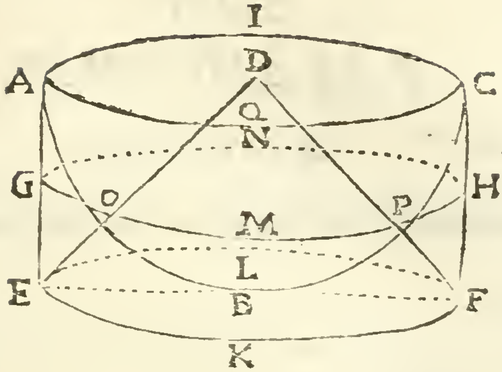
Habes in hac Euclidis de puncto definitione specimen Mathematicæ abstractionis. Punctum enim Physicum esto sit diuisibile, at punctum Mathematicum in pura Mathematicæ abstractionis idea à partibus abstrahit. Abstrahentium verò, inquit Philosophus, non est mendacium: Vide & Schol. vltimum ad defin. 7. Est hæc solum definitio puncti, non autem & nominis notio, qua punctum à pungendo dicitur, quasi quedam styli, vel calami punctura in membrana, vel carta, vel tabella, &c. In sequentibus definitionibus aduerte tu, mi Tyro, alias etiam, quæ non nominis notionem, sed rei Mathematicam naturam, essentiam, & rationem explicant.

§. III.

PARADOXVM

De puncto, quod est æquale lineæ, quin & maius linea.

Finge in cilindro hemisphæricum scaphium, siue excauatam esse concauam sphæricam superficiem ità, vt & basim, & latera cilindrica contingat in tribus punctis, ceu vides A B C. Finge conum eiusdem altitudinis cum sphæricè cauo cilin-



cilindro habentem cum eodem basim æqualem, siue communem, ceu vides pro cono triangulum D E F, cuius basis communis cum cilindro est circulus L E K F. Lucas Valerius acutissimus nostri æui Geometra (nō autem Archimedes, vt aliqui scripsere hallucinati) & nullo antiquorum inferior, in lib. 2. de cētro grauitatis, propositione 12, demonstrat, si plano basi E K F L parallelo secentur cilindrus sphæricè cauus, & conus (velut per GMHN) solida ea segmenta cilindri concaui sub AGMHC, & coni sub DOP, esse inter sese æqualia.

Hinc aliqui paradoxum à nobis propositum deducunt in huuc modum. Si sectio peragatur magis, ac magis versus coni verticem D, & versus peripheriam AQCI, ac sint semper inter se æqualia segmenta cilindri concaui, & coni, tandem deuenietur ad extremum pūctum D, quod erit æquale toti lineæ circulari A Q C I. Adde quod, & idem D erit maius qualibet eiusdem lineæ circularis parte. Punctum ergo datum est æquale, ac maius quam linea.

Paradoxi propositi ratio quomodo constet.

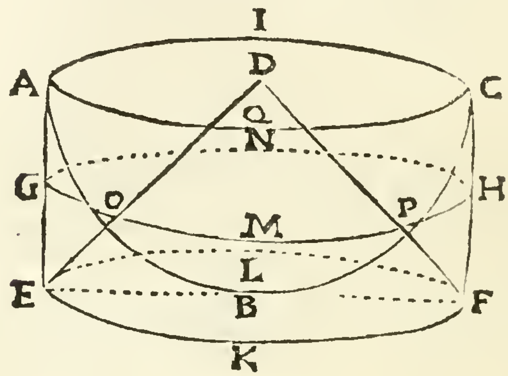
Cæterum, vt huiusce paradoxi veritas constet, accipienda sunt punctum, & linea physicè, idest coni minimum sensibile propeprope verticem D, & armilla illa extrema, quæ fiat à sectione proxima ipsi peripheriæ AQCI. Sic enim esse poterit proportio æqualitatis, vel inæqualitatis inter punctum, & lineam, quippe inter quanta, licet quasi atoma.

§. IV.

PARADOXVM,

& Corollarium.

Indiuisibile æquale, ac maius diuisibili.



Licet peripheria A Q C I modo prædicto physicè accepta sit linea (siue armillam malis) quæ iuxta secundam definitionem Euclidis, non habet latitudinem (intellige etiam physicè, scilicet sensibilem) tamen Physicam habet longitudinem, scilicet sensibilem. Punctum ergo D indiuisibile ad sensum dum est æquale, per prædicta, lineæ A Q C I, ac maius qualibet eius lineæ parte, ac sunt ea linea, & eius partes palam ad sensum in longitudine diuisibiles, ideò verum est corollarium paradoxicum propositum de indiuisibili, quod sit æquale, ac maius diuisibili.

SCHOLION.

Quid sit Corollarium apud Geometras videbis inferius, ò Tyro, suo loco ad propos. 15. lib. 1. cum eruditione Geometrica.

§.V.

§. V.

SCHOLION.

Paradoxa de puncto, & linea æqualibus intelligi nequeunt Mathematicè.

Regula Geometrica quando quantitates habere dicantur inter se proportionem.

I *Vxta definitionem 4. lib. 5. Euclidis*, proportionem inter se habere dicuntur magnitudines, quæ multiplicatæ possunt se inuicem superare. *Quoniam igitur punctum per Mathematicam abstractionem acceptum est indiuisibile*, cuius nulla pars est, *linea verò est secundùm longitudinem etiam mathematicè diuisibilis; quod est esse punctum non quantum, lineam quantam, indiuisibile verò, & non quantum quantumuis multiplicatum nunquam æquabit, ac multò minus superabit id, quod est quantū, ac diuisibile, ideò nec comparari, nec proportionem vllam habere inter se possunt punctū, & linea mathematicè sumpta.*

Linea, & punctū non habēt mathematicè inter se proportionem.

Cum hac nostra distinctione intelligēdæ sunt aliæ rationes, si quas alij afferunt contra eos, qui asserūt prædictum paradoxum de puncto æquali ipsi lineæ. Videntur enim illi accipere punctum Mathematicè, non Physicè, ac rationes eorum contra punctum Mathematicè sumptum rectè concludunt.

§. VI.

SCHOLION.

Puncti alia paradoxa, & prodigia ex Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ ad ornandam Euclidianam de puncto definitionem.

P *Vnctorum admirāda in terris, in mari, in aëre, in cælo, in centro vniuersi, in centro grauitatis, in visione, in vstionibus, in Eclipsibus, in Vere, in Aestate, in Autumno, in Hyeme, in Temporis momentis, in quantitate continua, in discreta.*

De puncto Moralia, Theologica, erudita è ſacris, & prophanis habes in Apiario I. Prælog. I.

SCHOLION.

De ſpeciebus punctorum.

P*Vnctorum ſpecies ſunt centrum, & poli. De ijs inferius vbi de centro.*

II.

Linea eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquali ſuis interijcitur punctis.

§. I.

SCHOLION.

Lineæ rectæ definitiones variæ naturam eius aptè indicantes ſecundum Euclidianam. Locus ex Catoptricis Euclidis illuſtratus.

Lineæ recta definitio & abſtractionem Geometricam.

1. G*Eometrica lineæ definitio, ab Euclide prolata, eſt & ipſa rei definitio, nõ autem nominis notatio. Lineæ etymologia eſt à lino, ex quo olim fabrorũ fila conflabãtur pro deſignationibus, &c. At definitio notat lineæ naturam quatenus ad Philoſophũ Geometram pertinet, eſtq; per abſtractionem Mathematicæ intelligẽtiæ percipiẽtis in linea ſolam longitudi-*

nem

nem sine latitudine. Rectæ lineæ definitionem dum laudat, & exponit Proclus ità fatur: Euclides per hanc definitionem ostendit solam rectam lineam ei, quod inter sua situm est puncta, æquale occupare spatium. Quanta enim est alterius punctorum ab altero distantia, tanta est rectæ, quæ ab ipsis terminatur, lineæ magnitudo. Atque hoc est ex æquali inter sua collocari puncta. Quod si in circumferentia, vel etiam in alia quadam linea duo puncta sumpseris, quod inter hæc includitur lineæ spatium ipsorum distantiam superat, omnisque linea præter rectam, hoc pati videtur. *Affert præterea varias rectæ lineæ definitiones, quarum aliquę nobis aliquando vsui erunt, vt mox etiam videbis in exemplo examinandæ regulæ.* Plato rectam lineam sic definit. Linea recta est cuius media obumbrant extrema. Hoc namq; ea quidem, quæ in directum posita sunt, pati necesse est: quæ verò in circuli circumferentia, vel in alio sita sunt interuallo, haud necessarium est vt hoc patiantur.

Expositio definitionis lineæ rectæ.

Definitio rectæ lineæ a Platone.

II. Gemina videtur cum definitione Platonica definitio prima Euclidis in Catoptricis, ex versione Io. Penæ: Ponamus radiũ esse rectã lineam, cuius media omnia extremis officiunt. *Græcè est* ὄψις, *visus, quod verbum vertit Pena: radius. Spectauit maiorẽ intelligentiam, & expressionem rectæ lineæ in visione, quasi fiat per radium, &c. Si Io. Buteo (vir sane doctus, sed nimium in alienis criticus, & cynicus) animum aduertisset ad Platonis definitionem, non tantoperè, atq; immerito carperet Penæ versionem in verbo* officiunt. *Quod idem est cũ Platone: Obumbrant; estq; in græcis* ἐπιπροσθεῖ, *cui malè respondet versio Zamberti:* correspondent. *Si quis latinè non è vulgo sit sciens intelliget aptissimè à Pena positum verbum:* officiunt. *Quam ad rem, & ad Platonicæ definitionis, atque Euclidianæ catoptricæ intelligentiam expediet videre apud Proclum exemplum de Eclypsi solari cum in recta sunt linea Sol, Luna, & oculus &c.*

Alia rectæ lineæ definitio ex Catoptricis Euclidis. Plato, et fida versio latina propugnati.

Idem qui supra Proclus: Definiunt autem ipsam alijs quoq; vijs; alij quidem puncti fluxum dicentes, alij verò magnitudinem vno contentam interuallo. Verum hæc quidem *(Euclidis)* definitio perfecta est, lineæ essentiam *(Geometricam)* explicans. Quæ autem puncti fluxum dixit, à causa producente ipsam manifestare videtur, & nõ omnem lineam, sed immaterialem exprimit. Hanc enim punctum producit impartibile existens, quod tamen partibilibus existentiæ est causa. Fluxus autem progressum ostendit, fœcundamque vim ad interuallum omne peruenientem, nullumque detrimentum recipientem, eandem quidem semper manentem, cunctis autem partibilibus essentiam præbentem, &c. *Sic Proclus etiam extra Geometrica philo-*

Aliæ definitiones lineæ rectæ.

Euclidiana cæteris prælata.

 loso-

losophatur. Archimedes verò rectam definiuit lineam, minimam earum, quæ terminos habent eosdem. Cum enim (vt Euclidis ait definitio) ex æquo inter sua collocata sit puncta, hac de causa eosdem terminos habentium minima est. Si enim quædam fuerit minor, non ex æquo inter sua iacebit extrema. *Affert & à sectatoribus Apollonij notionem lineæ satis aptam*, quando longitudines tantum aut viarum, aut parietum dimetiri iubemur; non enim latitudinem tunc, crassitiemq; subiungimus, sed vnicam dumtaxat consideramus distantiam. *Mox lineæ Mathematicæ quoddam in physicis affert non ineptum simulacrum.* Sensum autem ipsius lineæ habuerimus vtique si diuisiones locorum lucidorum ab obumbratis inspexerimus, nec non ad Lunam, quæ super terram est. Hoc namque medium iuxta latitudinem quidem nullam habet distantiam, longitudinem autem habet, quæ vnà cum lumine, & vmbra extenditur.

Archimedis rectæ lineæ definitio posita, et exposita.

Exempla physica rectæ lineæ mathematicæ.

§. II.

VSVS, ET PRAXES-

– Definitionum rectæ lineæ pro examine regulæ organicæ Geometricæ.

Regula instrumentum geometricum est, quo rectæ lineæ ducuntur. Sit ne rectè compacta ita, vt tutò, ac sine errore recta linea ducta sit quæcumque iuxta eius aciem designatur, potest agnosci duplici modo, & praxi.

Primus modus eius examinis fit iuxta definitiones rectæ lineæ nuper allatas, præsertim ab Archimede. Oculo igitur collocato ad alterum extremum aciei regulæ, iuxta quam fit lineæ ductus, si radius visualis nihil offendat extantis, nihil videat declinantis à recta ita, vt planè congruat cum omnibus partibus aciei ipsius regulæ, erit regula ritè facta. Nam cum natura per breuissima operetur, si regulæ acies congruit cum linea optica, ergo est breuissima inter extrema duo regulæ puncta, hoc est, recta est.

Primus modus examinandæ regulæ.

Ratio primi modi.

Secundus modus ex Tartalia, lib. 3 nouæ scientiæ. Quem habes ad defin. 4 apud Clau. de regula ita inuersa, vt extremum dextrum fiat sinistrum, ac regula sic permutatim apposita si planè congruat cum linea prius ducta ex eadem regula non inuersa, ritè, ac rectè fabrefacta

Secundus modus.

cta erit regula. Ratio est (quàm non apponunt, qui praxim hanc docent) quia duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt. *axiomate 12. Cuius explicationem vide inferius. Clauderent enim duę illę rectę, ac breuiſſimę ſpatium inter eas partes, quibus inter ſe non congruerent, Si congruunt, in vnica, & breuiſſima ſunt linea; Si non congruunt, & ſicubi ſpatium intercipiunt regula, & antea ducta linea, non est ad rectam, & breuiſſimam edolata regulę acies.*

Ratio ſecti ai modi.

§. III.

SCHOLION.

Linearum præcipuæ ſpecies, & inſtrumenta pro earum deſcriptionibus indicata.

Pluriformium linearum ſyluam habes apud Proclum ab antiquis Geometris. Nos hîc tantum enumerabimus aliquas, quarum vſus eſt crebrior. Ariſt. 1. de Cælo tria ponit linearum genera, rectam, circularem, mixtam. Linearũ item aliæ in planis, aliæ circa ſolida, aliæ in ſolidis. In planis recta, circularis, ſpiralis; reliquas omitto. Circa ſolida, ſpiralis circa cilindrum: omitto circa conum, & ſphæram. In ſolidis tres tantum enumero ſectiones conicas, paraboleu, hyperbolen, ellipſim. Prædictarum linearum vſus geometrici, ac inſignes affectiones theoricæ ſunt apud Apollonium, Archimedem, &c. Habes trium conicarum ſectionum apud nos deſcriptiones varias, varia pro ijs ducendis inſtrumenta, varios, & inſignes earum vſus in Apiarijs Philoſophiæ Mathematicæ in Apiar. 3, 6, 7, 9, 10, ibi vide.

Tria genera linearũ ex Ariſtotele.

Aliæ linearũ diuiſiones, & formæ.

Hic interim aliquarum linearum deſcriptiones apponimus, quæ vſui futuræ ſunt tyronibus in aliquibus praxibus iucundis Aſtronomicis, & Gnomonicis pro horarijs, &c. ceu ſunt hyperbolæ. Linearum etiam hîc aliquarum aliarum deſcriptiones dabimus, quas ſuppoſuimus in Ap. 4, vbi de vſu admirando ſpiralium linearum circa cilindrum, & in plano deſcriptarum diſſeruimus. Habent helicum, ſiue ſpiralium linearum deſcriptiones id commodi apud Tyrones, quod nõ pendent à prolixioribus, & reconditioribus demonſtrationibus geometricis, ſed tantum ad praxim rediguntur verba definitionum, vt videbis in ſequentibus §. §.

Sedi

Sed ante alios accipe reconditum modum ex antiquis describendarum ellipticæ, & circularis linearum.

§. IV.

PRAXIS PARADOXICA,

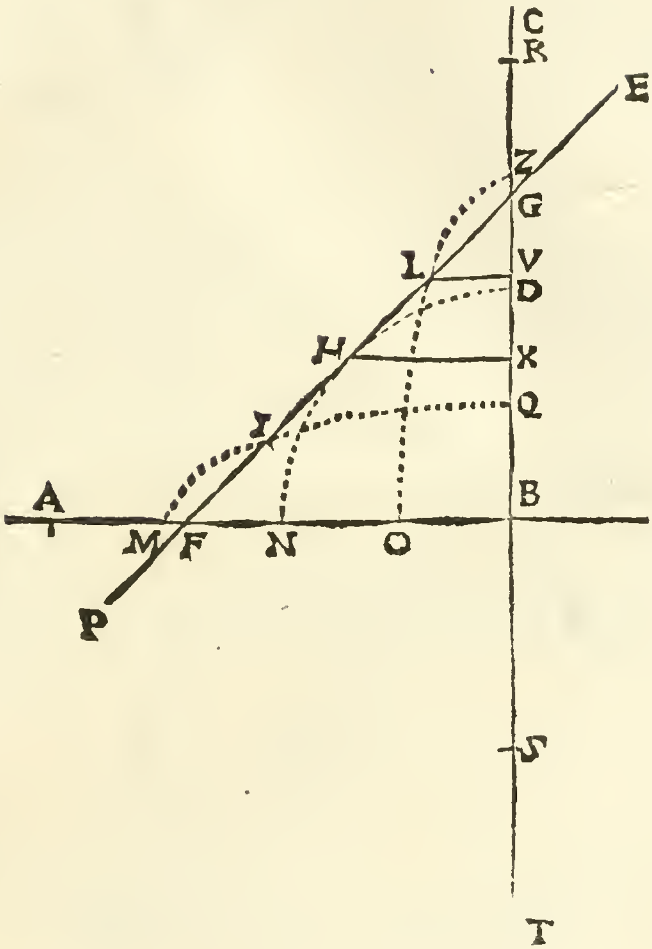
Et noua è reconditis veterum monumentis vnico rectæ motu describendarum infinitarum linearum ellipticarum, & circularis.

Locus insignis, & per obscurus apud Proclũ de linearũ ellipticorũ, & circularis descriptione.

P*Roclus lib. 2. commentar. 4, qui est ad 4 definitionem Euclidis, quæ est de linea, sic habet:* Si quis in angulo recto rectam subduci lineam excogitauerit, e ius, quæ hoc modo mouetur, extrema cùm æqualiter moueantur, rectam describunt, bipartita vero sectio cùm inæqualiter deuoluatur, circulum designat: reliqua autem signa describunt ellipsim. *Quibus in verbis tenebricosis, & nulla figura illustratis cùm ego Geometricum thesaurum latentem animaduerterem, in itinere, dum Regio Lepidi transirem, ea Procli verba proposui elucidanda Perillustri Domino Iohanni Antonio Rocchæ, meo quondam in publica Parmensi Academia Mathematicarum sciẽtiarum Auditori, vt illi præclaram hanc occasionem præberem prodendi posteris apud me vestigij quantum in scientijs Mathematicis polleat. Atque ille conatu, & euentu felici latentem pretiosam prædam eduxit.*

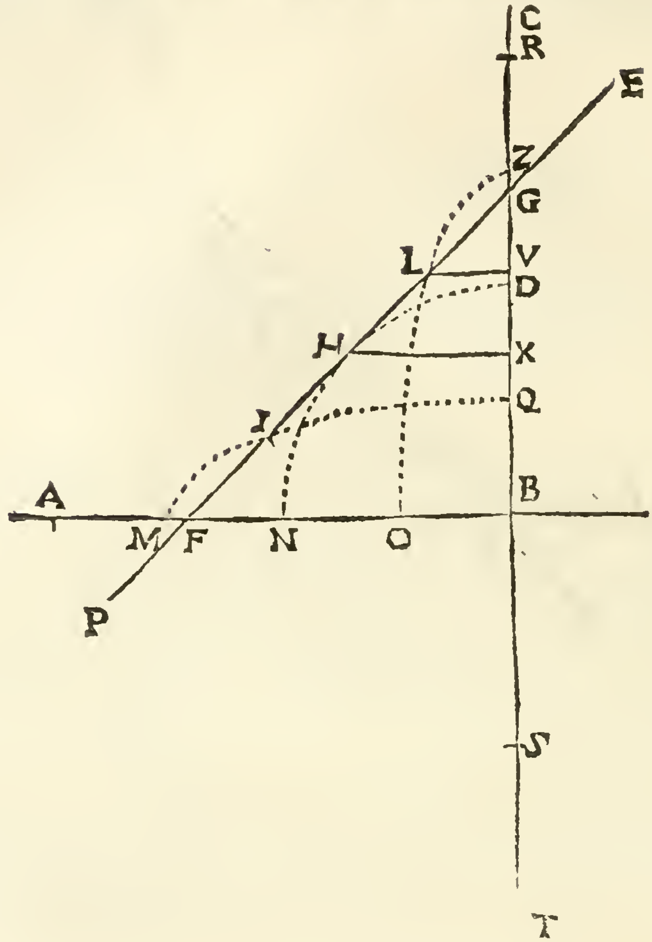
Esto sub duabus rectis AB, BC angulus ad B rectus. Et ipsius rectę PE pars FG, æqualis ipsi rectæ AB, bipartita sit in H, & citra, & supra H sit non bipartita in I, L; ac antequam incipiat moueri ipsa FG, congruat cum æquali AB ita, vt extremum F sit in A, alterum extremum G in B, & punctum I sit in M, H in N, L in O; deinde incipiat moueri paulatim, ac in angulo recto, *vt loquitur interpres Procli, idest sub angulo recto B* subducatur, *idest moueatur, sed semper in angulo recto, idest intra terminos rectarum ABC continentium angulum rectum moueantur extrema F, & G, F per rectam AB versus B, & G per rectam BC versus C.*

In eo motu extrema quidem F, G signant rectas AB, BC, punctum verò



verò bipartitionis H dũ mouetur ex N signat quartã circuli NHD; punctum I ex M signat quartam ellipsis MIQ, cuius maior semidiameter est MB, minor BQ; punctũ L ex O signat alterã quartã ellipsis alterius contrario modo, cuius minor semidiameter est OB, maior BZ; ac pariter quæcumque puncta rectæ FG (præter extrema F, G, & medium H) signabunt ellipsium plurimas quartas cùm, finito motu, recta FG collocarit alterum extremum F in B, alterum G in R, fuerintque puncta sectionum I in Q, H in D, L in Z, iuxta sensum verè arcanum, ac mirificum verborum Procli; ex quibus patet proposi-

Mirifica ellipticarum linearum, & circularis descriptio.



positi paradoxi praxis, quæ vno rectæ FG ductu signat lineas rectas, circularem, & ellipticas. Puncta lineæ rectæ FG intercepta inter medium H, & inter extrema F, G quanto magis accedunt ad H signant quartam ellipticam semper minus oblongam, velut è contrario magis oblongas quo remotius ab H versus F, G. &c.

Demonstratio Geometrica (cuius nullum apud veteres vidi vestigium) qua certò constet esse, verbi gratia, ipsam O L Z quartam ellipsis, & NHD quartam circuli, pendet ex parte posteriori propositionis 21. lib. pr. con. apud Apollonium; qui demonstrat in ellipsi, & cir-

circulo (omissa hic hyperbola, quæ nihil ad nos) quadrata applicatarum ordinatim ad axes, seu diametros habere inter se eandem proportionem, quam habent inter se rectangula rectarum interceptarum inter applicatas, & terminos diametrorum; verbi gratia, in ellipsi ex OLZ, cuius maior diameter est ZT, ductà LV, paralellà ipsi OB, quadratum ipsius OB ita se habet ad quadratum ipsius LV, quemadmodum se habet rectangulum sub TB, BZ ad rectangulum sub TV, VZ, & in circulo ex NHD, cuius diameter DS, ductà HX paralellà ipsi NB, quadratum ipsius NB ita se habet ad quadratum ipsius HX, vt rectangulum sub SB, BD ad rectangulum SX, XD. Quæ proprietas in ellipsi, & circulo ab Apollonio demonstrata ostenditur hìc esse etiam in quartis MIQ, NHD, OLZ. ergo sunt ellipticæ, ac circulares.

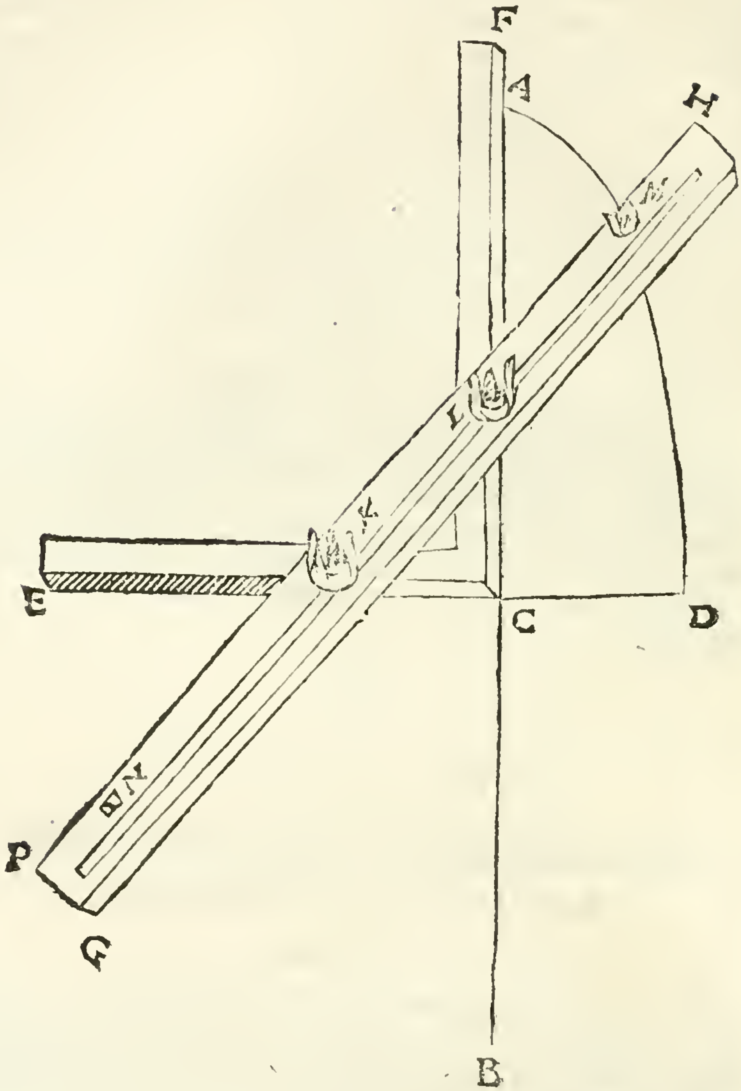
Eam ex Apollonio applicationem in quartis ductis ad præscriptũ à Proclo modũ meo hortatu demõstrauit idẽ, qui & interpretatus est Proclum, D. Roccha. Ne hic Tyrones implicemus nõdũ demõstrationibus assuetos, præsertim deductis ex libris Euclidis posterioribus, & ex Apollonij Conicis, eam huius mirificæ praxis demonstrationem seposuimus in Analectis ad quartam, quam acceleramus, editionem Apiariorum nostrorum, ac Philosophiæ Mathematicæ. Ibi ea fruere.

§. V.

COROLLARIVM.

Modus Quidubaldi describendæ ellipseos soboles est modi antiqui apud Proclum. Vterque modus ampliatus.

Nobilissimi, & ingeniosissimi Marchionis Guidubaldi modus, quo ellipsim docet describere ad finem lib. 2. Planisphæriorum, à quo summam laudem apud Philosophos Mathematicos est assecutus, & cuius demonstrationem, & organicam praxim copiosè exposuit, idem prorsus est cum modo hactenus à nobis apud Proclum elucidato. Inspice hìc appositam figuram ex Guidubaldo. Vides dum graphium in M describit quar-



tam A D, lineam rectam KL sub angulo recto C moueri extremis K, L per rectas EC, CF; & quemadmodum omnia puncta (præter medium inter KL, quod circulariter, & extrema K, L, quæ rectà mouentur) inter K, & L quartas ellipseωn describunt, ita & reliqua omnia extra K, & L, qualia sunt M, N, &c.

Coxol.

Corollarium igitur quoddam est apud nos modus Guidubaldi. Sed, & corollaria sint ex corollarijs mox hìc sequentia, nempe quòd patet etiam ex modo Guidubaldi non solum puncta omnia in recta KL, preter medium, & extrema, moueri elliptice, vt docet Proclus, sed etiam puncta omnia extra extrema in tota recta KL vtrinq; producta. Patet præterea à medio puncto descriptio circuli. Itaque Guidubaldo apponimus puncta inter K, L pro ellipsibus, & punctum medium pro circulo, Proclo verò apponimus puncta etiam extra K, L. Eadem etiam demonstratio est ex 21. primi con. pro praxi Guidubaldi, præsertim à nostro Clauio contracta lib. 1. Astrolab. Lem. 50.

Præterea ex modo antiquo Procli vniuersalior fit Guidubaldi propositio, & eximitur à determinationibus illis, quas ille ponit. Dummodo enim ex Proclo pars aliqua rectæ GH moueatur, & contineatur inter rectas EC, CF sub angulo recto C, consequitur copiosa descriptio ellipsium ab omnibus punctis totius rectæ PH, præter medium, & præter duo K, L, &c.

Mira planè fœcunditas Geometrica rectæ lineæ, ac regulæ, vt vnico motu tres linearum formas, & vnius formæ infinitas describat. Quod arcanum mira veterum Geometrarum solertia nobis semper colenda excudit.

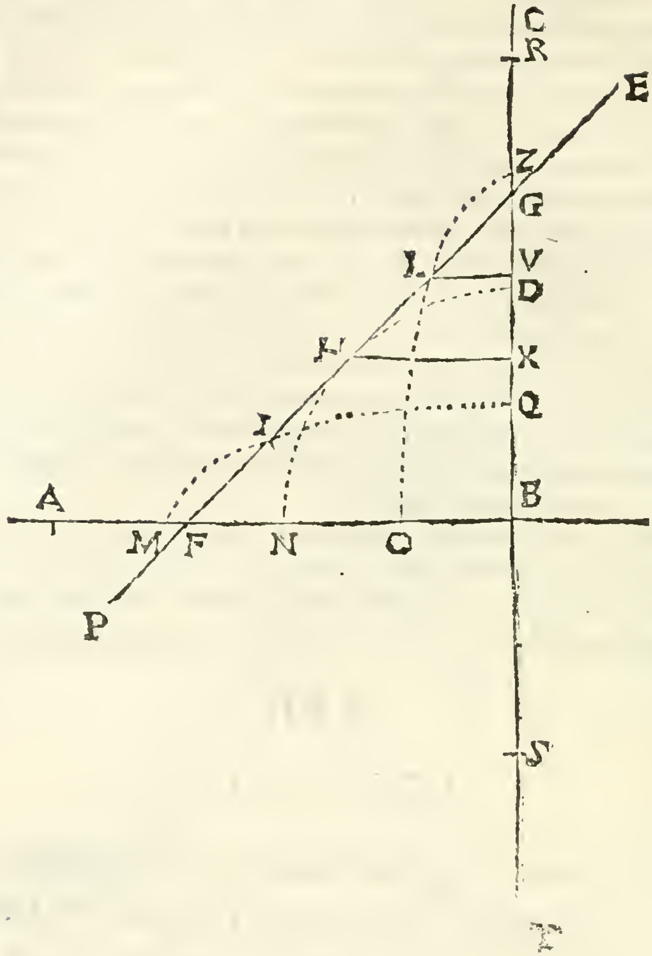
§. VI.

SCHOLION

Ad praxes vel geometricas, vel organicas per continuatas lineas ope regulæ, ac normæ describendi circulum, & ellipses iuxta modum antiquorum apud Proclum.

Praxis facillima per puncta describendę ellipticæ lineæ, ac circularis.

1 *SI per puncta libeat quartas vel circuli, vel ellipseωn describere modo vbiq; paratissimo, hunc indico. Scilicet, complicatà pagellà in rectam lineam, & applicatà, verbi gratia, ad AB, lubitum erit alterum extremum determinare ad partes versus A, ac sit F punctum congruens cum A signatum in extrema pagellæ (applicatæ ad AB) orà. Alterum punctum inter AB medium signabis in eadem pagellæ orà, eritque congruens cum N.*



Vtrinq; ad medium punctum N pro libito punctum alterutrum signabis, quod si fuerit citra N versus A, erit pro Semidiametro maiore ellipsis describendæ, verbi gratia MB pro quarta ellipticà, cuius minor Semidiameter euenit BQ. Sed figuræ commodioris gratia sumatur punctum inter partes NB, verbi gratia sit O, eritq; OB quantitas semidiametri minoris pro quarta elliptica OLZ, cuius maior Semidiameter eueniet BZ, & in ora extrema applicatæ pagellæ signetur punctum congruens cum O.

Erunt igitur in orà pagellæ puncta F pro A, H pro N, L pro O, & G ex-

& extremus pagellæ angulus (finge abesse partem GE) pro B. Extrema pagellæ puncta FG mouebis per partes rectarum AB, BC, & in spatio inter ipsas intercepto sub angulo recto signabis puncta iuxta H, & L mota ad obliquitatem pagellæ, donec ipsa congruat cum CB, & H in D, L in Z peruenerint, & signatæ sint quartæ punctuatæ NHD circularis, OLZ elliptica. Deniq; puncta iungantur curuis lineis, &c.

praxis eleganter per normam, et regulã describendarum linearum ellipticarum, & circularis.

II. Sin autem lubeat & organicè, & continuatis lineis ducere puncto H circularem NHD, & puncto L (siue quolibet alio vtrimq; ad H) ducere quartam ellipticam OLZ, fiet operatio facilis per regulam, & normam. Nam finge ipsam TE esse aciem regulæ, & in foramina ad H, & L ingesta esse duo graphia, ipsiusq; regulæ terminos F, G gemina cuspide, vel clauiculis firmatos esse, quibus in motu regulæ radantur duo latera AB, BC normæ ad ABC applicatæ. Ea enim ratione, ac motu graphia in H, & L ex N, & O continuo tractu signabũt quartas NHD circularem, OLZ Ellipticam intra latera normæ ABC. Vide figuram praxis Guidubaldi, & ab ea transfer quæ sunt opus ad nostram praxim.

Regula, quæ mouenda est sub angulo recto, vt possit aptari varijs ellipseon describendarum amplitudinibus perforanda erit varijs foraminibus, vt in ea foramina ad maiores, vel minores distantias ingeri possint & clauiculi, & graphia. Sed fortasse fuerit expeditius vti cursoribus per regulam permeantibus, qui & supernè vitibus possint constringi, & gemini (qui erunt extremi eius partis regulæ, quæ mouenda est intra angulum rectum) sint planiores in partibus inferioribus, vt facilè permeent per spatium intra angulum rectum, cursores verò alij medij, ac designatorij continebunt infernè graphia, &c. Denique mechanici esto varias in praxibus industrias inuenire ad facilitatem maiorem operationis à Geometra Philosopho inuentæ, demonstratæ, præscriptæ.

§. VII.

SCHOLION.

Nomen, quidditas, vsus aliqui ellipsis paucis indicati.

Doces me, inquiet aliquis Tyro, describere aliquid, quod quidnam sit etiam post descriptionem ignoro. Respondeo: Non est tyronici captûs hîc nunc pleniorem ellipticæ sectionis cognitionem ingerere, quam assequêris post Euclidis elementa, si quando conica elementa libare apud Apollonium volueris. Ibi ab Eutocio, & Pappo, & alijs habebis quæ hîc postulas. Hîc, inquam, vbi ex occasione variarum linearum Geometricarum à Proclo ad ornamentum Euclidis adductarum, & loci apud eundem Proclum obscurissimi, sed luce dignissimi, praxim potius, quam geometricè Philosophicam dissertationem instituimus. Ne tamen hinc prorsus ieiunus abeas, habeas paucis quæ sequuntur.

De vero ellipsis nomine, idest de affectione eius figuræ à qua denominatur, habebis à nobis ad propos. 28. lib. 6. Eucl. vbi de applicatione geometricà cum defectu, siue defectione, quam sonat nomen ellipsis ex 13. propos. lib. 1. con. Apoll. &c. Quemadmodum de parabolæ geometricæ nomine aliqua diximus in loco, idest ad 44 propos. lib. 1. Satis esto vt nunc supponas quid sit conus è def. 18. l. 11. Eucl. & figuram ellipticam fieri (de conica loquor tãtùm, paulo post etiam de cilindricà) à sectione coni ità obliquà, vt vtrumque coni latus incidatur; in plano enim ita secante concipitur facta figura (quam dixeris ouiformem) sub orbe lineæ productæ à communi sectione plani secantis, & coni obliquè, vt prædictum est, secti. Demonstrat autem Serenus in libro, qui Apollonio solet apponi, fieri non solum è coni, sed & è cilindri obliqua sectione veram ellipsim; licet tam difformiter tendant latera quidem cilindri parallellos, latera verò coni in angulum ad verticem.

Sectio elliptica coni quænam.

Vsus ellipticæ figuræ quamplurimi sunt. Habes aliquos è præstantioribus apud nos, præsertim in Apiar. 2. Progym. 2. & in Apiar. 10. ad finem Progym. 2. In Astronomicis, & Astrolabijs, in Gnomonicis, in Opticis, quibus in scientijs aliquando circuli, vel tropici ali-

qui

qui proyciendi ſunt in ellipſes, vel partes aliquas ellipticarum linearum. In re Agraria, in Muſicis, ſiue ad ſonos, & vocem ſpectantibus; in formis aliquorum inſtrumentorum Muſicorum. In Catoptricis ad ingenioſas viſiones è ſpeculo elliptico Griembergeri. In Architectura pro concamerationibus, & theatris ellipticis. In Lignaria, Pictoria, Fuſoria, Conflatoria, Plaſmatoria, Cuſoria, ſi quando eſt opus vel ſcutis militaribus, vel inſtrumentis muſicis ad fides, orbibus, vel vaſis verè ellipticis &c. Vſus eſt ſingularis apud nos in cit. Ap.10. pro tubo elliptico mirificè conducente ad perfectiſſimam auditionem. &c.

§. VIII.

PRAXES

Deſcribendæ lineæ helicis, ſiue ſpiralis circa cilindrum. Definitio, affectiones, Vſus.

I. IN *Apiar. 4., vbi machinas mirificas exponimus, quarum vires admirandæ latent in ſpiralibus canalibus, vel tubis optarit fortaſſe ad vſum quiſpiam aliquam cognitionem deſcribendarum ſpiralium circa eas machinas. Ne deſiderio geometrico deſimus, & vt minus ſit quod in noſtræ philoſophiæ Mathematicæ partibus deſideretur, libenter aliqua de ſpirali tum circa cilindrum, tum in plano deſcribendà hìc apponimus; præſertim cum hæc etiam cognitio vnà cùm vtilitate varietatem, & iucunditatem habeat non vulgarem. Itaq; ſpiralis circa cilindrum definitio, quam apud ãtiquos inueni, eſt.* Dũ recta linea circa cilindrĩ voluitur ſuperficiẽ, & punctũ in ipſa linea parili celeritate mouetur, fit helix, hoc eſt implexa, circumuoluta; linea &c. *ex Proclo ad hanc 4. Eucl. defin. de linea. Quę verba ita intellige, vt pũctum in recta peruenerit ad eius extremum cùm alterum eiuſdem rectæ extremum perfecerit circulũ circa cilindrum.*

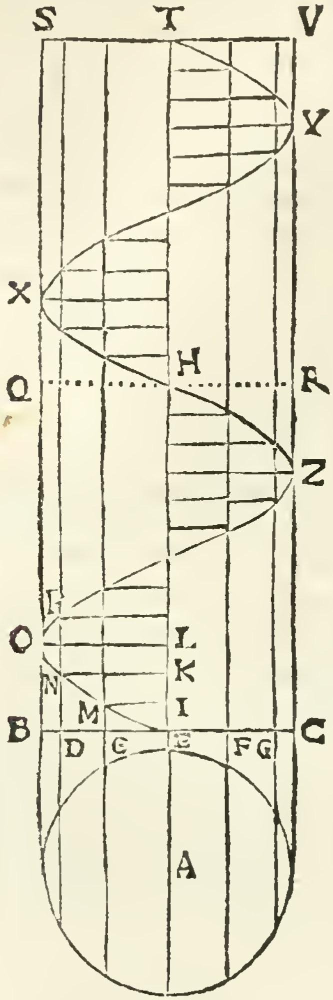
Definitio lineæ ſpiralis circa cilindrum.

II. Vt apertior ſit intelligentia definitionis propoſitæ, appono deſcriptionem geometricam ſpiralis circa cilindrum per pũcta, & eam in figura explico. Quam explicationem à nobis iuxta verba definitionis excogitatam vidi deinde incidiſſe in eandem praxim, quam aliqui ex Alberto Durero afferunt, ſed ſine vlla explicatione artis,

atq;

atq; ingenij geometrici ea in figura delitescentis.

Lineæ spiralis circa cilindrum geometrica descriptio & puncta.



Sit pro base cilindri circulus A, & eius peripheria in quotlibet partes ęquales distincta, puta in 12, ac sit pro ea peripheria diameter BC ex proiectura optica, ex qua etiam diuisiones factæ sint proportione inæquales in θ DFG adductæ ab inferioris circuli diuisionibus æqualibus. Rectę lineæ (quæ circa cilindrum perpendiculariter, ac circulariter mouenda est) longitudo sit EH, quæ in totidem æquales partes 12 diuisa sit in I, K, L, &c. à quibus diuisionibus deducantur perpendiculares ad 12 lineas eductas ex diuisionibus B, D, θ, E, F, G, C, & parallelas primæ perpẽdiculari EH. Concipiendæ autem sunt ad partem alteram cilindri, quæ latet post, & sub BC, geminatæ, atque in directum positæ lineæ sub D, θ, E, F, G.

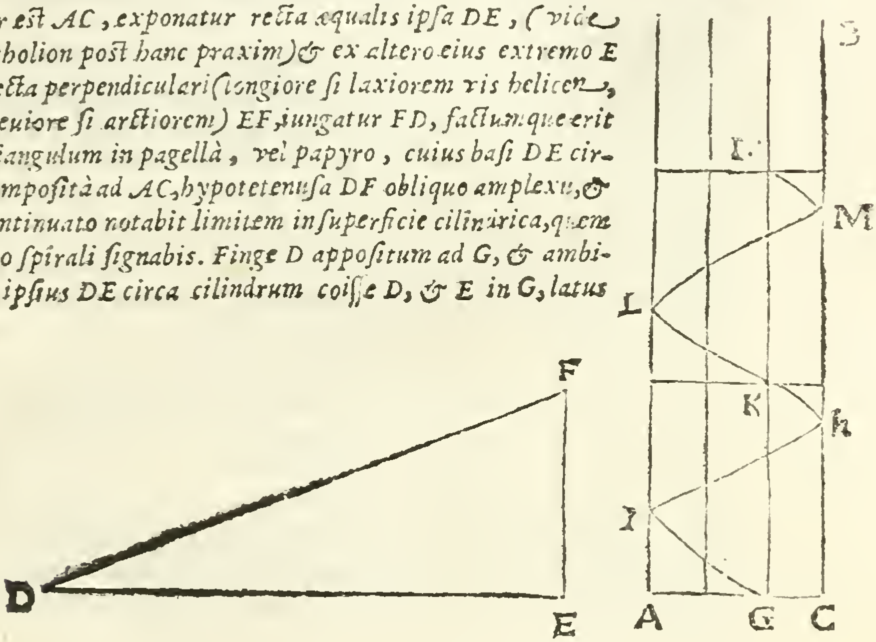
Igitur rectæ EH dum extremum E peruenerit ad primam diuisionem in θ parili celeritate, *inquit Proclus, punctum ex E motum per rectam EH peruenerit & ipsum ad primã diuisionem in M, dum E peruenit in D secũdã diuisionem sit M in N secunda, dum E peruenit in B sit N in O tertia diuisione. Fit deinde quarta progressio post Cilindrum ex B in D quartam diuisionem, cui corresp̃odet & quarta in P. Ac sic deinceps donec punctum E perfecerit circulum, ac p 12 partes æquales redierit in primum locum, vbi E, vnde discesserat; sicut & alterum extremum H perfecerit orbem æqualem ipsi BC, siue ipsi A, & tunc etiam punctum ab E progrediens obliquè per cilindrum, & perpendiculariter per ipsam EH*

circa

circa cilindrum motam, perueuerit in H per totidem 12. partes ipsius EH, & progressione sua signauerit spiralem primam E O Z H. Eritq; pro secunda spirali peragendus secundus circulus Q H K, vel STV, & pari ratione signanda secunda spiralis HXYT. Quo verò crebriora fuerint, & viciniora puncta diuisionum, eò spirales per ea ductæ erunt minus ad rectam lineam accedentes.

Vides igitur, ex hac nostra explicatione applicata singula verba definitionis helicis circa cilindrum ad singulas figuræ partes, pro facilitate, quam Tyronibus debemus.

III. Alter modus descriptionis non per puncta sed pro continuata spirali geometricus pariter, & semiorganicus est apud Pappum libro 8. collect. Math. prop. 24. Cilindri AB perimetro, cuius diameter est AC, exponatur recta æqualis ipsa DE, (vide Scholion post hanc praxim) & ex altero eius extremo E erecta perpendiculari (longiore si laxiorem vis helicem, breuiore si arctiorem) EF, iungatur FD, factumque erit triangulum in pagellà, vel papyro, cuius basi DE circumpositâ ad AC, hypotetenusa DF obliquo amplexu, & continuato notabit limitem in superficie cilindrica, quem pro spirali signabis. Finge D appositum ad G, & ambitu ipsius DE circa cilindrum coisse D, & E in G, latus



EF erit in GK, & DF ibit ex G in IHK, eritq; facta prima spiralis. Iterum applicandum erit idem triangulum circa cilindrum pari modo pro secunda spirali KLMN, &c.

Triangulum rectangulum FDE basi sua ostentat progressum circularem extremi puncti rectæ perpendicularis, quæ it à D in E, latus verò perpendiculare EF indicat sua longitudine progressum, quem fecit punctum, quod motum est ab imo E ad sumum F eodem tempore, quo peracta est circularis peripheria, &c.

Vitruuius illustratus.

Ex hisce descriptionibus habes intelligentiam ad cap. 11. lib. 10. Vitruuij, cuius verba lucem habebunt si positis hìc figuris, & descriptionibus applicentur.

IV. Affectionum non vulgatarum in linea spirali circa cilindrū prima, & singularis est apud Proclum. A quo sparsa hæc colligo ex comm. ad 4. defin. Eucl. ad initium, & finem, & in comm. ad propos. . Eucl. Helix circa cilindrum omnes sui partes omnibus secundum partium similitudinem adaptat, vt ostendit Apollonius in libro de Cochlea. Quæ quidem passio ex omnibus helicibus ipsi soli competit. Planæ namque Helicis partes inter se dissimiles sunt, nec non eius, quæ circa Conum, & eius, quæ circa sphæram describitur. Sola autem cylindrica eodem sanè modo similium partium est, quo etiam recta, circularisque linea.

Linea spiralis circa cilindrū est è tribus lineis partiū similiarū.

Et: Tres solæ sunt lineæ partium similium recta, circularis, helix cilindrica. Idque euidenter Geminus demonstrat, cum insuper demonstrasset, quod, si ad similium partium lineam ab vno puncto duę rectæ protractæ fuerint lineæ æquos in ipsa angulos facientes, ęquales sunt. *Affirmatq; Proclus Geminum vsum esse 5 propositione ad demonstrandum æquales angulos esse ad basim circularem, rectam, cilindricam helicem sub æqualibus duobus rectis lateribus comprehendentibus angulum, siue ab vno puncto ductis, fieriq; isoscelia triangula mixtilinea laterum rectilineorum, & basium curuilinearum.*

Non extat liber Apollonij de cochlea, nec Gemini demonstratio, in quibus eam partium similitudinem in helice cilindrica ostendebant. Patet hìc campus ingenio Geometrico sese exercendi. Tentanti poterit fortaße vsui eße liber posthumus Guidubaldi de cochlea, ex quo aliqua poßent adduci ad probandam prædictam helicis cilindricæ proprietatem. Quæ sane mira est sensui, & intellectui, qui nō facilè concedūt gratis petenti eam partium æquali inter se modo habentium similitudinem in ea helicà, quemadmodum patet in rectà, & circulari. Obliquitas enim helicis per dorsum cilindri videtur potius indicare partes non simili modo iacentes &c.

Mira affectio lin. spiral. cir. cil. ad vsum &c.

Secunda helicis cilindricę affectio mirissima est in vsu cochleæ famosissimæ machinæ ab Archimede inuentæ ad aquas facilè attollendas. Nam per spiralem canalem circa cilindrum aqua, dum cochlea mouetur, ascendendo descendit, descendendo ascendit. Quod artis, & ingenij geometrici miraculum nos physica partim, & geometricà demonstratione confirmauimus in tomo 1. Apiar. Phil. Math. Apiar. 4., Progym. 1. propos. 11. Post hanc proprietatem in vsu indicemus etiam vsus aliquos alios helicis cilindricæ.

V. Vsus-

V. Vsus cilindricæ helicis est (præter alios in alijs facultatibus) In Architectura ad Scalas cochlides, quarum scapus ad perpendiculum collocatur, & circa eum tamquam circa axem gradus ponuntur eà arte, quam docuimus in antec. figuris, quibus helicis circa cilindrũ definitionem aptauimus. Cochlides ab Antiquis factæ erãt, vt in altissima per angustias conscenderent, columnas, pyramides, moles maximas æquarent. Intra columnam Traiani ascensus fit per cochliã &c.

Vsus spiral. cil. in Archit. &c.

Vsus eiusdem helicis est ad vites vel incauatas, vel extantes circa cilindros maiores, vel minores, quæ machinæ sunt cuneus continuatus, & flexus ad modum spiralis. Earum machinarum figuras, & miras operationes ad constringenda, vel ad facile mouenda pondera vide apud Pappum lib. postremo, & in fine perfectissimi operis Machinarij à Guidubaldo perscripti.

Vsus in machinaria.

Adde vsum in eadem Philosophia machinaria tollendi pondera, non per cuneos, sed vel per canales, vel per cancellos cilindricè incuruatos ex mira ea mixtione naturæ, atq; artis demittentiũ simul, & facilè attollentium ponderosa, iuxta ea, quæ nuper indicauimus ex Apiarijs. Ibi vide exempla, figuras, praxes, corollaria, theorias. &c.

SCHOLION

Ad vsum pro praxi spiralis cilindricæ describendæ ex Pappo.

Norit Tyro perimetro circuli, cuius diameter est AC, exponi rectam æqualem per praxim ex Archimede, qui proportionem ponit diametri ad peripheriam vt 7. ad 22. Itaq; triplicetur AC, et addatur vna eius septima pars, &c.

§. IX.

PRAXES

Lineæ ſpiralis in plano deſcribendæ, ac definitio.

Definitio lineæ ſpiralis in plano à Proclo.

H*Elici in plano præmiſimus helicem circa cilindrum, quia erit cilindrica vſui pro deſcriptione planæ ſpiralis, quæ quaſi lemma illam ſupponit, vt mox videbis.*

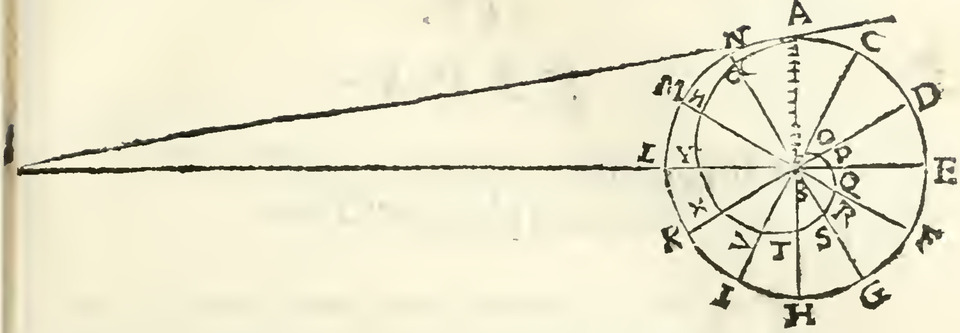
I. Itaque Definitio eſt apud Proclum in ijs verbis, quæ præter cætera, habet in lib. 3. cap. vnico: Dicet Geometrica mens quod, cu mego intellexerim rectam lineam, quæ iuxta quidem alterum extremorum maneat, iuxta autẽ alterum moueatur circa illud, & ſignum, quod à manente extremo in ipſa moueatur, vnius reuolutionis Helicem deſcripſi, cum enim ſimul & rectæ lineæ extremitas, quæ deſcribit circulum, & ſignum quod in ipſa mouetur rectà lineà, in eodem ſigno peruenerint, atque coinciderint, talem mihi faciunt Helicem.

Similem habet, & Pappus in defin. antè prop. 19. lib. 4. Hauſerint fortaſsè vterque ab Archimedis proloquio ante ſpirales, vbi prima ea eſt definitio. Propoſitionis Archimedeæ verba ab alijs minus apertè poſita, hìc accipe à verſione Cõmãdini: Si lineam ſpiralẽ in prima circulatione deſcriptã recta linea cõtingat in termino ipſius, à pũcto autem, quod eſt principium lineæ ſpiralis ducatur linea ad rectos angulos ei, quæ eſt principium circulationis, ducta coibit cum contingente: & pars eius, quæ eſt inter contingentem, & principium lineæ ſpiralis, æqualis erit primi circuli circumferentiæ.

Ab Archimede.

Explicatio definitionis, & deſcriptio in plano ſpiralis lineæ.

II. Explico in figura, in qua facilitatis gratia facio diuiſiones per interualla ampliora, ſed in exactiori operatione per arctiora, & minutiora facienda eſt helicis in plano deſcriptio. Erit ergo hìc ſimul expoſitio definitionis, & deſcriptio helicis definitæ. Sit recta linea AB, cuius alterum extremum perſtet in B, alterum A circulariter moueatur ab A in C, D, E, ac deinceps donec redeat in A, ac peripheriam circuli deſcribat. Eodem autem tempore pũctum intellige quod incipiat (dum incipit motus circularis rectæ AB) moueri à B per rectam B A ac ſemper aſcendat per eam dum ipſa mouetur et



cum BA orbem perfecerit ab A in A, punctum in rectà BA percurrens peruenerit ad extremum A eodem tempore; sic enim ipsa BA puncto per eam ascendente signarit spiralem OPQRSTVXYZaA. Diuisà enim peripherià in 12 partes æquales in A,C,D,E,F,G,H,I, K, L, M, N, & pariter diuisà rectà AB in 12. partes, dum AB extremo A peruenit ad C punctum ex B percurrẽs per rectam BA peruenerit ad primam è duodecim partibus in O, dum recta est in BD erit punctum ascendens in secunda duodenarum partium P, dum recta est in BE, punctum spiralem signans est in Q tertia duodenarum. Ac deinceps, &c. dum signat BN penultimam, siue vndecimam duodenarum, vndecimam etiam partem attigerit punctum in a; denique cum principium, & finis circularis motus fuerint in A, in eodem A erit & finis motus, quem fecit punctum spiralis lineæ descriptorium. Quæ hìc sic explicata explicant etiam non nihil implicitam versionem verborum Procli spiralem in plano definientis, ac describentis. Hæc praxis Geometrica per puncta non est contemnenda, ac erit vsui magis, quàm descriptiones aliæ spiralis in plano per instrumenta, vt inferius videbis in Schol. 2.

Descriptiones alias organicas helicis in plano, quas hìc omitto, ne Tyronibus longius negotium facessam, alibi fortasse dabimus.

§. X.

VSVS-

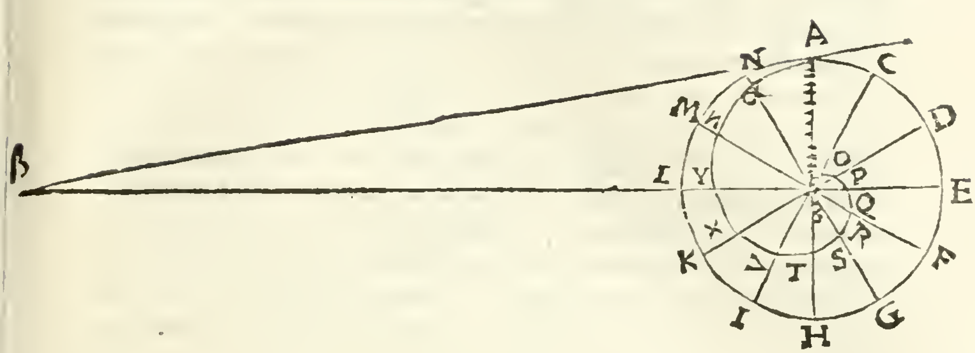
- Insigniores Geometrici, & Machinarij helicis in plano descriptæ.

Vsus helicis in plano ad circuli quadraturam.

1 DVos hic tantum meo iudicio cæteris anteponendos vsus helicis in plano descriptæ appono. Primus esto in Geometriâ practica ad famosissimum problema de circuli quadratura. Nam linea spiralem contingens fit hypothenusa, quæ in triangulo rectangulo determinat longitudinem basis, quæ est æqualis peripheriæ circuli, &c. vt demonstrat Archimedes in propos. 18. spiralium. Idem verò Archimedes in lib. de dimensione circuli propos. 1. demonstrat omnem circulum æqualem esse trigono orthogonio, cuius alterum duorum laterum comprehendentium angulum rectum æquale est semidiametro, alterum peripheriæ. Quare per spiralem habetur recta æqualis peripheriæ circuli, & triangulum rectangulũ æquale circulo, & consequẽter si quadretur triangulum per ea, quæ lib. 1. & 6. Eucl. docentur, quadratus erit circulus. At verò ad spiralem geometricè, ac demonstratiuè ducere tangentem (quæ iuxta defin. è li. 3. nusquam secet) hoc opus, hic labor est. Quem contactum aliqui moliti sunt per parallelam rectæ subtensæ, ac iungẽti duos æquales arcus spiralis, &c. Omitto, ne tyronibus negotium potius hìc facessam, quàm scientiam ingeram. Saltem spiralis docet recõditam eam veritatem theorematicè circà id triangulum formatum, cuius basis circumferentiæ circuli sit, ac fiat æqualis. Idest linea Aβ tangens lineam spiralem OTQ STVXYZoA in A, à perpendiculari eductà ex B, & quantumuis productà abscindit partem Bβ æqualem peripheriæ circuli, cuius semidiameter est BA. Ac triangulum A B est æquale areæ circuli ALHEA.

Igitur, dato circulo, si iuxta ea, quæ docuimus in descriptione spiralis geometricà, p puncta spiralis describatur, & eius puncta proxima hinc inde puncto futuri contactus præcisiore curà signentur, & ad pũctũ A in spirali ducatur contingens quantà licet curà geometricà (producta etiam A aliquantulùm vltra A per initiũ secũdæ spiralis, vt appareat contactus in A sine sectione. &c.) fiet triangulum

AB β



AB3 citra sensibilē errorem ęquale circulo ALHEA, ad vsus practi- artium &c. Quemadmodum quantum satis est ad eosdem vsus valet proportio diametri ad circumferentiam ab Archimede proposita.

Ad vsum non vulgatum Geometricum Helicis in plano spectat id, quod affirmat Proclus ad 9. Eucl. Aliqui ab Archimedis helicibus incitati in datam rationem datum rectilineum Angulum secuerunt. *Vide in fine spiralium Archim. apud neotericos eius magni Geometræ illustratores, qui ope spiralium omnē etiam figuram regularem circulo inscribunt, & plura alia enodant in Geometria, licet non sint geometricè præcisissima, sed saltem sint citra sensibilem differentiam &c. Hic verò nos, quemadmodum Archimedes in dimensione circuli, potius praxen, quàm teoricen (non sine tamen Geometricà curà) pro tyronibus intendimus.*

Vsus ad diuisionē anguli in libitam proportionem.

Ad inscriptionem in circulo cuiuslibet figuræ regularis.

II. Vsus secundus ductæ spiralis in plano est apud nos in Philosophia Machinaria planè singularis, atque vnicus huius generis spiralis, nempe vt aqua imposita in tubum spiralem affixum circulari plano (quod suspensum circà axem facilè possit moueri) ipsamet aqua descendendo ascendat, & sponte sua machinā moueat, per quam ascendit. In spirali circa cilindrum aqua quidem descendendo ascendit, sed ascensum non habet, nisi ab alio ipsa cochlea moueatur, quæ aquam obliquè suspellat; at verò per tubum spiralem in plano aqua ipsa, dum in partem alteram deponderat, ac descendit, mouet machinam, & per eam ascendit. Vide in Ap. 4. Progym. 1 prop. 13. & corollar. 1, 2, 3, vbi plura alia admiranda ab hac spirali in plano. Ibi etiam in propos. 14. habes ab hac eadem spirali adiumenta, quibus maiora nō possunt haberi ab ingenio geometrico circa machinas philosophante, vt motus perpetuus in actum physicum exponatur. Quemadmodum etiam ea machina veritatem habet indubitatam à geometri-

Vsus insignis lineæ spiralis in plano ad machinariam &c.

metricâ spiralis lineæ in plano desſignatione, cuius relapſus à ſupremo punčto ad imum comparatus cum peripheria circuli, intra quem eſt ipſa ſpiralis, ſemper à peripheria recedit obliquè magis, ac magis in alteram partem, in quam plus aquæ deponderantis admittit, &c. Vt vides fieri inter peripheriam ANMLKIHGFEDC, & inter ſpiralem A α ZYXVTSRQPOB, ſub quibus ſpiraliter creſcens ſuperficies concluditur, cui tubus eiuſdem formæ optatur. Vide expreſſiora in cit. Ap. 4. Conſtant hæc, inquam geometricè. Mechanici deinde laboris eſto ſubigere, ac vincere materiam phyſicam, & geometricè demonſtrata veritate informare. Tubus ille ſpiralis ad vſum minus fallacem erit non exigendus ad præciſam ſpiralis reuolutionem, ſed fiat magis ad circuli peripheriam accedens, quàm vera ſpiralis, &c. quæ vſus docere ſolet artifices geometrica inuēta materiæ phyſicæ applicantes. De vſu ſpiralis pro diuiſione dati anguli rečtilinei in quotlibet partes æquales vide inferius ad propoſ. 9.

§. XI.

PRAXES-

-Deſcribendarum linearum circularis, & hyperbolicæ eodem regulæ ductu. Ac vſus.

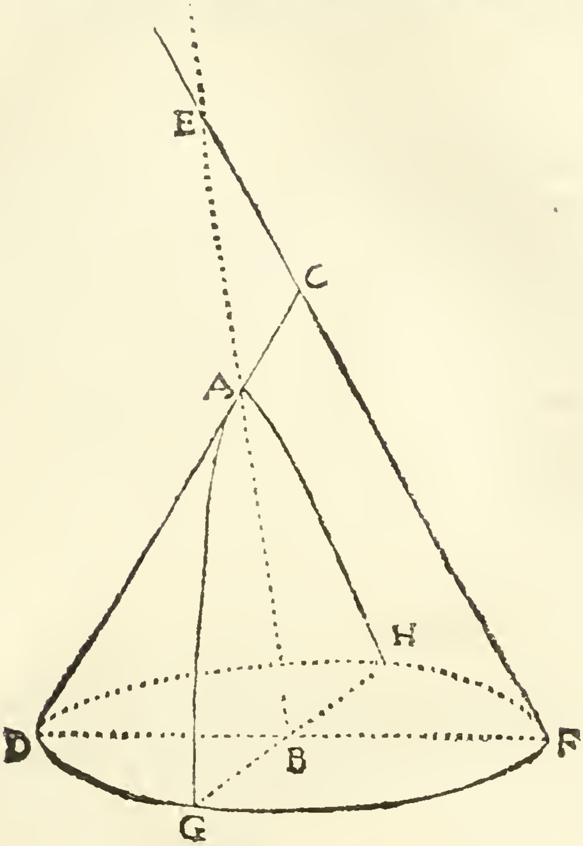
Hyperbolica linea, ac ſectionis ortus.

I. A*D propoſ. 29. lib. 6. Eucl. videbis apud nos vnde hyperbolicæ lineæ nomen initium ſit ex propoſ. 13. lib. 1. Con. Apollon. Satis eſt nunc, mi Tyro, vt noris lineam hyperbolicam fieri è ſectione coni, quæ nec ſit parallela alteri lateri coni, vt eſt in parabolica linea, nec vtrumque coni latus ſecet obliquè infra verticem, vt fit in elliptica; ſed è ſectione per alterum coni latus obliqua ita, vt planum ſecans & baſim coni ſecet, & ſi producatur extra ſectū coni latus, coincidat alteri lateri coni producto extra verticem. Vide figuram, in qua pro plano ſecante ſit axis AB, cuius ſectio ita obliqua eſt, vt producta extra CD coincidat in E lateri FC producto extra C, eſtque communis ſectio plani ſecantis, & ſecti coni terminus, ſeu linea curuata GAH hyperbolica.*

In exemplo figura.

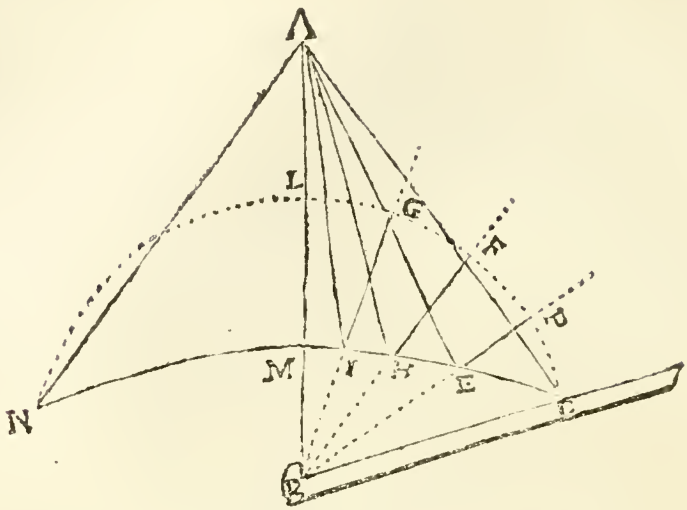
Hyperbolicæ lineæ deſcriptiones variæ apud nos alibi.

II. Hyperboles deſcriptiones per puncta geometrica habes apud nos, præſertim in Apiar. vbi docemus deſcribere aſymptotos ad hyperbolas, & in Apiar. 9, vbi ſolares hyperbolas deſignamus, & per pun-



puncta, & continuatà etiam euolutione gemini fili. Hic verba nostræ propositionis sunt de organicà, & paradoxicà duarum simul (vt in descriptione etiam ellipsis propositum fuit) linearum circularis, & hyperbolicæ. Huius porrò problematis specimen habes in Apiar. 6, vbi vnico ductu regulæ describimus figuram sub hyperbolicà, & circulari lineis concauis pro diaphano sphærohyperbolico, siue pupillari ad singularia in dioptricis. Hic alterum specimen dabimus, & regulæ ductu eodem describemus circularem, & hyperbolicam lineas ità, vt superficies ijs lineis intercepta sit sub concauà quidem circulari, at sub conuexà hyperbolicà lineà.

Igitur accipe duo quælibet puncta inter se distantia ad interuallum lubitũ si hyperbolicã lineã descripturus es liberè, sin applicatè, ad interuallũ datorũ pũctorũ (quæ vocãt ex cõparatione in oppositis, &c.)



Descriptio linearũ hyperbolicæ simul, & circularis.

&c. A, B. In B fige alterum extremum regulæ BC ità, vt circa clauiculum moueri possit. In A alterum fili extremum affige, & alterum adducito, atque immittito ad partes regulæ in C, ac pro regulæ longitudine, & hyperboles describendæ protensione id filum extendatur, ac tendatur, vt vides AC. Sit in C graphium regulæ infixum, & alterius graphy cuspis sit extra quidem regulam, sed filum premat ad regulæ aciem interiorem iuxta C. Manu dein dexterà dum regulę partes C ducis versus sinistram, eodẽ tempore sinistra premat, deducatq; graphio filum, & complicet secundùm regulæ latus, atque eo regulæ graphiorumq; motu incipient signari duæ lineæ ex C in D, & E, circularis CD, hyperbolica CE, deinde progrediendo ex D in F, G, &c. graphium supremũ, & immobile in regula reliquas peripheriæ partes describet, dum alterum graphium sinistrà filum complicando, & deducendo designat reliquum hyperboles EHI, &c. Cum regula peruenerit in L, ac erunt in eadem rectà ALME, & graphium secundum descenderit sub filo complicato in M, erit industriæ tuæ vel filum in alteram regulæ aciem transferre, vel manuum munia commutàre, vel progredi ex L in N quasi descendendo; vel apposità regulà ad N, eam reducere ex N versus L, vtrinsq; lineę alteram partem signando LN, MN.

MN. Vsus docebit quid sit magis vsui futurum. Nostrum est theoricè præcipere, & praxis huius fontem scientificum aperire, qui manat ex 51. propos. li. 3. Conic. Apollon. Vide nos in Apiar. 7. progym. 1. propos. 3.

In hac praxi descriptio peripheriæ abundat, vt videas ab eiusdem regulæ quolibet puncto fixo citra, vel vltra C lineam signari secūdā, ac diuersam à linea hyperbolicà, quam reliqua omnia eiusdem regulæ puncta designant, facta mobilia à graphio descendente, ac premente filum iuxta latus regulæ applicatæ. Licebit ergo omittere vsum graphij perstantis in C, & circulum signantis, ac vti tātum graphio mobili, quo filum iuxta regulam premitur, & complicatur, & motu regulæ circulari describitur hyperbolica linea NMIHEC.

III. Vsus hyperbolicæ lineæ communis, ac præcipuus est in Gnomonicis, vbi opus est terminare lineas horarias designatione hyperbolarum, quas tropici solis effingunt. Vide apud nos exempla in Ap. 9. Prog. 1. Vsus eiusdem lineæ apud nos est etiam in geometrià practice speculatiuà, scilicet in Ap. 3. vbi demonstramus miram illam affectionem lineæ hyperbolicę cum quadam recta, dum semper magis inter se accedunt, nec vnquam etiam in infinitum productæ possunt se contingere, quas vocant asymptotos. Quod enim apud Apollonium, & alios est theorema nos problema effecimus, ac docuimus ad rectas asymptotos hyperbolas ducere. Sed vsus omnes hyperbolarum superat is, quo nos in Ap. 6. diaphanum sphæro hyperboliforme prodidimus, in quo superficie conformata secundum lineæ hyperboliformis ductum, radiorum omnium refractiones vnum ad pūctum coguntur. Vide in eo Apiario 6. &c.

Vsus lineæ hyperbolicæ in Gnomonicis.

In Geometria speculatiua.

In dioptricis.

§. XII.

SCHOLION.

De lineà parabolicà.

Eius lineæ vsus tyronibus non adeo crebor futurus est in ijs operationibus, quæ exerceri solent cum iucunditate, & vniuersalitate quadam pertinēte ad totam mundi machinam astronomicam, dum quasi geometricè luditur in circulis cælestibus, & solis cursibus designandis vel in Astrolabijs, vel in Gnomonicis horarijs &c. Singularis paraboles vsus est in fabrica vstorij speculi,

Vsus lineæ parabolicæ præcipuus in Catoptricis.

culi, quæ res non est admodum prompti experimenti. Ac præterea paraboles descriptio (vt habes apud nos in Ap. 7.) vt plurimum designatur per medias proportionales. Quarum cognitio, & inuentio expectat Tyronem in lib. 6. Elem. Eucl. Ea propter hic censuimus non esse longiores moras Tyronibus imponendas. Vide interim nos abundè in cit. Ap. 7.

§. XIII.

SCHOLION.

Conchóis, & Quadratrix lineæ.

A*Liquarum aliarum mixtarum in plano descriptiones, miras affectiones, & vsus vide item in citatis Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ, velut sunt linea quadratrix in Apiar. 2. extremo; & in progym. 1. Ap. 3. Conchois, siue Conchilis Nicomedeæ descriptio geometrica, & organica pro asymptotis, & apud Eutocium pro duabus medijs proportionalibus. Quadratricis vsus insignes geometrici plures sunt apud Pappum, & apud Clauium, &c.*

§. XIV.

SCHOLION.

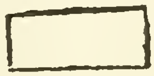
Indicata ex Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ ornamenta ad lineam rectam ab Euclide definitam, & ad alias hìc à nobis expositas.

L*Inearum geometricas mirificas affectiones. linearum vsus singulares in Machinarijs, in Opticis, in Musicis, in Gnomonicis, in Astronomicis, in Geometricis, in re nauticà, vestiarià, morali. &c. Vide in Apiar. 1. Prælog. 2. & Ap. 5. Prog. 1. cap. 1. fac. 2. col. 2. & fac. 3. col 1. & 2.*

SCHO-

SCHOLION.

Licet ſine appoſitione figuræ pateat forma lineæ rectæ, quemadmodum & ſuperficiei, &c. vt mox ab Euclide videbis, tamen pro rudioribus tyronibus inſpice hic, vt & in ſequentibus, &c.



V.

Superficies eſt, quæ longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini ſunt lineæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquali inter ſuas lineas iacet.

§. I.

SCHOLION.

Superficiei definitio varia, & elucidata.

Dum Euclides lõgitudinẽ, & latitudinẽ tantũ affirmat prõ ſupficie, idẽ eſt ac ſi affirmaret ſupficiẽ eſſe lõgitudinẽ, & latitudinẽ craſſitudinis exptẽ, vt lineã lõgitudinẽ latitudinis

dinis exptē dixerat. In superficie definiēda vtitur Geometra Mathematica abstractione, vt in pūcto, et linea. Proclus: sūpficiē alij corporis terminū ipsam definiuerūt, idē propemodū dicētes. Siquidem quod terminat ab eo, quod terminatur, vnà superatur distantià. *Idest, vt puncta, quæ lineæ sunt termini, superantur à lineis in distantia longitudinis; & lineæ, quæ superficiei sunt termini, superātur a superficie in distantia latitudinis; ità & superficies, quæ sunt termini corporis solidi, superantur à corpore solido in distantia altitudinis, siue profunditatis; estq; ideò superficies habens è tribus distantijs siue dimensionibus duas tantum, vt ait Eucl. longitudinem, & latitudinem. Ex his intelligis reliqua è Proclo:* Alij verò magnitudinem binis distantem interuallis *definiunt superficiem*. Alij demum aliter quoquo modo eius formant assignationem idem declarantes.

Altera definitio superficiei.

Tertia definitio superficiei.

Exempla mox addit apta concipiendæ notioni de superficie, ab agrimensione, ab vmbris. Superficiei autem cognitionem nos habere dicunt cum agros dimetimur, eorumque extremitates iuxta longitudinem, & latitudinem, distinguimus. Sensum verò quemdam capere vmbras inspicientes. Cùm enim ipsæ sine crassitudine sint eò quod interiorem terræ partem penetrare non possunt, latitudinem tantùm, atq; longitudinem habent.

Exempla physica superficies mathematica.

§. II.

SCHOLION.

Plani explanata definitio, & ad vsum planitierum.

Apud Antiquos Philosophos superficies, & planū pro eodem.

I. N*Otat Proclus à Platone, atque ab Aristotele, alijsq; antiquis Philosophis planum pro superficie vsurpatum, & planum apud eos non esse speciem superficiei. Ideò Plato 7. de Rep. affirmat Geometriam esse planorum cōtemplationem, opponens eam stereometriæ, quæ de solidis corporibus est, ac si idem sit planum quod superficies. Euclides verò rectè, vt lineæ speciem rectam posuit, sic & superficiei planam constituit speciem. Vt linea genus est quantitatis secundùm longitudinem inter suos terminos, qui puncta sunt, ita superficies genus est quantitatis secundum longitudinem, & latitudinem inter suos terminos, qui lineæ sunt. Vt*

Euclides rectè non planū ponit pro specie superficiei.

verò

verò linea recta species est lineæ habentis suas partes ex æquo inter terminos,&c. ita plana superficies species est superficiei habẽtis suas partes ex æquo collocatas inter lineas,&c. Quare rectum, ac planum sunt species in lineis, in superficiebus,& in solidis etiam corporibus. Vt in linea tres species, recta, circularis, mixta, sic in superficie tres species, superficies plana, circularis, mixta. Et corpora solida alia plana, seu sub planis superficiebus, alia sub circularibus, alia sub mixtis. Circa quæ vide ex Gemino apud Proclum plura, & egregia in varijs exemplis.

Tres superficiei species

II. Analogicè possis transferre definitiones rectæ lineæ quas attulimus in antecedentibus ad planam superficiem, vt sit non solum quę ex æquo suas interiacet lineas: *sed &* quæ breuissima est eádem extrema habentium superficierũ,& cuius media obũbrãt extrema .&c.

Plana superficiei varia definitiones.

III. Aliqui ad vsum definiunt: Plana superficies est, cuius omnibus partibus recta linea congruit. *Itaq; si superficiem aliquam lubeat ad perfectam planitiem exigere, vtere regula iam exacta ad perfectã lineæ rectitudinem (iuxta antecedentia, vbi de linea recta) atque aciem regulæ per planum ita traducito, vt tumoribus depressis cauitatibus eleuatis, congruat per omnes partes plano ipsi; eritque iuxta planę superficiei definitionem perfecte planum elaboratum.*

Praxis examinanda plana superficies.

§. III.

SCHOLION.

Ex definitionibus hactenus expositis Geometricæ quantitatis termini, ac natura (pręsertim puncti) compendio elucidata.

IGitur *ex antepositis definitionibus superficiei, lineæ, puncti sic mecum, mi Tyro, collige, atque intellige. Corporis quanti, siue solidi sunt termini superficies, superficierum termini lineæ, linearum termini puncta. Item: solidum est diuisibile secundum crassitudinem, latitudinem, longitudinem; supficies est diuisibilis tãtũ secũdum latitudinem,& longitudinem; linea est diuisibilis tantum secundum longitudinem; punctum neque secundum latitudinem, neq; secundum longitudinem est diuisibile, ergo indiuisibile, ergo* cuius nulla pars est.

Puncti mathematici definitio ostensiua

VIII.



VIII.

Planus angulus eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram inclinatio.

In directum iacere dicuntur duæ lineæ quando ex illis fit vna linea.

IX.

Si lineæ angulum continentes rectæ fuerint, rectilineus angulus dicitur.

§. I.

SCHOLION.

De anguli eſſentia, & Euclidis definitio propugnata, falſa Peletarij reiecta.

Definitio ãguli apud aliquos Antiquorum.

I. *ANgulum, vt refert Proclus, aliqui ponunt ſub prædicamento quantitatis, alij relationis. Plutarchus, & Apollonius dum angulum definiunt interualli, ſiue ſuperficiei in vno puncto ſub duabus lineis collectionem, indicant anguli quantitatem, quæ vario interuallo varia eſt. Euclides*

des affirmat esse lineæ ad lineam inclinationem. &c. Eius definitio sonat respectum, & relationem lineæ ad lineam. Conueniunt tamen prædicta in perfectiam anguli essentiam constituendam, & explicandam, & vnica Euclidis definitio perfectissima est omnia simul complectens. Nam (vt recte Clauius) non solum indicat linearum inclinationem, sed & connotat quantitatem variam superficiei sub variâ linearum inclinatione comprehensæ, estq; angulus maior, vel minor ex maiori, vel minori linearum ad inuicem inclinatione.

Euclidis definitio perfecta, quæ duo in angulo notat, &c.

II. Eapropter doctissimus Proclus (qui Euclidem hìc vocat Magistrum, deinde hìc etiam, vt & alibi aliquando, versus est ex interprete, ac propugnatore in oppugnatorem) immeritò carpit aliqua in perfectissima Euclidis definitione. Nam omnia dissoluuntur à nobis eodem modo, quo & alia in Euclidem obiecta alibi dissoluimus, scilicet obiectiones esse extra genus, de quo scribit Euclides. nã obiectiones sunt à curuilineis, & mixtis lineis, superficiebus, &c. Euclides verò in hisce 6. prioribus libris de rectilineis, & planis, &c scribit. Vt & hic angulum & planum, & rectilineum definit.

Euclidis definitio vindicata.

Esto igitur Cissoides, & Hippopeda lineæ, ac si quæ aliæ tales (de quibus relege antedicta de lineis, & Proclum, & nos in nostris Apiarijs) curuæ, mixtæ &c. (deniq; non rectæ) vnicà linea curuum, mixtum &c. angulum faciant, duæ tamen rectæ requiruntur ad angulum rectilineum.

Duarũ rectarum inclinatio requiritur ad angulũ planum rectilineum.

Esto Conum intelligas à vertice ad basim triangulo dissectum, & vnicam quidem in semiconio ad verticem triangularium linearum inspicias inclinationem, duos verò distinctos angulos, vnum planum, ipsius, scilicet trianguli, alterum in mixta coni superficie, comprehensum autem vtrumq; à iam dictis binis lineis. *Nihilominus tamen, quia mixta coni, & concaua superficies intercepta inter duas illas rectas est extra genus superficiei planæ, in qua sola hìc angulum planum definit Euclides, & præterea illa curua superficies est etiam extra planum trianguli facti è bisectione coni, nihil habet quod agat contra Euclidem, qui angulos planos in vno, eodemq; plano factos definit. Itaq; fit vt vnica inclinatio duarum rectarum vnicum angulũ efficiat in eadem scilicet planà superficie, vt recte docet Euclides. Vide tamen etiam aliam responsionem in paradoxis de angulo in fine sequentis §. 2.*

Vid. figurã priorem in seq. § 2.

Vnica inclinatio vnicũ angulum facit in eod. plano.

Habeo pro me, & contra se ipsummet Proclum, qui in fine cõmẽt. ad defin. 10. 11. 12. affirmat: Hìc quoque Auctoris nostri propositum in memoriam reuocandum censeo, quod scilicet de ijs sermonem habet, qui in vno plano consistunt anguli. *Er-*

Cõfirmatio ex ipso Proclo.

go, mi Procle, ingenium potius, quàm censuram exerces in Euclidem, dum illi obijcis angulum, qui continet conicam superficiem; &c.

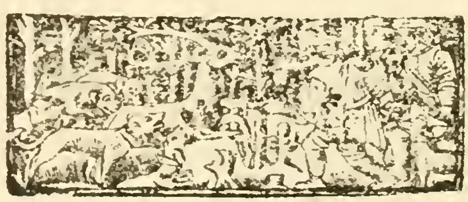
Verba: non in directū &c. non sunt superflua.

Deniq; neq; superflua sunt ea verba: Non in directum iacentiū, *esto ab orbicularibus aliquibus lineis, quæ sine dubio, cum sint orbiculares, nō possūt in directū iacere, fiāt aliqui āguli, tamē quia Euclides loquitur solum de rectis lineis, & earū aliquæ possunt ità inter se esse inclinatæ, atq; in directum ità iacere, vt productæ in vnam coëant lineam, ideò rectè excipit, ne iaceant in directum. Rectè Buteo: eà exceptione sublatà,* non habet definitio verum.

Anguli definitio à Peletario inepta.

III. Peletarius, qui pro libito ausus est multa in Euclide mutare, omittere, nouare, ideò meritò reprehensus est à doctioribus Euclidis interpretibus, præ cæteris à Io. Buteone, atque à nostro Clauio. Ille igitur Peletarius, qui se vltra præceptorem Euclidem extollit, angulum planum, aliter, quàm Euclides, ità definit: Angulus planus est duarum linearum in plano sectio. Cessante enim *(inquit)* sectione, cessat angulus. *Contra quem Io. Buteo sic:* Hoc autem non esse verum sic ostendo. Esto, si fieri possit, angulus duarum linearum sectio. Manifestum est autem, per corollarium decimæ quintæ primi, ex tali sectione quatuor angulos fieri quatuor rectis æquales. Quomodocumque igitur linea recta super lineam rectam constituta angulos fecerit, quatuor efficiet totidem rectis æquales. Non facit autem, sed duos tantum duobus rectis ęquales, velut proponit decimatertia primi. Non est igitur angulus duarum linearum sectio. Quod erat demonstrandum. Falsa est itaque Peletarij finitio. *Addit verò tamen sequelam, quæ rectè, ac breuiter subruit Peletarium. Nam ex eius definitione* sequeretur vnicum angulum planum nunquam posse constitui, quod est plusquam absurdum. *Duarum enim mutua sectio semper vno plures, nempe quatuor constituit.*

Critice Buteoni hoc negarit Peletarius, & eluserit argumentum.



§. II.

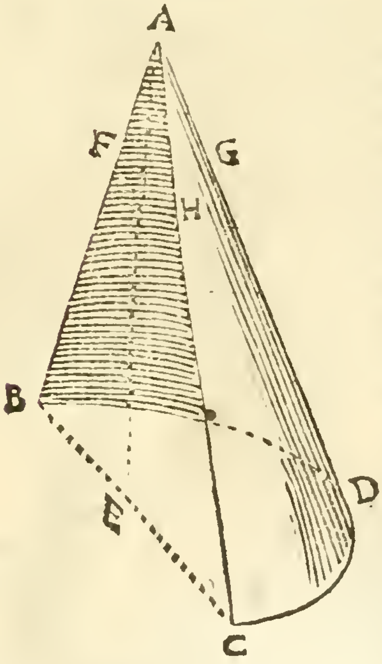
§. II.

PARADOXA,

Et nouum auctarium ad Euclidis definitionem de duplici angulo sub duarum linearum inclinatione. Definitio Euclidis rursum confirmata.

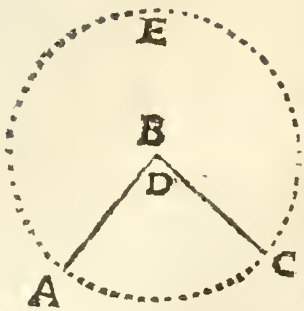
1. EX *obiectione Procli:* Duplex angulus sub vna linearum duarum inclinatione. *Finge coni intus caui superficiem sectam plano per axē à vertice ad basim, vt vides ABCD, & iuxta axem occultà lineà AE signatam planam superficiem comprehensam sub rectis BA, AC, curuam verò conicam superficiem FGH (cuius latus, seu dorsum indicat linea AD) sub iisdem BA, AC interceptam. Hìc ait Proclus, vnica est inclinatio ad a rectarum BA, CA, sub qua tamen duplex quātitas, plana BAC, & curua BDC duplicem angulum constituunt.*

Primū parad. xum.



Huic paradoxo, quod est in superficiebus plana, & curua, antequam respondeam, id nunc hic prius augebo, aut etiam dissoluam alio paradoxo in superficie planà solà; atque affirmo. Duarum linearum in eodem plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alterā inclinatio semper duos (non vnum solum) angulos constituit, alterum, quem intimum, seu citimum, siue concauum, alterum extimum, siue conuexum nominemus.

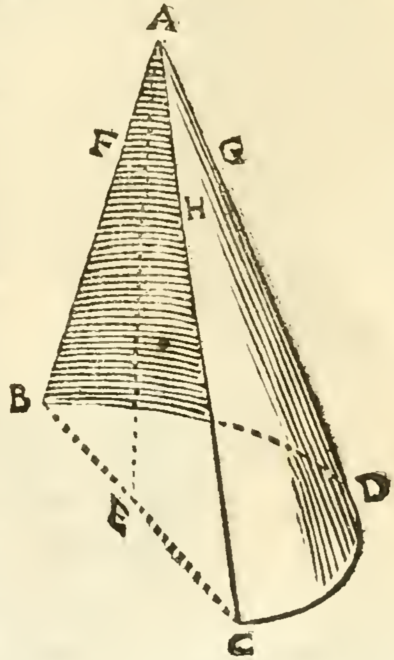
Secundum paradoxū.



Finge duas rectas AB, CB inclinatas ad angulum, quem faciant in B, affirmo hîc & inclinationes duas esse, & angulos duos. Est enim angulus communi sententia admissus, qui citimus, siue concauus est, ADC, cuius quantitas spectatur in citimis partibus, vbi D, comprehensa sub inclinatione linearum spectante ad D; est & alter angulus, quem extimum, siue conuexum nomino, qui pertinet ad exteriores partes B; ac si centro B signes occultam peripheriam, AEC, quãtitas eius anguli extimi spectatur in extimis partibus spectantibus versus E, & comprehenditur sub altera extima inclinatione rectarum AB, CB. Citimus Angulus comprehendit superficiei circularis partem sub ADC, extimus reliquã superficiem sub ABEC.

II. Habeo pro isto paradoxo primò Griembergerum, cuius verba è Scholio ad propositionem 14. Progym. 5. Apiario è meis 3. sunt.

Euclides in definitione anguli plani nihil aliud requirit, nisi vt in superficie planã duæ lineæ cõueniant ad idem punctum, & non iaceãt in directũ, hoc est non constituant vnam lineam cõtinuatam in sua specie; extra enim hunc casum duæ lineæ quęcunque illæ sint, semper faciunt aliquam inclinationẽ tam in hanc partem, quã in illam, hoc est siue inclinatio numeretur ab vnã lineã versus alteram procedẽdo ad dexteram, siue ad sinistram sursum, vel deorsum, &c. & hoc secundum sententiam Euclidis. Qui si præterea aliquid aliud ad dictã inclinationẽ requisiuisset, id omnino in definitione insinuare debuisset. &c. *Vide cætera ex eodem Griembergero in confirmationẽ prędictorum, inferius ad propos. 10. IX. 12. §. 2.*



Se-

Secundo habeo pro me Proclum ex parte in antecedentibus, qui sub inclinatione B A, C A ad angulum in A duplicem agnoscit angulum, alterum planum sub inclinatione citima, siue interiore B A C, alterũ extimũ, siue exteriorem sub curua conica superficie BDC, siue FGH, comprehensum ab extima, siue exteriore inclinatione earumdem rectarum B A, AC spectante ad partes D, vel G. Addo ego, vltra Proclum, verum esse paradoxum etiam in eadem planà superficie.

Tertio ex communi hominum sensu confirmo. Nam in domorum parietibus, circa quos biuia sunt, dicitur (ac verè) angulus non solum interior in cubiculo, sed & exterior vbi parietes inclinati inter se coeunt. Ac si in vijs accipias communes sectiones duorum angularium parietum cum pauimento horizõtali (quę communes sectiones, per 3. vndecimi, sunt rectæ lineæ) tunc apparet sub rectarũ illarum interiore inclinatione comprehendi aream pauimenti interioris cubiculi; at verò sub exteriore inclinatione earumdem rectarum comprehendi aream compiti, siue plateæ exterioris. Quapropter se tuetur nostrum paradoxum de nouo auctario angulorum extimorum; &c. Vide etiam inferius vbi de speciebus angulorum, ac de obtuso, paradoxum ex hoc paradoxo, item alia confirmatoria eiusdem paradoxi ad prop. 32. huius.

III Habes ex antedictis vnde Procli obiectionem in Euclidis definitionem aliter etiam dissoluas, quàm in antecedentibus, & Euclidis definitionem de angulo confirmes. Nam Euclides intelligendus est de superficiebus in eodem plano, vt respõsum est Proclo in antecedenti §. 1; & Procli obiectio nõ est de superficiebus in eodem plano. Præterea dicendum est ab Euclide spectari vnicam inclinationem citimã, & interiorem, & vnicam superficiei quantitatem sub interiore linearum rectarum inclinatione. At verò nos etiam cum Proclo ad paradoxum, & auctarium, spectauimus etiam exteriorem, ac extimam, &c.

Euclidi nihil officitur à paradoxis in hoc §. 2.

§. III.

PARADOXA;

Et plures angulorum planorum formæ indicatæ.

EVclides antequam definiat tres angulorum planorum, & rectilineorum species, rectum, obtusum, acutum, definit hîc genera superiora, nempe quid sit angulus, & anguli genus planum, & anguli plani genus rectilineum. Sunt enim anguli non plani, sed solidi, de quibus Euclides in posterioribus libris, vbi de stereometriâ. vide lib. 11, definit. 11.

Sunt & non plani, non tamen solidi, nec rectilinei si spectemus superiores definitiones rectæ lineæ, & planæ superficiei, scilicet anguli sphærales, qui sunt è curuis lineis circumferentiarum circulorum in sphæra maximorum; & in curuâ sphæræ superficie; Quorum vsus eximij sunt in Astronomia. De quibus Menelaus in elementis sphæricis.

Sunt, & anguli plani quidem, sed tamen non rectilinei. Quorum figuras pluriformes, genera, definitiones, miras affectiones vide apud nos in Apiar. 3, Progym. 5. sunt anguli lunulares, corniculares, pelecoides, cissoides, sistroides, &c. Inde plura sumere licet ad eruditè ornandas Euclidis definitiones de angulis planis, & rectilineis.

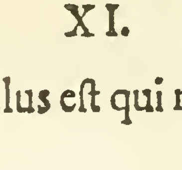
Aliqua licebit prælibare, sine demonstrationibus, ex lib. 3. de angulis curuilineis, & mixtis contactûs, semicirculi, &c. ad acuendam famem geometricam Tyronibus. Pollicebitur visum iri ab ijs angulos, qui quantumuis crescant, semper minores sint minimo acuto: fieri transitum ab angulo maiore ad minorem recto, nec tamen per æqualem, &c.



X.

Si recta linea ſuper rectam conſiſtens, eos, qui deinceps ſunt angulos ęquales fecerit, rectus eſt vterq; æqualium angulorum. Et inſiſtens recta perpendicularis dicitur eius, cui inſiſtit.

Linea AB conſiſtens ſuper CD dicitur perpendicularis. Anguli ABC, ABD dicuntur recti, dicuntur quoque anguli deinceps.



XI.

Obtuſus angulus eſt qui maior eſt recto.

XII.

Acutus qui recto minor eſt.

§. I.

SCHOLION.

Circa definitiones angulorum recti, acuti, obtusi notata, & cauta aliqua.

Aliter definitus angulus rectus.

I. *Posset ex ipsomet Euclide definiri angulus rectus etiam sic:* Angulus planus rectilineus rectus est duarum rectarum inclinatio, &c. quæ æqualis est inclinationi deinceps, si alterutra rectarum producatur in directum ex puncto inclinationis.



Finge CB non productam in D, & AB,BC inclinationem faciant ad angulum in puncto B, & à B producatur in directum alterutra, verbi gratia, ipsa CB in D: si ABC sit æqualis angulo qui deinceps ABD, vocatur ABC rectus. Pari modo si eadem CB non sit producta vltra B in D, & producatur AB vltra B, si angulus ABC sit æqualis angulo, qui fieret deinceps ad ipsam CB. &c.

Angulus rectus est determinatus.

II. *Notanda sunt verba Procli, quæ erunt pro firmamento decimi axiomatis, vt suo loco videbis. Vocat angulum rectum,* finitum semper atq; determinatum, eumdemq; manentem, neque accretionem, neq; decretionem suscipientem. *Paullo inferius addit:* Ad rectum relatione cæteros definimus rectilineos angulos, cum ipsi per se se indefiniti, indeterminatiq; sint. Siquidem in excessu, defectuq; inspiciuntur, quorum vterque per se indefinitus est. *Et superius consonè sibi de obtuso, & acuto:* Anguli circa rectum duplices, inæqualitate iuxta maioris, atque minoris naturam distincti, iuxtaq; magis, & minus motū infinitum habentes, cùm vnus quidem magis, & minus obtusus, alter verò magis, & minus acutus fiat. *Denique:* rectus & non rectorum mensura est, quemadmodum & inæqualium æqualitas.

Anguli nō recti determinantur à recto.

Martianus lib. 6. de nupt. Philol. & Mercur. Angulorum natura triplex est. Nam aut iustus est, aut angustus, aut latus. Iustus est qui directus, & semper idem. Angustus autem acutus est, & semper mobilis. Latus verò obtusus, mobilisq; similiter. &c. *Accipe prædicta saltem ad ornamentum, varietatem, & copiam.*

At

III At verò non malè reprehendit malam Zamberti versionem Ioannes Buteo, ex defectu vnius minimæ particulæ, siue articuli, quæ tamen omissio non minimi est absurdi causa: Zambertus: Obtusus angulus maior est recto. Acutus vero minor est recto. *Io. Buteo:* Hoc ita positum enuntiatio potius est, quæ græcè dicitur ἀξίωμα, quàm definitio. Ad verbum è græco sic erit. Obtusus angulus est, qui maior recto. Acutus verò, qui minor recto.

Zamberti mala versio.

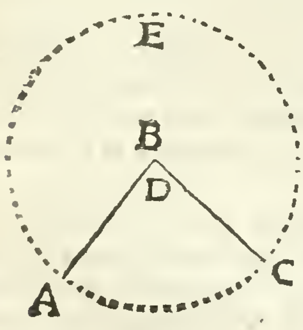
§. II.

PARADOXVM

De angulo rectilineo obtuso maiore duobus, ac tribus rectis.

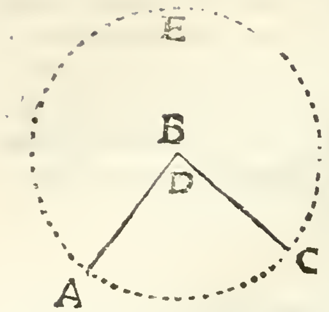
H*Vc aliqua à nobis pollicita, vbi de anguli definitione loquebamur, ex Griembergero vera quidem, & ingeniosa, sed tamen paradoxa extra vulgata sunt apponenda circa obtusi nouum genus. Igitur in nostris Apiarijs, Apiar. 3. Prog. 5. Schol. ad propos. 14 ita Griembergerus.* Euclides tres quidem tantum angulorum rectilineorum species definit, rectum, obtusum, & acutum, nempe eos, qui fiunt à linea recta alteri lineæ rectæ insistente: si tamen verba definitionis anguli obtusi ita accipiantur vt sonāt, non video cur non etiam dicatur obtusus ille, qui est maior duobus rectis, is enim, qui est maior duobus rectis, maior est etiam vno recto. Tunc solummodo quando duæ rectæ sunt vna linea continuata, non inclinantur. Denique non video sequi vllum absurdum, si propositiones Euclidis, in quibus agitur de angulis, absolutè intelligantur etiam de āgulis duos rectos excedētibus. Vtriusque certi generis anguli rectè mensurantur per arcum circuli ex ipso concursu linearum descriptum, & inter lineas interceptum. &c.

Euclidis definitiones intelligēdæ etiam de āgulis duos rectos excedentibus.



Adde Griembergero obtusum etiam fieri posse maiorem tribus rectis v. g. in figura, si ADC citimus, siue concauus sit recto minor, reliquus extimus,

Angulus rectilineus obtusus maior tribus rectis.



siue conuexus ABC erit, ad complemẽtum quatuor rectorum circa B, maior tribus rectis.

In qua figura etiam vides id, quod aiebat Griembergerus, nempe alterum angulum ADC mensurari arcu AC, alterum vero extimum ad partes B, et E mensurari arcu AEC. Quare ex antedictis constat paradoxum de angulo obtuso rectilineo maiore duobus, & tribus rectis. Vide ad 32. prop. huius alia huius paradoxi confirmatoria.

§.III.

SCHOLION PARERGICON

De alijs inuentis Griembergeri.

H*Oc paradoxum de angulo rectilineo conuexo, siue extimo, ac maiore etiam tribus rectis lusus est præ alijs pluribus, ac maioris momenti, quæ Griembergeri ingenium extra vulgata inuenit. Ac vt omittam pauculas, & exiguas illas laudes, & testimonia, quæ de eo viro habes apud nos in præfatione ad Lectorem in to. 1. nostrorum Apiariorum, accipe hic etiam ex Blancano præcessore meo in chronologia Illustrium Philosophorum Mathematicorum, sæculo vigesimo sexto:* P. Christophorus Griembergerus è Societ. nostra, qui ad astrolabium, & horologia attulit non pauca, ipso Clauio teste, nuper edidit catalogum veteres affixarũ longitudines, & latitudines conferens cum nouis. Item libellum de speculo vstorio, & appendicem ad practicam coni sectionem, cui annexa sunt consectaria, quæ circulorum contactui, sectionemq; angulorumq; curuilineorum concernunt. *Hæc bonà fide vt iacet apud Blancanum in appendice ad Aristotelis loca Mathematica in prima impressione Bononiæ 1615.*

II. Hæc tamen, quæ Blancanus breuissimè memorat de Griembergero sunt maioris & laboris, & momenti, & ingenij, quàm ijs appareant, qui sua fixo, aliena leui, ac volubili oculo tuentur, ac ideò in id incidunt Philosophi: Ad pauca respicientes facilè enunciant, immò

vero

vero & carpūt ea, quorum splendorem suis officere arbitrantur. Speculum eius vstorium ellipticum, quo solis (collocati in altero punctorum ex comparatione) radij centrales vehementissimi regerentur in alterum punctum ex comparatione vstorium &c. ingeniosissimum est non solum inuētione, sed etiam vsu, qui tamen haud facilis esse queat vel puro Mechanico, vel rudiori astrologo. In ea elliptica vstione animus aduertendus est ad abstractionem geometricam, de qua nos in fine prolegomenωn ante hunc lib. 1. Quam ignorāt si qui huic Griembergeri catoptrico geometricè demōstrato inuēto inuidēt. Sed nihil sibi magis inimicū habuit Griēbergerus, quàm suam ipsius modestiam, qua factum est vt ingeniosissima sua inuenta neglectui, & obliuioni habuerit. Singulare in eo id fuit, quod Archimedis exemplo acutissimas theorias mirificis praxibus iungebat. Extant plura & optica, & machinaria experimenta in Coll. nostro Romano: quæ aliquādo Principum virorū illuc inuisentium oculis, & admiratione exhibita sunt.

Inuentum Griembergeri de speculo elliptico vstorio ingeniosū non procul ab ingenijs.

Griembergeri modestia, et theorica addita praxes ingeniosa.

III. Extant inter eius posthuma aduersaria vestigia aliqua plurimarum demonstrationum, quas ille acuminis geometrici plenissimas ad imitationem Apollonij condiderat de conis spectatis supra basim non circularem, sed ellipticam. Item & plurima problemata, atq; in primis de anguli visorij verà, & præcisà quantitate geometricè practicè inuenienda, sub qua apparere debent obiecta, quæ longinqua simulant pictores in tabulis, ità vt geometricè, ac demonstratiuè determinetur quantitas, quæ debetur ijs obiectis in tabula pictorià. Quæ res tanti fiebat à doctis Griembergeri amicis, vt ea sola videretur digna, quæ dignum immortalitate suum efficeret inuētorem.

Geometrica scientia recondita in Griembergero.

Opticum eius arcanum.

IV. Pollebat Griembergerus præcipuè in eà Mathematicæ Philosophiæ parte, quæ verè demonstratiua, & acutissima, & præcipua est, nēpe in theoricà Geometricà. Extat prætereа eiusdem Griembergeri descriptio, & vsus instrumenti exactissimi, quo per latitudines horizontales horaria omnia muralia facilè describuntur ad omnem poli eleuationem. Quod instrumentum cum haud pridem in meas manus venerit, publicum faciam in fine secundi tomi harum applicationum Geom. Omitto alia eiusdem opuscula, Euclidis ab eo breuiariū. &c. Habes & in Apiar. nostro secundo (præter alia in reliquis Apiarijs è censura Griembergeri) modum illum exactum, quo vir ille tangentem ducit ad terram pro terrenæ molis dimensione. Ex hisce, atque alijs vestigijs Geometricis, Astronomicis, catoptricis, opticis, Gnomonicis, &c. conijce (ò quicumque alienæ gloriæ non inuides) quantus ille fuerit Griembergerus, cuius etiam censuræ magnus ille Clauius suas aliquando submisit lucubrationes, & aliqua eius Gno-

Gnomonicum instrumentū Griember.

monica inuenta commemorat, & quodammodo præ suis habet, & cuius nos authoritate, ac scientia (accedentibus etiam rationibus) prędicta de angulis paradoxa muniuimus. Vide tamē ad 32. propos. huius alia confirmatoria circa angulum rectilineum maiorem duobus, vel tribus rectis.

§.IV.

SCHOLION.

Expensa penè singula verba definitionum recti, acuti, obtusi produnt Euclidis ingenium, & plura paradoxa. Aliqua de angulis sphæricis.

I. V*Vlt Euclides angulos, vt sint recti, esse æquales, non alijs, sed inter se. Sūt. n. āguli plurimi inter se inæquales, alijs tamē ęquales vt obtusus obtuso, acutus acuto alicui alteri, nō tamē acutus, & obtusus sunt recti, sed recti sunt qui inter se sunt æquales. Nec hoc satis, sed Geometra vult esse (vt sint recti) æquales deinceps. Obtusus enim alteri obtuso, acutus alteri acuto possunt esse æquales inter se, nec tamen recti sunt, sed ij tantum, qui inter se æquales sunt, ac deinceps ad eandem rectam. Ideo rectè Proclus:* Particula illa *deinceps* addita, mihi nō videtur esse superflua, vt quibusdam nō recte visum est, sed rectitudinis rationem ostendere. Ideò enim vterq; angulorum rectus est, quia cum sint deinceps, æquales sunt. Siquidem quæ insidet recta linea propter inflexibilitatem ad alterutram partem, æqualitatis ambobus est, & vtrique rectitudinis causa. Non igitur absolutè ad inuicem æqualitas, sed cōsequenter positio, vnà cum æqualitate, causa est angulorum rectitudinis.

Anguli recto maiores ac minores nec tamen obtusi, vel acuti.

II. Præterea cùm Geometra definit acutum esse eum, qui recto minor est, caue inferas: ergo omnis recto minor est acutus. Item cum definit, obtusum esse eum, qui recto maior est, male intuleris: ergo quilibet recto maior est angulus obtusus. Sunt enim pluriformes anguli recto minores, ac maiores, nec tamen acuti, aut obtusi. De quibus vide nos in Apiario nostro 3. Prog. 5. vbi de angulorum paradoxis. Angulus cōtactus est recto minor, nec tamen acutus, aut vlli acuto æqualis,

lis, sed quolibet acuto minor, per 16. prop. lib. 3. & ex eadem angulus semicirculi est minor recto, nec tamen acutus, sed maior quolibet acuto, & per 31, lib. 3. angulus segmenti minoris semicirculo est minor recto, nec tamen acutus, sed modo maior, modo minor acuto. Angulus verò segmenti maioris semicirculo est maior recto per cit. 31. lib. 3. nec tamen est obtusus, sed modo maior, modo minor obtuso. Horũ omnium paradoxorum figuras, exempla, solutiones vide in cit. Ap. 3.

Hic interim ad excludenda prædicta paradoxa intelligendum est genus angulorum, quos hìc definit Geometra, nempè angulorum rectilineorum. Paradoxici autem ij anguli sunt mixti e rectis, & curuis circularibus lineis.

Definitio Euclidis excludit paradoxa.

III. Paradoxum item esto: Anguli recti, obtusi, acuti, nec tamen rectilinei: *Scilicet sphærici. Quorum cognitio non parùm proderit tyroni affectãti Astronomica, pro quibus triangula sphærica à pluribus explicata sunt. Ante quæ apud Clauium habes definitiones 2, 3, 4 de ãgulis rectis, obtusis, acutis sphæricis. Ac definitio quidẽ ãguli recti sphærici posset aliter, quã ibi, ex vestigijs hìc Euclidianis definiri sic:* Cum in sphæræ superficie duo arcus circulorum maximorum ita se secuerint, vt angulos deinceps æquales fecerint, rectus est vterque æqualium angulorum sphæricorum.

Etiam nõ rectilinei recti, acuti obtusi.

Deinde rectè vt et hic Euclides, & ibi: Angulus sphæricus obtusus est qui recto maior est. Acutus verò, qui minor est recto, *scilicet sphærico.*

Ex Euclidis vestigijs definitio nostra anguli recti sphærici.

§. V.

SCHOLION.

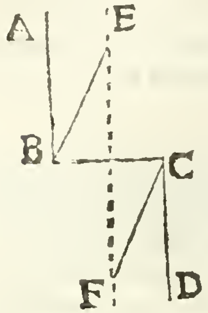
Aristotelis quæstio de angulo recto sessionis, ac quietis, & alia erudita.

V*Erba Philosophi sunt in quæst. 30. Mechan.* Cur surgentes omnes femori crus ad acutum constituentes angulum, & thoraci similiter femur, surgunt? Quod si non, haud quaquam surgere poterunt: An quia id, quod æquale est quietis vbiq; est causa, rectus autem angulus æqualitatis est, stationemque facit? Quamobrem ad similes fertur angulos ipsi terræ circumferentiæ: non enim quod ad rectum est ipsi pauimento. An quoniam surgens

Quod æquale est quietis vbique causa.

Angulus rectus æqualitatis.

gens sit rectus, stantem verò necesse est perpendiculũ esse ad terram? Siquidem igitur ad rectum debet esse, hoc autem est caput secundum pedes habere, & fieri oportet cum surgit. *Pro sequentibus Philosophi verbis appono figuram; ac pergit Philosophus* Quandoquidem igitur fuerit sedens, secundum parallelum pedes habet, & caput, & non in æquali. Caput sit A, thorax AB, femur BC, crura CD, ad rectum autem sit & thorax, vbi AB ipsi femori, & crura femur sic sedente. Quamobrem eo se habētem modo surgere est impossibile, necesse autem est crus reclinare, pedesq; constituere sub capite; hoc autem erit si CD fiet vbi CF, & simul surgere continget, & in eadem æquali habere caput, & pedes. ipsa autem CF acutum facit angulum ad ipsam BC.



Verbis Philosophi nostram interpretationem nõ interponimus, sed tantum apponimus sequentia ex Philosopho quærente cur dùm à sessione surgimus, inclinamus ad angulos acutos caput antrorsum, & crura retrosum? vt vides in figura ex A in E, ex D in F fieri declinationes, & discessiones ad ãgulos acutos EBC, BCF. Rationem duplicem affert. Prima quia surrecturi discedimus ab angulo recto, qui angulus quietis est, ergo mutamus angulos à rectis in acutos. Secunda quia surrecturi aptamus nos, & extrema nostra caput, & pedes in lineam horizonti pependicularem, quæ fingitur ire per EF.

A sessione surrecturi cur acutũ angulũ ad femur faciamus.

Ad confirmationem Aristotelicæ doctrinæ faciunt primo statuæ sedentum antiquæ recta ex arte factæ, quægeminos conficiunt angulos rectos ad femur, & ad genua. Docetq; nos experientia eam ad rectos sessionem esse percommodam. Secundo rectum angulum esse quietis, & stabilitatis docent corpora rectis angulis constantia, quæ sunt stabilia, ceu quadratum, cubus, &c. propter quæ Pythagorici Philosophi terram cubicam dicebant.

Anguli recti in statuis ãtiquorum sedentibus.

Anguli recti quietis, & stabilitatis.

§. VI.

COROLLARIA

Ad vſus politicos ex verbis Ariſtotelis cum eruditione Geometrica.

NOtanda ſunt verba Philoſophi : Id quod æquale eſt quietis vbiq; eſt cauſa. *Politicè, ac moraliter interpretor. In rebus publicis quies, & pax ſeruatur dum æqualitas iuſtitiæ ſeruatur, ſed tamen geometricè, ac proportione, vt non ſolum vitijs pœnæ, ſed & virtutibus præmia erogentur, ac maiora dignioribus. Mox addit Philoſophus :* Rectus autem angulus æqualitatis eſt. *Quia omnes anguli recti ęquales, ac fiũt à recta linea ęqualiter vtrinque ſtante, vel inclinata ſuper rectam. Rectitudo tamen politica aliquam poſtulat in æqualitate inæqualitatem. Nequè enim omnes in eodem cenſu reponendi ſunt; ſed virtutis, meritorum, ætatis, laborum, muniorum, conditionis habenda ratio eſt.* Summa enim æqualitas (*rectè Plinius ſecundus in panegyrico ad Traianum*) ſumma inæqualitas eſt.

Aequale cauſa quietis politicè, & moraliter.

Aequalitas geometrica in rep. ſeruanda.

Summa æqualitas inæqualitas eſt, &c.

§. VII.

Morales vſus à linea perpendiculari, & ab angulis.

P*Rater ea, quæ moralia habet Proclus de linea perpendiculari, & angulo recto, accipe ad eius Philoſophi exemplum etiam hæc noſtra neſcio quæ. Perpendicularis linea, quæ vtrimque æquales, hoc eſt rectos, cõſtituit angulos, quæque inter duo puncta breuiſſima eſt, ac proinde vnica, & certa eſt menſura, ſymbolum eſt viri boni neutram in partem à rectitudine virtutis declinantis; quem Philoſophus in morali Nicomach. vbi de medio virtutis, regulam eſſe vult honecti, vt id honeſtum cenſeatur in tam denſis tenebris humanarum actionum, quod cẽſuerit vir bonus. Quemadmodũ*

Linea perpendicularis ſymbolũ eſt viri boni & prudentis.

idem

Prudentia certa mensura est agendorum certitudine morali.

Angulus rectus virtutis,--

-- Acutus vitij deficientis,--

-- Obtusus alterius extremi excedentis.

idem Philosophus rectam, ac certam agendorum rationem, ac mensuram appellat prudentiam. Certa mensura, & infallibilis est infallibilitate morali, quæ nõ tenetur prouidere quidquid accidere potest, sed id tantùm, quò pertingit consueta humana prouidentia; quidquid secus accidat.

Angulus rectus virtutis est, angulus medius inter excedentem obtusum, & deficientem acutum. Angulus acutus est alterum extremũ vitij per defectum. Angulus obtusus est alterum vitij per excessum. Virtus est medium vitiorum vtrinque reductum. *Vnus rectus, plures acuti, & plures obtusi à recto per defectum, vel excessum recedentes.* Multipliciter enim *(inquit Philosophus)* contingit errare. *Vnica in suo quæq; genere virtus est. Angulus rectus angulus quietis est etiam moraliter: animus enim in solo virtutis medio, & æquo conquiescit.*

§. VIII.

SCHOLION

De incessu animalium ex angulis.

Ambulatio est angulatio.

AMbulare nihil aliud videtur esse, quàm angulare, & cruribus ad femur angulos efficere. Incessus ergo animalium est Geometricus. Sed vide suo loco insertus ad definitionem 24. curiosa, & ingeniosa ex Arist.

§. IX.

§. IX.

VSVS

Anguli recti, & Indicatæ propositiones Euclidis pro examine geometrico normæ, anguli recti. Normæ laudes ab vsibus.

Modi tres ponuntur partim à Tartalia, partim à Clauio examinandi rectum normæ angulum ex 48. propos. lib. 1. (qui desumptus est à Vitruuio) è 27 lib. 3. & eius Scholijs; è 31 eiusdem tertij.

Nos quartum ad 9. & 11. propos. lib. 1. ponemus ex circino proportionum. Ac reliquos etiam modos in sua loca, vbi suas habent demonstrationes, reijciemus. Eos ibi à nobis expecta.

Normam angulus rectus efficit, & norma est pro exigendis rebus ad angulos rectos. Normæ inuentorem affirmat Vitruuius cap. 2. lib. 9. Pythagoram, idq; eius inuentum mirificè laudat. Daniel Barbarus, comment. in id caput de anguli recti (ac normæ) vtilitatibus: Tanta vero anguli recti vis in rebus emetiendis, in ædificijs construendis, in horologijs formandis, in omnibus deniq; astronomicis instrumentis componendis, vt nihil aut fieri, aut intelligi possit, sine recti anguli vsu, & ratione. Excellentissimum igitur omnium instrumentum normam dixeris, &c. *Reliqua inferius ad 47. propos. huius lib. 1. elem. Geometricorum.*

Normæ inuentor Pythagoras.

Quanti vsus anguli recti.

XIII.

Terminus eſt, quod alicuius eſt finis.

XIV.

Figura eſt, quæ ſub aliquo, aut aliquibus terminis continetur.

Circulus continetur ſub vna linea circulari.

§. I.

SCHOLION

Implicantia in figura infinita.

Figura eſt quantitas terminata, &c. ergo nõ interminata, et infinita.

DEfinitio 13, & 14. *coarguunt implicantiæ ſi qui ſunt, qui in ficto infinito creato, ſeu creabili figuras infinitas admittunt. Rectè enim Clauius ad eam.* Termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, figura vocari nulla ratione poteſt. *Eſt enim ex definitione, figura terminata, finibus circumſcripta, ergo nõ infinita, ſeu ſine terminis. Plura hîc diſputent ij, qui verſantur in genere Philoſophiæ diſceptatoriæ, ſeu contentioſæ, qualis, ob certitudinem, non eſt Philoſophia Mathematica.*

§. II.

§. II.

SCHOLION

De Figurarum geometricarum dignitate.

I. OMitto eam figurarum geometricarum dignitatem, quam sæpius Proclus, atque alij Platonici deprædicant, scilicet quam habent in abstractione Mathematica, vbi à materia immunes perfectissimè, ac purissimè sunt in anima, quasq; præcipuè spectat Mathematica Philosophia De quibus idealibus figuris vide plura, & præclara apud citatum Proclum, & Platonicos, & relege apud nos in cap. vltimo prolegomenon de abstractione &c.

Dignitas figurarum mathematicarū abstractarum.

Hic tantùm paucula verba ex eodem Proclo ad hanc 14. defin. accipe: Cùm Geometra eam, quæ in Phātasia est, cōtempletur figuram, hancq; primum defin at (siquidem sensibilibus etiam definitio hæc secundo loco congru t) figuram esse ait, quæ &c. *In antecedentibus vide apud ipsum exemplum speculi, quo explicat delectationem animæ contemplantis in se figuras Mathematicas.*

Dignitas figurarum mathematicarum etiam in materia physica.

Figura mathematica hominis vestigia.

II. His missis, eam hic nunc indico dignitatem geometricarum figurarum etiam in materia viliore descriptarum, in puluere, in arena, &c. quam dignitatem prodidit vnico verbo Aristippus Philosophus Socraticus. De quo Vitruuius initio Proëmij in librum sextum narrat, præter cætera. Aristippus naufragio cum eiectus ad Rhodiensium littus, animaduertisset Geometrica schemata, exclamasse ad comites ita dicitur: Bene speremus, hominum enim vesti gia video. *Itaq; Geometrice Tyro, quot Geometricas figuras hic in Euclidis, atq; in aliorum Philosophorum Mathematicorum libris contemplabere, totidem scientifica, & honorifica hominum vestigia verebere. Ac quo quisq; plures figurarum geometricarum formas mathematicè philosophando animo impresserit, eo plura in se habebit hominis vestigia. &c.*



XV.

Circulus eſt figura plana, ſub vna linea contenta, quæ peripheria dicitur, ad qnam omnes lineæ ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt, cadentes, æquales ſunt.

§. I.

SCHOLION

Circuli definitio ad græci codicis fidem caſtigata.

In elementis Geometricis nihil vel adijci, vel detrahi poteſt citra vitium.

N*On bona fide aliqui interpretes definitionis Euclidianæ in græco codice verba vel omiſere, vel imperfectè interprætati ſunt* εὐθεῖαι, & ἀλλήλαις. *Vertendum erat: rectæ lineæ; & : inuicem. Nam rectè Io. Buteo*: Non omnes lineæ generaliter, ſed rectæ ſolum ex centro in peripheriam ſunt inuicem æquales, & verbum: inuicem, aufertur non leui diſpendio ſenſus. Eſt enim imperfectum hìc, atque confuſum dicere lineas æquales, ſi non adieceris: inuicem; vel: inter ſe. Caue credas in elementis quicquam citra vitium vel adijci, vel detrahi poſſe. *Rectiſſimè hanc definitionem vertit Clauius.*

§. II.

§. II

PARADOXA

Circuli ex eius causali definitione, siue geometrica procreatione, ac essentia.

Campus ad laudes circuli.

Q*Vàm multa? quàm erudita congerit Proclus ad hanc 15. definit. Euclidis? in Deo, in Intelligentijs, in animis, in corporibus cæleſtibus, elementaribus, in generationibus, corruptionibus, in fortuitis, &c. omnia circulariter peragi oſtendit. Vide apud eum, atque ijs etiam noſtra hæc in ſequentibus paragraphis appone.*

Altera circuli definitio.

Affert Clauius aliam deſcriptionem, ſeu definitionem circuli: Circulus eſt figura plana, quæ deſcribitur à linea rectà finità circa alterum punctum extremum quieſcens circumducta, cùm in eumdem rurſus locum reſtituta fuerit, vnde moueri cæperat. *Secunda hæc definitio videtur cauſalis iuxta explicata ad antecedentes definitiones. Efficit, & cauſat circulum lineæ ille circumductus in altero extremo, &c. Cum ergo ſit circumactus eiuſdem rectæ, ideò à centro ad circumferentiam omnes lineæ ſunt æquales.*

Hæc circuli geometrica formatio fortaſſe occaſionem præbuit Philoſopho initio Mechanicarum quæſtionum animaduertendi in ea figura mira paradoxa.

Circulus deſcribitur ex contrarijs.

I. Maximè admirandum eſt ſimul contraria fieri. Circulus verò ex huiuſmodi eſt conſtitutus. Statim enim ex commoto effectus eſt, & manente, quorum natura ad ſe inuicem eſt contraria. *Primum paradoxum eſt quòd oritur circulus ex eadem linea immota in altero extremo, & mota in reliquis partibus.*

Lineæ circulum deſcribentis omnia puncta inæqualiter mouentur.

II. Præterea vnica exiſtente, quæ ex centro eſt, lineà, nullum aliud alij, quæ in illa ſunt punctorum æqua velocitate fertur, ſed citius ſemper quod à manente termino eſt remotius. *Secundum hoc paradoxum ſatis apertum eſt in ipſius verbis Philoſophi de Semidiametri motu, cuius ſingulæ partes eodem tempore inæqualibus motibus mouentur in eadem linea, celerius quæ remotiores à centro, &c. Vide inferius ad ornandum 3 poſtulatum curioſa, & admiranda ad hoc 2 paradoxum circuli ſpectantia.*

III. Pa-

III Paradoxū in circuli termino, seu peripheria: In primis lineæ illi, quæ circuli orbem amplectitur, nullam habenti latitudinem contraria quodammodo inter se apparent, concauum scilicet, & curuum. Hæc autem eo à se inuicem distant modò, quo magnum, & paruum, illorum etenim medium est æquale, horum vero rectum. Quapropter cum ad se inuicem commutantur, illa quidem prius æqualia fieri necesse est, quam extremorum vtrumlibet. Lineam vero rectam quando ex curua concaua, aut ex huiusmodi rursus curua fit, & circularis. Vnum quidem igitur istud absurdi inest circulo. *Constat peripheria ex contrarijs, & extremis sine medio, ex concauo, & conuexo sine recto; eoq; mirius quòd simul sunt ea contraria in eodem indiuisibili, hoc est in eadem linea, circulari, quæ, vt linea* est (ex definitione 2.) latitudinis expers.

In circuli peripheria sunt cōtraria simul in indiuisibili.

§. III.

PARADOXVM

De infinito, quod actu quibusdam videtur esse in finita circuli peripheria, explicatum à nobis in Aristotelica sententia.

IV. *Hoc esto, iuxta aliquos neotericos, paradoxum, cui nos tamen fundamentum, & veram interpretationem suggerimus è veteribus Philosophis. Arist. quæst. 8. mechan. dum affirmat de circulo, quod in plano non offensat, affert rationem.* A terra enim semotus est angulus *Q. asi dicat: circulus in qualibet peripheriæ parte totus est angulus, in qualibet sui parte à plano vtrinque in angulum recedens.*

Et Geminus apud Proclum lib. 2. ad defin. 4. de linea, linearum duo ponit genera, compositas, & incompositas. Compositas appellat eas, quæ refractæ sunt, & angulum efficiunt. Compositarum duo rursus genera ponit, aliæ enim lineæ compositæ figuram non efficiunt, sed in infinitum productæ spatium intra se vndiq; non concludunt, vt rectæ, & curuæ sectiones conicæ hyperbolicæ, parabolicæ, & conchilis, &c. aliæ verò lineæ compositæ seu inter se inclinatæ, atq; angulatæ figurā efficiunt. Sub quarum compositarum linearum genere nominatim ponit lineam circularem. Itaq; linea circularis est linea composita, siue refra-

Linearum diuisio, & genera.

Linea circularis est composita. &c.

refracta, & angulata in singulis sui partibus.

Ac sane si quamlibet figuram regularem multiangulam velis ad circularem redigere, necesse est vt quælibet partes rectarum, quæ intercedunt inter angulos, infringantur & ipsæ in angulos. Nec ante ambitus angulatus cuiuscumq; figuræ poterit fieri perfectè circularis, nisi omnes omnino particulæ incuruentur, & inter se inclinentur, siue angulentur (est enim angulus ex defin. Eucl. duarum linearum non in directum &c. inclinatio) nec vlla earum in directum iaceant.

Linea circularis tota est angulata.

Quibus præpositis, quid si quisquam ita ratiocinetur? omnes anguli, in quos infringi potest totus ambitus cuiuslibet figuræ regularis, sunt infiniti. Quælibet enim pars ambitus nō āgulata potest angulari, inclinari, atq; infringi, ceu quātitas cōtinua potest in infinitū secari.

At cùm ambitus figuræ regularis redactus est in lineam perfectè circularem, totus (iuxta explicata in antecedentibus è veterum Philosophorum sententia) redactus est in qualibet sui parte in angulos actu existentes in qualibet particula peripheriæ, quę actu in qualibet sui parte incuruata est, & concauè, & conuexè inclinata; ergo in peripheria sunt actu infiniti anguli.

Isthæc paradoxo firmando ratiocinatio fauere videtur ijs, qui actu infinita puncta locant in peripheria. Anguli enim sunt inclinationes, & nutus duarum linearum ad vnum punctum, & angulares illæ fracturæ videntur actu puncta constituere. Sunt vero in peripheria infinitæ (immo tota est) inclinationes, & quasi infractiones.

In peripheria videtur esse actu infinita puncta.

Sed veram interpretationem peracuti huiusce paradoxi habes à Philosopho in citatis verbis A terra remotus est angulus, *si verba interpretere de circulo, qui totus est angulus a plano recedens in qualibet minima sui parte. Itaq; quemadmodum recta quælibet linea non habet in se actu (sed tantùm per designationem) inter se diuisas particulas, siue puncta, in quæ infinita, siue finita in infinitum potest diuidi, ita circuli peripheria est quidem actu tota angulata, immò tota actu angulus quidam perpetuus, & continuus, non tamen habet actu discretos vllos in se angulos; quos finitos in infinitum licet in ea per imaginationem designare. Traducitur igitur cuiuslibet figuræ regularis ambitus in actum continuatum, non in actum discretum omnium possibilium ex eo ambitu angulorum, dum redigitur ad circularem ambitum, idest tota fit angulus: &c.*

Circulus est à terra remotus angulus. Aris.

A sana interpretatione verborũ Aristotelis pendet solutio paradoxi de infinitis actu angulis, & punctis in peripheria.

Iuxtaque interpretationem de infinito, vt vocant, syncategorematico nihil patitur detrimenti a proposito paradoxo Aristotelica assertio, quæ infinitum negat categorematicum.

Aristotelis sententia de infinito asserta.

§. IV.

§. IV.

SCHOLION

De causa mobilitatis in circulo.

PHilosophus in citata quæst. 8. Mechan. Cur ex figurarum genere quæcunque rotundæ, & circinatæ facilius mouentur?

Hic rationem appono ex 4. antec. paradoxo de peripheriæ angulositate, &c. Inter cętera sic affirmat Philosophus iuxta paradoxum antepositum de infinitis angulis in circulo. An celerrima huiusmodi sunt, quoniam parua sui parte planum contingunt, veluti circulus secundum punctum, & quoniam non offensant? a terra enim semotus est angulus. Præterea etiam cum obuiam fiunt corpori, id rursum secundum pusillum tangunt. Si autem rectilineum esset, rectitudine sua multum plani contingeret. *Peripheria igitur, quia angulus est perpetuus, siue tota inclinata est quasi in angulos infinitos, minime tangit planum, ac nullam patitur moram ad motum. Alteram rationem ex eodem Philosopho accipies inferius a diametris circuli, vt videbis ad defin. 17. & 18.*

§. V.

SCHOLION

De motu perpetuo circulari.

PRaxes motus circularis perpetui ad vsus varios vide attentatas in Apiar. 4. Progym. 1. propos. 10. 14. 15. Motum circularem perpetuũ aquarum in orbe terrarum vide in eodem Apiar. progym. 1. coroll. 1. propositionis 15. Vide & ad condiendum Euclidis circulum in eod. Ap. 4. prog. 2. vbi egregia de miraculis machinarijs, & viribus miris in aliquibus mach. à circulo.

§. VI.

§. VI.

PARADOXA — Alia circuli, & ab eo omnia machinaria miracula.

Post allata ea paradoxa circuli, quæ ad geometricam eius generationem, & eßentiam pertinent, addamus ad Euclidis ornamentum, & condimentum aliqua alia de circulo paradoxa.

V. Ergo sit paradoxum in circulo, quòd, cùm figura sit, hoc est, ex antecedenti defin. 14, & nostris ad eam notis, sit conclusa terminis, ac finita; tamen in finito habet ratione infiniti. Etenim orbis peripheriæ circularis initio caret, & fine. Nullum enim est punctum, in quo initium eius videas, nullum in quo eius finem, nisi per designationem arbitrariam ita, vt vbiq; initium, vbiq; finis designari possint.

Infinitæ quadam in periphæria.

Motus item circularis infinitus esse potest, & tamen mobile semper in eadem vel orbita, vel in eodem prorsus loco est. &c. Ac meritè Superioribus corporibus, & globis cælestibus, vt potè dignioribus, mirificus circularis motus, atque incorruptis vniformis, ac perpetuus est attributus.

Motus circularis infinitus.

Cælis aptus motus circularis.

VI Esto paradoxum, quòd idem circulus motibus mouetur contrarijs. In Philosophi citato loco ante quæstiones mechanicas: Quoniam autem secundum contrarias simul motiones mouetur circulus, & alterum quidem diametri extremum in ante mouetur, alterum vero ad retro, efficiunt nonnulli vt ab vnica motione multi contrariò simul moueantur circuli. Quemadmodum sunt illi, qui in locis proponuntur sacris, æneos, & ferreos fabricantes orbiculos. *Mox:* Hanc igitur in circulo existentem animaduertentes naturam Architecti instrumentum fabricant celantes principium, vt machinæ solum manifestum sit illud, quod admirationem præstat, causa verò lateat. *Dictorum specimen vide in figura non solum apud Philosophum, sed etiam in Apiar. 4. progym. 2. propos. 4. & in Scholijs primo, & secundo, vbi vires admirandas Glossocomi prodimus, & cum eruditione contrarias illas circulorum ex mutuo connisu motiones explicamus.*

Circulus motibus cietur cõtrarijs.

Machinæ mirè ludices à circulis.

VII. Ex Philosopho plura circuli, immo in circulo miracula, cūcludamus, & vniuersam eam Philosophiæ Mathematicæ speciem, quam antiqui miraculorum effectricem appellarunt, Machinariam scilicet, circuli partum verè affirmemus, ac plura in vno paradoxa sint. Absurdum (*ait Philosophus*) videtur esse magnum moueri pondus ab exigua virtute, compluri præsertim pondere. Quod enim sine vecte quispiam mouere non potest, id ipsum ponderis citius mouet, vectis ad illud pondus adiungens. Omnium autem eiusmodi causæ principium habet circulus. Istud verò ratione contingit, ex admirabili etenim mirandum accidere quippiam non est absurdum. *Mira in mechanicis à circuli mira natura sunt. Rectè doctissimus Daniel Barbarus in eruditissimis commentarijs ad Vitruuium, atq; in notis ad Proëmium lib. 10: In Machinaria Philosophia* admiranda omnia à vectis natura proficiscuntur. Vectis verò ratio à trutina, trutinæ à libra, libræ tandem à circuli proprietate ortum ducit. *Vide exempla plura in Ap 4. progym. 2.*

A circulo mirabili mirabilia omnia machinaria.

§. VII.

SCHOLION

De circino, quo non modo circulus, sed etiam ferè omnia geometrica problemata expediuntur.

Circularium pene omnium paradoxorum instrumentum, ac efficiens est circinus. Eius inuentio non minus ingeniosa, & mira est, quàm normæ, aut aliorum geometricorum instrumentorum, quæ tantopere laudantur à Vitruuio initio lib. 9. Affirmant aliqui circinum esse inuentum Icari, ac Dedalum inuidentem Icaro filio laudem tam mirifici organi, necem ei machinatum esse.

Circinus altero extremo centrum figit, altero solùm peripheriam signat. In procreatione tamen circuli, idest superficiei circularis, concipienda est inter ipsius circini pedes cuspidatos recta quæpiam linea circumduci, altero extremo manente &c vt dictum est in altera à nobis hìc allatâ definitione.

Circinus quomodo concipiendus sit, vt intelligatur ab eo verè circulus designari.

Videbis in progressu per Euclidis propositiones, ferè omnia problé-

blemata lib. 1. Eucl. solui ope penè vnius diductionis circini, & per figuram circularem. Vide ad propos. 1, 9, 10, 11, 12, 31. &c. lib. 1. nostras notas, & praxes.

§. VIII.

PARADOXICI-

-Modi, & inusitati ducendæ lineæ circularis indicati.

Modũ recole, ac reuise, quem ab antiquitate protulimus ducẽdæ circularis lineæ pũcto medio rectæ lineæ sub angulo recto motæ, ceu habes exemplum vbi ex antiquis apud Proclum ruderibus lineas ellipticas numero infinitas docuimus describere punctis infinitis designandis (præter medium) inter extrema rectæ lineæ sub angulo recto ductæ. &c.

Hic non repeto (licet esset hic locus) quæ ibi ostensa sunt in designatione paradoxica quartæ circularis.

§. IX.

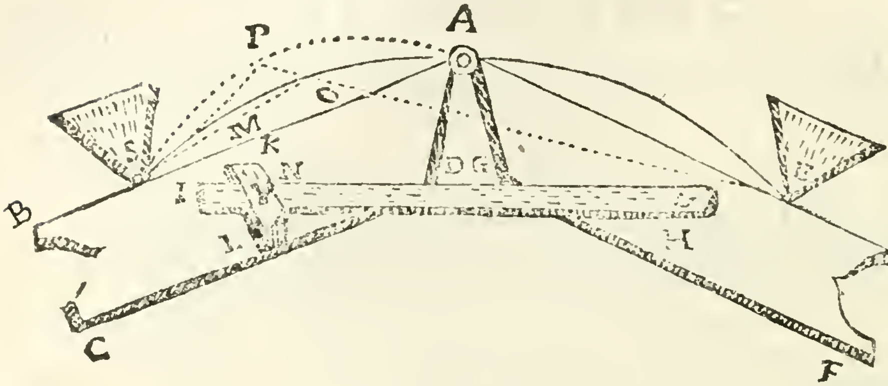
PRAXIS PARADOXICA

E constitutione instrumenti, quo per data tria puncta designetur linea circularis, quæ sit pars circuli quamtumuis amplissimi, sine cognitione, aut vsu centri.

Praxis hic ponẽda vsu Astronomici, & gnomonici.

Huiusce paradoxici compendii, & adiumenti saltem praxim expedit hic apponere tyronibus, quæ futura est vsui (non solum in Astrolabÿ operationibus aliquibus) si quando didicerint quadrantes horarios construere, in quibus aliquarum horarum lineæ sunt arcus circulorum, quorum centra tam procul absunt, etiam extra tabulam scriptoriam, vel designatoriam, vt

vix vlla instrumenti amplitudine possint inueniri. Sunt enim illæ horariæ lineæ partes peripheriarum parũ à rectà lineà recedentium. Guidubaldus in theorià Planisphæriorum prior instrumentum excogitauit ingeniosè quidem, sed tamen post illum Clauius id instrumentum effecit simplicius, cuius fabricam, & vsum accipe verbis ab ipso Clauio prolatis in Lem. 14. ante Astrolabium.



Constructio instrumẽti ad praxim.

I. Duæ regulæ eiusdem & latitudinis, & crassitiei ABCD, AEFG, quæ sint tantæ longitudinis, quantam ferè distantiam inter se habent duo extrema puncta, per quæ arcus est describendus, ita per circellum compingantur, vt latera AB, AE producta per centrum transeant, ipsæque regulæ circa idem centrum, tamquam cardinem, moueri queant, vt videlicet modò magis, modo minus dilatari possint, aut constringi prout angulus BAE debet esse magis, aut minus obtusus: cuius rei causa resecandæ sunt particulæ quædam prope centrum A, vt nimirum anguli fiant acuti DAB, GAE. Si enim anguli prope A essent recti, conficerent latera AB, AE vnam lineam rectam, & regulæ ipsæ constringi non possent, vt continerent angulum obtusum BAE. Non est autem necesse vt constringi possint ad angulum acutum efficiendum: quia quando rectæ proxima bina puncta connectentes constituunt acutum angulum, facilius, per scholium prop. 25. lib. 3, vel per scholium prop. 5. lib. 4. Euclid. quàm benefitio huius instrumenti, arcus circuli per ea puncta describitur. In centro autem A promineat deorsum versus stylus quidam perexiguus, & acutus ad arcus delineandos. Deinde in aliquo puncto H regulæ AEFG affigatur regula quędam exigua HI, ita vt circa H circumuerti possit. Postremo in puncto alterius regulæ AC, quod, constitutis lateribus AB, AE in lineam rectam, tantum absit à puncto H, quanta est longitu-

gitudo regulę HI, affigatur rectangulum quodpiam solidum paruum æneum KL, vt circa dictum illud punctum possit etiam circumuolui, & regula HI intra ipsum rectangulum immitti queat, & cochleola aliqua N ità astringi, vt regulæ duæ AC, AF immobiles persistãt, hoc est, angulum BAE non mutent.

II. Descripturus igitur hoc instrumento arcum per data tria puncta B, A, E, immittat regulam HI in rectangulum KL, & stylum ex centro A prominentem in puncto intermedio A statuat, lateraq; regularum AB, AE ita dilatet, constringat vè, vt omnino per reliqua duo puncta B, E transeant: quibus ita constitutis, cochleolà N constringat regulam HI, vt regulæ AC, AF angulum BAE mutare nequeant. Nam si instrumentum sic paratum circumducatur, vt latera AB, AE semper per puncta B, E transeant (quod fiet si in ipsis punctis B, E firmentur anguli duorum triangulorum solidorum æneorum) describet stylus ex A centro prominens arcum BAE; aut certe si instrumentum mutet sæpius situm, ita tamen vt latera transeant per puncta B, E, stylus idem imprimet inter A, & B, & inter A, & E varia puncta, quæ decenter, & congruè connexa arcum efficient BAE.

Vsus instrumenti.

Demonstrationem præmissæ operationis accipies, mi Tyro, in libro 3. propositio 21. vbi disces in eodem segmento angulos omnes esse æquales. In prædicta vero operatione idem angulus BAE peragit, & peragrat eumdem arcum BAE segmenti BEA.

Demõstratio instrumenti, & praxis eiusdem.

§. X.

SCHOLION

Circulares propositiones geometricæ, & ageometricæ. Circulares numeri. Intelligentiales circuli. Proclus, & Boëtius illustrati.

I. Videbis inferius ad propos. 1. Euclidis exemplum circuli perfecti geometrici in propositionibus Philosophiæ Mathematicæ. Videbis & ad 27. propos. exemplum ex Aristotele circuli ageometrici, siue petitionis principij. Ibi suis in locis, & in exemplis melius patebunt quæ hic tantum indica-

dicamus, ne nimium in circulo hæreamus.

II. Quod ad circulares numeros attinet, eorum specimẽ vide apud nos in Apiar. 11. progym. 3. cap. 8. §. 7. versus finem. Ne tamen Tyrones hin prorsus ieiunos dimittamus, apponemus hic pauca, quæ de ijs numeris eruditè indicat Proclus ad hanc 15. definitionem de circulo; & exemplis, ac notis nostris illustrabimus. Igitur Proclus: circulus in numeris media continet centra totius numerorum progressionis, quæ ab vnitate vsque ad denarium vnum voluitur. Quinarius, atq; senarius ex omnibus circularem ostendunt potentiam, quippe qui in ijs, quæ fiunt ex sese progressionibus, in se iterum reuertuntur, cum enim multiplicantur, in se se desinunt. Progressionis igitur imago est multiplicatio, siquidem in multitudinem extenditur: regressionis verò exitus in eadem specie. Horum autem vtrumque circularis præbet potentia, excitans quidem à manente veluti centro causas multitudinis productrices, conuertens vero post productiones multitudinem ad causas. Duo igitur numeri medium inter omnes possident locum circuli proprietatem habenres. Quorum eius omne masculorum, imparisq; naturæ conuertibile genus præcedit: alter vero omne fœmineum, & par, fœcundasque series ad propria reuocat principia, iuxta circularem potentiam.

Circulares numeri 5, et 6.

Quæ vt intelligas, mi Tyro, scito à Pythagoricis numeros impares masculos, pares fœmineos appellatos. Circularium numerorum primus masculus est quinarius, primus circularium fœmineus est senarius. Sunt & alij numeri circulares, quia in se, & in producta multiplicati reuoluuntur in se, idest dant producta constantia in primis figuris ex ipsis multiplicantium figuris.

Exempla circulariũ numerorũ.

5	25	125		6	36	216	
5	5	5		6	6	6	
25	125	625	&c.	36	216	2296	&c.

Applica exemplis hic appositis prædicta ea ex Proclo, & à nobis. Numerorum infinita multitudo conficitur per infinitos circulos numerorum denariorum. Primi denarij quasi centra sunt 5. & 6. pari interuallo, & æqualibusquasi semidiametris distantes al extremis 1. et 10; tribus n. numeris, seu notis, 2, 3, 4, distāt ab 1, vt et tribus 7, 8, 9, distant 6 à 10.

Numeri 5. & 6. quasi centra primi circularis denarij numeri.

III. Circulum Platonicum (de quo sæpius Proclus) intellectualem indicat Boetius lib. 3. de consol. Phil. metr. 9, dum Leo sic accinit.

Tu

Tu triplicis mediam naturæ cuncta mouentem
Connectens animam per consona membra resoluis.
Quæ cum secta duos motum glomerauit in orbes,
In semet reditura meat, mentemq; profundam
Circuit, & simili conuertit imagine cœlum.

Quasi dicat: circularis cœli motus est à motu circulari intellectuali. Dum enim Angeli, atq; Intelligentiæ incorporeæ (vt Platonicè Aristotelicè pro Peripateticis interpretemur, exemplo D. Thomę ad hunc Boetij locum) cælorum motrices à Dei cognitione ad sui, & ad rerum corporearum cognitionem progrediuntur, & rursum à creaturis corporeis in sui, ac in Dei conditoris intelligentiam, quasi quodam cognitionis circulo, reuoluuntur; simili motu circulari intellectuali mouent cælum nempe intellectione. Angelus triplicis naturæ medius est, nempe inter Deum, & animum humanum (interprete D. Thoma) vt enim (inquit) Angelus dignitate, ac perfectione à Deo exceditur, ita & humanus animus ab Angelo. Consona membra vniuersi partes appellat. Quarum partium consonantias in cælestibus, & in elementaribus vide apud nos in Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ, Apiar. 10. Progym. 1. Propos. 3. & 5. Intelligentia cælum mouēs quasi secta, siue quodammodo diuisa per duplicem motum (primi mobilis, & Planetarum) alterum alteri contrarium, si cum antiquis sentias, alterū altero tardiorem, si neotericis assentiaris, vnà cum circulari cęlorum motu circulari etiam intellectuali motu circa se, ac Deum versatur.

Circulus Platonicus in primo, et secundis rerum motoribus.

§.XI.

SCHOLION

Morales circuli.

HAbes apud Proclum ex 8. lib. Plat. de Republica circulum malorum apud Mortales. Vide apud eos Authores. Vide etiam hæc à nobis sequentia.

Circulus bonorū, & malorum.

I. Circulus bonorum, & malorum est, vt aiebat Pythagoras. Fortunæ, idest diuinæ prouidentiæ, circulus attribuitur, quia, vt respondit olim Aesopus quærenti quid ageret Deus: τὰ μὲν ὑψηλὰ ταπεινοῖ, τὰ δὲ ταπεινὰ ὑψοῖ. Deprauit exce-

excelsa, & tollit humilia. *E sacris nostris:* Hunc humiliat, & hunc exaltat: Deposuit potentes de sede & exaltauit humiles. *Celeberrimum id: κύκλος τὰ ἀνθρώπινα idest:* circulus sunt res mortalium. *Faciunt hæ vices ad tollendam satietatem. Nam vt ait Philosophus lib. 7. mor. Eudem. & 2. Rhetor. μεταβολὴ πάντων γλυκύ idest:* vicissitudo rerum omnium iucunda.

Vsus morales in circulis diuinæ prouidētiæ.

Preterea faciunt ad modestiam in prosperis, ad solatium in aduersis, dum quod summum est in circulo mox deuergit, & quod imum paulatim ascendit. Remedium in his motibus mox audies, vbi moralia è circino.

Circulus Gratiarū.

II. Circulus trium Gratiarum est mutuis inter se manibus implexarū. Nā è Sophocle in Oedipo Coloneo ἡ χάρις χάριν φέρει idest: gratia gratiam parit *Beneficium gratiarum actionem, & beneficij relationem prouocat, fitq; circulus à beneficio in beneficium, &c. vide egregia de hoc circulo gratiarum apud Senecam de Beneficijs.*

Symboli Plantiniani cōmendatio.

III. Egregium, licet vulgatissimum, est Symbolum Plantinianum, in quo circinum adapertum videas, altera cuspide immota, altera peripheriam signāte cum inscriptione: Constantia, & labore. *Quod symbolum optarim ego animis tyronum Mathematicorum infixum, vt intelligāt pro Mathematicis in primis facere id symbolū à Mathemat. Geometris acceptū. Nos in Apiarijs circulū quēdā Mathematicarū sciētiarū pertinaci cōstātia, & inuicto labore inter alia plura negotia vt confecimus, ita optamus pari lectionis constantia, & minore, quam nos, cum labore à tyronibus perlegi. Quibus tyronibus ornamus, & condimus hic Euclidem, vt facilius, ac iucundius vniuersam Mathematicarum encyclopediam perficiant. Merito corona, & circulus Constantiæ tribuuntur.*

Moralis circinatio in circulis operationum ciuilium.

IV. In circulo, & in perpetuo rerum mortalium motu vnicum centri punctum immotum est. Ergo dum per varias rerum vices vita circulum ducimus, imitemur circinum, ac circinantem, iuxta publicum votum è sacris: Vt inter mundanas varietates ibi nostra fixa sint corda, vbi vera sunt gaudia. *In Deo rerum omnium centro mente, atq; intentione perstemus, dum inter homines per varia circumuersamur negotia.*

Habebis præterea à circuli contactu in puncto moralia inferius ad propos. 2. lib. 3.

§. XII.

§.XII.

SCHOLION-

--In gratiam Chinensium Philosophorum.

Circulus Theologicus, ac de Deo etiam apud antiquos Philosophos Triadico. Martiani locus illustratus.

Morales circulos concludamus circulo theologico, qui mirè inseruire potest nostræ religionis Doctoribus apud Sinas, qui Euclidem iam sinicè loquẽtem à nostris audiunt. Faxo hìc habeant vnde Christianæ religionis primarium mysterium euoluant, & ostendant à naturali cognitione, ac ratiocinatione non abhorrere id, cuius vestigia aliqua reperiuntur etiam apud antiquissimos Ethnicos Philosophos. Proclus Orpheum antiquissimũ adducit ita canentem.

Infin tum autem secundum circulum ferebatur.

Infinitum Orpheus Deum appellat, meritò, ac verè, nempe summũ atque infinitum in omni genere veri boni omne malum excludens. Interpretatur deinde Orpheum Proclus: Cum enim circa intellectile intellectiliter moueatur, illudque tamquam centrum suæ habeat lationis, iure ipso circulariter agere dicitur. Quocirca ex his quoq; Triadicus egreditur Deus. *Triadicus, scilicet ex intellectili quod mouetur, ex intellectili circa quod mouetur, ex intellectione, qua circa se velut circulariter mouetur. Atq; hæc tria in vno, eodemq; sunt. Præterea in circulo res quatuor contemplare, ipsam peripheriam, ipsum cẽtrum, ipsas semidiametros, ipsam circuli superficiem, cuius superficiei terminus peripheria, medium centrum intermediæ semidiametri sunt. Nec est superficies circularis sine triade prædicta peripheriæ, centri, semidiametrorum. Religiosus Doctor Chinensibus explicet, & applicet prædicta quatuor triadico vero Deo rerum omnium conditori. Superficiem circularem diuinæ essẽtiæ, ac naturæ, in qua pro peripheria prima diuinæ Triadis persona Pater, pro centro secunda persona Verbum, ac aptè Proclus;* circumferentia in gremio continet centrũ.

Insignis Orphei sententia explicata.

Diuina Trias.

Applicatio religiosa in circulo pro Chinensib.

Circumferentia in gremio cõtinet centrũ.

Centrum rei desiderabilis loco

Iohan. 1. Vnigenitus in sinu Patris. *Proclus rursum*: Centrum est rei amabilis loco, atque desiderabilis. *Et.* Circumferentia ex omni sui parte cum centro coniungitur. *Quæ symbola sint tertiæ diuinæ personæ, nempè Diuini Amoris, quo Pater, & Verbum mutuò inter se conspirant. Ex prædictis habet Religiosus Doctor vnde in plura diducat, & explicet auditoribus Chinensibus & Deum Triadicum, & motum æternæ contemplationis, atq; amoris, quo Deus intra, & circa se quasi circulariter mouetur, vt Orpheus, & Proclus indicarunt.*

Martiani venusta fictio illustrata.

Habes ex antedictis vnde facillimè intelligas id, quod pluribus, & obscuris ambagibus, vt solet, inuestigat Nicolaus Cusanus libr. 1. *de docta Ignorantia, cap.* 10. *vbi habet*: Inquiramus quid sibi velit Martianus quando ait Philosophiam ad Trinitatis notitiam ascēdere volentem, circulos, & sphæras euomuisse. *Vide Martianum lib.* 2. *de Nupt. Mercur. & Philolog. vbi fingit eruditam illam euomitionem non solum circulorum, & sphærarum, sed etiam omnigenarum aliarum figurarum Geometricarum, librorum, litterarum, &c. Indicat eà fictione intellectui ad Deum ascendere volenti, & nitenti per symbola figurarum geometricarum, & aliarum scientiarum, vel rerum sensibilium, gradum faciendum, omissis ijs symbolis, supra omnem figuram, & cognitionem rerum creatarum. Quod ad rem nostram hìc facit, affirmamus etiam rectè circulum emissum à Philosophia cœlum, ac Dei cognitionem affectanti, quasi sibi gradum faceret ad Deum suppositis circulis, in quorum admiranda figura latet, vt vidisti, similitudo Dei vnius, ac trini, siue apud etiam antiquissimos Triadici, &c.*



XVI.



XVI.

Punctum autem illud centrum circuli dicitur, *nimirum A.*

§. I.

SCHOLION

Centri definitio ex antiquis oraculis.

C*Itatur à Proclo versus cum tomà ex antiquo quodam oraculo, quod centrum circuli definit consonè Euclidi non sine aliqua expressiore appendicula*. Centrum est, à quo omnes vsq; ad circumferentiam æquales sunt; & ad quod. *Additq; Proclus*: Quod quidem sit distantiæ linearum initium, per particulam *(A quo)* indicant oracula. Quod verò circumferentiæ medium, per particulam: *(ad quod)* Hæc siquidem ex omni sui parte cum centro coniungitur. *Centrum in circulo est punctum, non solum à quo, &c. Sed & ad quod omnes rectæ à circumferentia sunt æquales*.

Centrū est à quo, et ad quod æquales. &c.

§. II.

PARADOXA.

De centro, quod licet sit punctum, tamen quodammodo commensuratur quantæcunque peripheriæ, & superficiei circulari.

Ex verbis Procli, & ex altera centri definitione prodit mirum eius puncti centralis paradoxum. Nam circumferentia, & superficies quantumuis maximi circuli videntur quodammodo in vnum centrale punctum contrahi secundum omnes sui partes, & centrale punctum videtur quodammodo cōmensurari omnibus, & singulis partibus peripheriæ, ac superficiei circularis. Nam per infinitas semidiametros circūferentia (rectè Proclus) ex omni sui parte cum centro coniungitur, *& omnes sui partes in centrale punctum contrahit. & quoniam circularis area partibilis est per infinitas circumferentias infinitorum circulorum concentricorum, ideò quemadmodum vltima, & maxima circumferentia per ductas infinitas semidiametros ex omni sui parte cum centro coniungitur, & in id quodammodo contrahitur, ita & reliquæ omnes minores concentricæ circumferentiæ per easdem semidiametros in centrum deferuntur, & contrahuntur, atque adeo tota etiam superficies comprehensa sub circumferentijs, & semidiametris, immo constans ex ijs, tota in vnicum centri punctum cogitur.*

Circumferentia ex omni sui parte cum centro coniungitur.

Circularis superficies in centrum contracta.

Patet etiam paradoxum ex definitione circuli causali, quam in antecedentibus attulimus dum fit circulus ex lineæ altero extremo in centro, siue circa indiuisibile punctum centri gyrante, reliqua vero lineæ longitudine in orbem perfectum actà, & superficiem circularem, & peripheriam designante. Eadem enim recta omnes & superficiei, & peripheriæ partes iungit, & traducit in centrum.

Quare licet etiam per paradoxum affirmare centrum, licet punctū indiuisibile, quodammodo commensurari quantæcumq; peripheriæ, ac superficiei circulari; dum (iuuat non semel repetere verba Procli plenissima acuminis, & prælucentia nobis ad prædicta paradoxa) circumferen-

Cētri punctum quasi commensuratur omnibus circularibus peripherijs, & superficiebus.

ferentia (& sub ea superficies, iuxta à nobis prædicta) ex omni sui parte cum centro coniungitur. *&c. Plura ingenium geometricè acutum excudere poterit ad Euclidis ornatum.*

Quodammodo, *& : videtur, vsurpauimus, vt hæc paradoxa interpretere, mi Tyro, iuxta paradoxum de puncto & circulari linea æqualibus ex aliquorum commentatione à nobis ad veritatem explicatâ in antecedentibus ad definitionem Euclidianam de puncto.*

Interpretatio sana prædictorum paradoxorum vbi nam.

§. III.

PARADOXA—

—Alia de centro. Eiusdem circuli duplex centrum, atque alterum extra planum, in quo circulus. Ad praxes gnomonicas, & astronomicas indicata aliqua.

1\. V*Ides vt plurimum, mi Tyro, nostris paradoxis muniendis afferri à nobis magnorum Philosophorum authoritates, vt vidisti in paradoxis de circulo ex Aristotele. de centro ex Proclo, ne scilicet lectoribus leuitates pro ingeniosis excogitationibus obtrudere videamur. Pariter pro duplici centro eiusdem circuli, & altero extra circuli planum, habeo Proclum.* Hoc signum, à quo omnes, quæ ad circuli coincidunt Circumferentiam, æquales sunt, vel intra Circulum est, vel extra (quilibet nam que circulus habet polum, à quo omnes quæ ducuntur, æquales sunt) propterea illud addidit: Eorum, quæ intra figuram sunt signorum. Neque hoc ab re fecit, centrum solum accipiens, non autem Polum. Siquidem vult cuncta in vno inspicere plano, Polus verò subiecto plano sublimior est. Necessariò igitur in fine quoque adiecit, quod hoc signum, quod vtique iacet quidem intra circulum, omnes vero ab ipso ad circumferentiam incidentes æquales sunt, Centrum est circuli. Nam duo tantum huiusmodi signa sunt, polus nempe, atq; centrum. Verum ille quidem extra planum est, hoc vero intra. Exempli gratia, si gnomonem in centro circuli stantem intellexeris, Superior ipsius extremitas Polus est. Omnes enim quæ ab ipso ad circuli circumferentiam, æquales ad inuicem demonstrantur. Simi-

Cur Euclides dixerit in definit. circ. Ab vno puncto eorum, quæ intra figuram &c.

Etiam à polo omnes ductæ ad circumferentiam sunt æquales.

liter-

literq; in Cono, totius coni vertex Polus est circuli ad basim existentis. *Intellige Proclum de cono recto.*

Ac præterea ex his Procli habes vnde prodeat nostrum paradoxũ de duplici circuli centro, siue puncto, à quo, iuxta centri definitionem, omnes ad circumferentiam sunt æquales, & quorum alterum est extra planum circuli, vt in gnomonis exemplo vidisti. Ex his item habes rationem vel erigendi, vel examinandi, vel corrigendi erectionem Styli perpendiculariter pro vsibus plurimis Astronomicis, & Gnomonicis. Centri ergo definitionem Euclidianam sterilẽ esse ad vsus non passi sumus.

Ex Procli verbis modus erigendi gnomones perpendiculariter, &c.

Vide pro hac operatione circa stylos, inferius nos ad propos 11. & 12. lib. 1. & in Apiario nostro nono Gnomonico in to. 2, vbi pro horarijs & muralibus, & horizontalibus docemus erigere stylos, atq; exigere ad Geometricam perfectionem.

Videbis etiam mox inferius ad defin. 18. alia paradoxa de centro. Quinimmo iam iam alia etiam indico in parallelismis cum centro grauitatis.

§. IV.

PARADOXA,--

--Et paralleli centri circuli, & centri grauitatis. Indicatæ praxes exhibendæ auditoribus ad condimentum Geometricorum elementorum.

Centri grauitatis definitio.

Quemadmodum Philosophus Geometra hìc in defin. 16. centrum circuli affirmat esse id punctum à quo rectæ omnes ad circumferentiam æquales sunt, Sic & in corpore graui centrum grauitatis id punctum est, à quo, seu circa quod partes omnes corporis grauis æqualiter ponderant. Centrum circuli quasi centrum molis est, quod plerumq; in eodem corpore diuersum est à centro grauitatis, exempli causa in corpore circulari (velut in tympano, vt vocant Geometræ cilindri partem, &c) centrum quidem figuræ, ac molis erit medium superficiei circularis, at si materia, verbi gratia lignum tympani sit inæqualis densitatis, centrum grauitatis est ex-

est extra medium. Sunt, vt in circuli centro, sic & in centro grauitatis mira paradoxa, ceu sequentia.

I. Centro grauitatis graue dum defertur quiescit. Vt circulus circa suum centrum reuolutus in eodem loco. &c.

II. Centrum grauitatis aliquando est extra corpus grauitans. Vt nuper dictum est de polo circuli, & videbis inferius ad defin. 18.

Paralleli, & paradoxa centri circuli, & grauitans.

III. Possunt aliqua grauia circa terram fingi, quæ omnia simul habeant centra suæ grauitatis in eodem puncto centri vniuersi. Vt, ex antedictis ex Proclo, circumferentia ex omni sui parte cum centro coniungitur, *& quasi omnia sui puncta transfert, & collocat in idem punctum circuli centrale.*

Prædicta paradoxa de centro grauitatis figuris, & verbis explicata, & demonstrata vide apud nos in tom. 1. Apiariorum Philosophiæ Mathematicæ, Apiario 4, progymnasma 1. Vnde habes, ò quicumque Geometrica elementa publicè interpretaris, condimenta, & ornamenta plura, eximia, facilia, quibus tuos Auditores dimittas plenos & scientiæ varietate, & admirationis iucunditate, & cupiditate audiendi, ac discendi hæc elementa quorum interpretandorum occasione quotidiè noua, & inopinata in omni genere Philosophiæ addiscant.

XVII.



XVII.

Diametrus circuli est quædam recta linea per centrum acta, & ad vtramque partem peripheriæ circuli terminata, quæ & circulum bifariam secat; *nempe linea BC.*

§. I.

SCHOLION

Diametri variæ apud Geometras. Vnde nam sit vt Diameter circulum bipartiatur.

Diameter etiam parallelogrã-ma figuræ.

I. D*iametrum Euclides non genericè definit; sed speciatim diametrum circuli*. Diameter (inquit) circuli est quædam recta. *&c. Nam apud Geometras diametri etiam sunt parallelogramorum per oppositos angulos, quibus diametris Euclides propos. 34. lib. 1. demonstrat in duas partes æquales diuidi parallelogrammata. Et Aristoteles, vt videbis inferius ad vltimam definitionem, quærit cur ea sola linea in parallelogrammis, quæ est ad oppositos angulos, appelletur diameter, ac non etiam aliæ, quæ ad opposita latera ductæ in duas æquales partes diuidunt figuram? sect. 15. prob. 1. & 2.*

Diametri variæ in conicis.

II. Figurarum, & linearũ in conicis sectionibus sunt variæ diametri, diametri rectæ, transuersæ, coniugatæ. Quarum definitiones, ac notiones vide apud Apollonium in primis definitionibus, & in Eutocij commentarijs vide explicationes, & exempla in figuris. Est

&.

& diameter secunda in definitionibus secundis apud eundē Apollon. Ex quibus indicatis licebit doctori Geometræ suis auditoribus aliqua pro captu Tyronum explicare, vt sensim cum elementis Euclidis aliqua etiam elementa conica discant profutura rebus Geometricis reconditioribus, Gnomonicis, & Astronomicis. Eæ vero apud Apollonium diametri vocantur & axes; cur, & quando vide apud eum vulgata. In sphæra, vt docet hîc Proclus, diameter propriè vocatur axis, in parallelogrammis diagonalis. Propriè circuli est, ac dicitur diameter, siue dimetiens.

Diameter etiam axes in conicis. Axis propriè in sphæra, diagonalis in parallelogrammo, diameter in circulo.

III. Bifariam circulum à dimetiente secari Thaletem ferunt primum demonstrasse. *Demonstrationem Geometricam paucis indicat Proclus sine figura ab absurdo, quòd pars esset æqualis toti. Quam demonstrationem Clauius, addita figura, exposuit. Indicatâ, & omissâ iam vulgatâ, lubet apponere rationem, quam etiam physici Philosophi, & auditores, sine geometricis ratiocinationibus percipiant. eam sic Proclus*: Causa autem bipartitæ sectionis est, indeclinabilis per centrum rectæ lineæ transitus. Cùm enim per medium ducatur, semperque eumdem motum iuxta omnes eius partes ad alterutram partem inflexibilem seruet, æquum vtrimq; ad circuli circumferentiam abscindit.

Thales primus demõstrauit à diametro circulũ bisariari.

Ratio bifariationis in circulo à diametro.

§.II.

SCHOLION

Causa altera mobilitatis figuræ circularis à defin. 17.

A*Ddit Philosophus quæst. 8. Mechanicâ à nobis superius citatâ in §. 4. ad def circuli, causam alteram, præter ibi dictam, mobilitatis in circulo.* Ad hæc quo nutat pondus, eò motor mouet. Cùm igitur ad rectum super plano circuli fuerit diameter, planum secundùm punctum contingente circulo, æquale vtrimque pondus disterminat diameter. Cùm autem mouetur, plus illico, ad quod mouetur, seu inde nutans, ab impellente facilius in ante mouetur, quo enim vnũ quodq; vergit, mouetur ex facili. &c.

Interpretatio Aristotelica breuitatis, & obscuritatis.

Ex defin. 17. diameter circulum diuidit in duos æquales semicirculos. Ergo rota, seu circulus, qui semper secundum diametri alterum

extremum plano perpendiculariter insistens est, quasi in æquilibrio est, & in promptu, ac æquali vtrimque pondere nutans in vtramuis partem; propterea facillimè mouetur, præsertim cùm iam in motu est, & in alteram partem accepit impetum.

§. III.

VSVS

Definitionis 17 ad incendia mirifica catoptrica, ex Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ indicati.

Demõstratio Geometrica vstionis efficiendæ in centro speculi sphærici.

QVandoquidem diameter bifariat in æquas partes circulũ, omnes in eodem circulo bifariationes constituunt æquales inter se semicirculos, & semicirculorum omnes angulos in eodem circulo æquales, sibiq; congruentes, iuxta 8 axioma, de quo inferius. Vide nos inferius ad propos. 5. Hinc habes inuentionem, & demonstrationem geometricam, quibus efficiatur, ac probetur lucis reflexio per angulos semicirculares æquales ad vstionem vehementissimam in centro speculi sphærici. Apiar. 7. prog. 2. prop. 2. & progym. 3. Schol. 3. prop. 8.

XVIII.

Semicirculus eſt figura à diametro, & intercepta circuli peripheriâ contenta.



XIX.

Segmentum circuli eſt, quod à recta linea, & peripheria circuli continetur.



§.I.

PARADOXA.

De Semicirculo, qui eſt figura media, & communicans inter circulum, & rectilineas, vnà cum exemplo Arithmetico periucundo. Figuræ aliæ ſub duabus lineis, & binangulæ.

EVclides, poſtquam definiuit figuram ſub vna linea comprehenſam, nempe circulũ, ex ordine progreditur ad figuras ſub duabus lineis & duobus angulis, nempe ſemicirculum, & circuli ſegmenta ſub curuâ circulari, & ſub recta. Circulus quemadmodum figura mirifica eſt, & paradoxorum pleniſſima, vt in antecedentibus vidiſti, ſic & eius partes paradoxa ſunt.

I. Semicirculus, & circuli ſegmenta ſunt figuræ quædam mediæ

Segmenta circuli mediæ unifigura inter unilineas, & trilateras.

Communicant cum curuilineis & rectilineis.

Binarij numeri mira proprietas.

inter figuras sub vnica linea, & inter figuras sub tribus lineis. Sunt etiam communicantes cum curuis, & rectis, cum circulo & cum rectilineis figuris, dum comprehenduntur & peripheriæ parte, & rectà lineà. Affert ad hanc rem Proclus exemplum de numero binario, quod habes explicatum apud nos in Ap. 11. Scilicet vt se habet binarius in mira quadam proprietate inter vnitatem, & inter ternarium, ac reliquos numeros, sic semicirculus inter circulum, & inter rectilineas figuras. Vnitas plus crescit additione, quàm multiplicatione; nam 1, & 1 conficiunt 2, multiplicatum 1 per 1 efficit 1. Ternarius, ac reliqui numeri plus crescunt multiplicatione, quam additione; nam 3, & 3 conficiūt 6, & 3 multiplicatum per 3 efficit 9. eodemq; modo reliqui numeri. Binarius verò numerus medius inter 1, & 3, ac reliquos numeros, quasi pacis sequester, & discrepātias auferens, tantumdem (quæ iucundè mira proprietas est) crescit additione, ac multiplicatione. Nam 2, & 2 conficiunt 4, & 2 si multiplicetur per 2 efficitur pariter 4. Quemadmodum igitur binarius *(inquit Proclus)* vnitatis, atque multitudinis medietas est, ita etiam semicirculus iuxta quidem basim cum rectilineis communicat, iuxta verò circumferentiam cum circulo.

Si quis acutè contempletur denominatores additionum, & multiplicationum in prædictis vnitate, binario, & ternario numeris, eruet causam paradoxi. Ingeniosis Tyronibus nos eruendam indicamus ex ijs denominatoribus. Ac interim iucunditatem, atq; admirationem ex ea numerorum proprietate ijs non subtrahimus. Iucunda enim rei reconditæ admiratio imminui solet causa patefactâ.

Figuræ aliæ binangulæ, præter circuli segmenta.

Figuræ nullangulæ.

Figurarum variæ formæ insolentes.

II. Præter semicirculum, & circuli segmenta, figuras etiam alias binangulas sub curuis concauis, quasi ouiformes, & sub concaua, & conuexa quasi lunulatas dant circuli se mutuo secantes, vt videre licet, ac videbis in figura primæ propos. Euclidis. Sunt & binangulæ partim sub solis mixtis, partim sub mixtis simul, & rectis lineis, ac plures aliæ sub lineis similarium, & dissimilarium partium, ceu si fingas ellipsim linea elliptica, vel circulari, vel recta sectam, &c. Sunt & figuræ sub duabus circumferentijs nullangulæ, nempe spatia inter circulos concentricos, quæ omnia ad nouitatem aliquam licebit Euclidis publico interpreti subijcere oculis auditorum in varijs, ac variè designatis figuris.

Cæterum si alia monstra, & paradoxa geometrica velis videre ob iuncturas varias circularium, & rectarum linearum, figuras nempe vnangulas, nullangulas etiam sub pluribus lineis rectis habeas exempla apud nos in Apiarijs Philosophiæ mathematicæ, Ap. 3. Prog. 7.

extremo. Vide apud Proclum copiosam, & cruditam multiformium figurarum diuisionem in comm. ad def. 20, 21, 22, 23.

Apud Proclum multiformium figurarum diuisio, genera, species

§. II.

PARADOXVM

Apud Proclum de centro in plano extra figuram cum eruditione conica, & ex Apiarijs Philosophiæ Math. explicatum.

IN antecedentibus ostensum est aliquando in circulo centrum esse & extra figurā circularem; & extra planum, in quo circulus. Hic videbis aliquando centrum figuræ in plano quidem esse, in quo est figura, sed tamen extra ipsam figuram. Audiamus Proclum hoc, & aliqua alia paradoxa innuentem circa figurarum aliquarum centra. Centrum tres habet locos, aut enim intra figuram, vt in circulo; aut in ambitu, vt in semicirculo (cuius centrum in media recta subtensa peripheriæ) aut extra, vt in quibusdam conicis lineis. *Appone Procli exemplis etiam sectores circulorum, quorum centra sunt in vertice anguli, sub quo sunt sectores. Quæ pars circuli sit sector habes in definitione 9. lib. 3. horum elementorum. Postremis Procli verbis interpretationem appono ex Apollonij secundis definitionibus.* Punctum, quod transuersum latus oppositarum sectionum bifariam diuidit, centrum vocetur. *Id verò punctum est extra contrapositas hyperbolas in diametro transuersa. Vide expositiones Eutocij ad Apollonium, atq; etiam nos in nostris Apiarijs, præsertim in figura priore, ac maiore propositionis 6. Prog. 3. Apiar. 3. vbi praxim geometricam demonstratā exhibemus descriptionis hyperboles asymptoti intra duas rectas angulum facientes. & Apiar 9, Prog. 1. cap. 8. vbi organicè, ac geometricè per duo fila ducimus contrapositas hyperbolas solarium tropicorum pro horario vniuersali, &c. Nam in Apiar. 3. cit. figurà punctum B, in Ap verò 9. figurà punctum A sunt centra contrapositarum hyperbolarum, iuxta Apollonium, eaq; sunt extra sectiones conicas hyperbolicas.*

Centrum vel intra figurā, vel in ambitu figuræ, vel extra figuram.

Exempla in conicis cētri extra figuras.

§. III.

§. III.

SCHOLION

Definitio 19 ex aliquorum sententia est suppositilia.

Quod ego animaduerteram, scilicet definitionem segmenti circuli non haberi apud Proclum in comm. ad Eucl. inueni etiam à Io. Buteone animaduersum, qui & addit: Cū sit etiam inter principia libri tertij, & in præcedentibus nusquā fiat mentio segmenti, videtur hic esse superflua, & à quopiam inscienter adiecta. *Quapropter rectè à Clauio est ommissa.*

XX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis lineis continentur. Trilateræ, quæ tribus ; quadrilateræ, quæ quatuor ; multilateræ quæ pluribus, quàm quatuor lineis rectis continentur.

XXI.

Trilaterarum figurarum æquilaterum triangulum eſt, quod tria latera habet æqualia.



XXII.

Iſoſceles, quod duo tantùm æqualia habet latera.



XXIII.

Scalenum, quod omnia tria inæqualia habet latera.



XXIV.

Trilaterarum preterea figurarum rectangulum triangulum est, quod rectum angulum habet.



XXV.

Obtusangulum, quod obtusum, *vt est figura defin. 23.*

XXVI.

Acutangulum, quod tres acutos habet angulos *vt sunt figuræ defin. 21. & 22.*

§. I.

SCHOLION

Trianguli ęquilateri definitio perfectiſſima.

E Cce tibi exemplum in definitione 21 definitionis perfectiſſimę, quæ ſimul & rei eſſentiam, & nominis indicat. Formalis, & nominalis: definitio, & ethymologia. Aequilateri enim trianguli nomen ſignificat trium laterum æqualium figuram, cuius etiam tota eſſentia, & natura in ea ſignificatione indicatur.

§. II.

PARADOXA

De Triangulis quadrilateris, & plurilateris, & alijs figurarum monſtris.

I. *A Cutè, ac eruditè ſuo de more Proclus quærit, ac explicat, quid cauſæ ſit, quod Euclides duplicē diuiſionem facit figurarū trilaterarum, nempe vel à lateribus, vel ab angulis. In tribus antecedētibus definitionibus 21, 22, 23 triangula diuiſit à laterum æqualitate, vel inæqualitate, in hiſce verò tribus ſequentibus definitionibus 24, 25, 26 eadem triangula diſtinguit ab angulorum variâ quantitate relatâ ad rectum angulum.*

Euclides trilateras figuras ab angulis, & à lateribus. Cur?

Dubitationem ſoluit Proclus à reconditis Geometricis paradoxis, dum ſic ſcribit: Videtur autem mihi Euclides ad illud ſolum reſpiciens ſeorſum quidem ab angulis, ſeorſum verò à lateribus diuiſionem feciſſe; quòd ſcilicet non omne Triangulum Trilaterum etiam eſt. Sunt enim Triangula Quadrilatera, quæ ἀκιδοειδῆ, hoc eſt cuſpidis ſimilia à Mathematicis ipſis vocantur: a Zenodoro autem κοιλογώνια, hoc eſt cauum Angulum habentia; intelligi enim vnum ex Trilateris, ſuperque vno latere duas rectas introrsū conſtitui. Clauditur igitur quoddam ſpatium, quod ab externis, & internis rectis

Triangula quadrilatera cuſpidiformia.

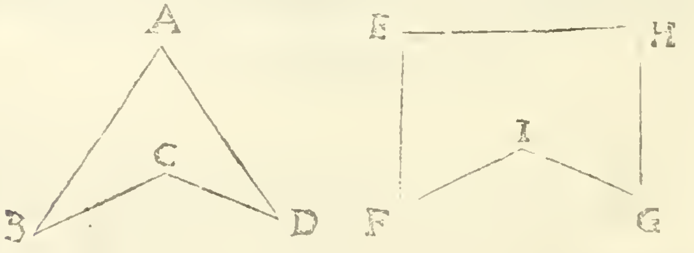
Cilogenia figura quæ-dam.

T com-

comprehenditur lineis, tresque habet angulos, vnum quidem, qui ab externis continetur, duos verò, qui ab his, atque internis comprehenduntur, ad extremitates, in quibus ipsæ lineæ coniunguntur. Triangulum igitur est huiuscemodi figura quadrilaterum. Non ergo, si quod tres habet angulos inuenerimus siue acutos, siue vnum rectum, siue obtusum vnum, statim etiam trilaterum, quod vel æquilaterum, vel quoddam aliorum trilaterorum sit, inuenimus, erit enim fortasse & quadrilaterum. *Vide ex eodem Proclo alia spectantia ad hæc eadem paradoxa apud nos ad proposit. 21. Eucl.*

II. Sed copiosè nos plura monstra figurarum habentium plura latera, quàm angulos prodidimus, & figuris expressimus, & demonstrationibus confirmauimus earum heteroclitas, & paradoxas proprietates in nostris Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ, vbi inter cilogonias, siue cauiangulas figuras exhibemus triangulum quadrilaterum Ap. 3. prop. 1 & prog. 7. propos. 7. quinilaterum, & senilaterum &c. vide ibi figuram & rationes. Nec dubitandum est esse triangula ab internis tribus tantùm angulis denominata, licet latera plura sint, quam tria. Vide inferius ad propos. 21. huius lib. 1. Eucl. ex Proclo expressiora de his paradoxis.

Triangula plurilatera.



III. Vt Procli verba nuper allata intelligas inspice figuras appositas, & applica verba figuris. ABCD triangulum est ob angulos tres internos A, B, D, nam BCD externus est, & extra figuram; tamen quattuor sunt latera AB, BC, CD, DA. Item quadrangulum est EFGH; nam FIG externus est, & extra figuram; tamen quinq; sunt latera, EF, FI, IG, GH, HE.

Nec est quod accipias angulos BCD, FIG, iuxta paradoxa, quæ nos attulimus in antecedentibus de angulo extimo, velisque angulum esse tam externum, ac citimum citra C, & citra I, quàm ad oppositas partes, & inclinationes extimas spectantes ad aream interiorem trianguli, & quadranguli. Nam Proclus, & nos hîc loquimur cum Euclide de angulis tantùm ad A, B, D, E, F, G, H, omisso vtroque

citimo

citimo, & extimo ad C, & ad I. Vide nos in fine applicationis 9 ad propos. 21 Eucl.

§.III.

APPLICATIONES,--

-- Et vſus indicati triangulorum in Geometria practica; iſoſcelium in Gnomonicis, & Mechanicis, Scalenorum in Architectura, & in Aſtronomia.

SAt eſt hic tantum indicare quæ ſuis locis expreſſius docentur vbi propoſitiones ex Euclide producuntur, quibus demonſtrantur vſus hic indicati. Igitur cum alibi ſæpè, tum precipuè ex li[b.] elem. Eucl. nos vtimur æquilatero, iſoſcele, ſcaleno ad diſtantias inacceſſas dimetiendas. Apiar. 2. progym. 1. prop. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Speciatim iſoſcelis vſus gemini præ alijs apud nos ſunt in Apiar. 9. progym. 1. cap. 4. in fine, vbi demonſtramus ſtyli longitudinem in horarijs eſſe ſpatium trium horarum inchoatū à meridiana, &c. Quæ res plurimi vſus eſt in Gnomonicis. & Apiar. [illegible], Progym. 5. prop. 9. vbi ex iſoſcele demonſtramus vmbras eſſe gnomonibus æquales, ſole verſante ad 45. gr. altitud. vnde rerum inacceſſas altitudines quiuis facilè poſſit ex vmbris dimetiri. Vide ſpecimen ad propoſ. 6. lib. 1. Eucl.

II. Cunei, quibus tam validæ vires ſunt ad findendum, iſoſceli ſunt, quorum bina maiora latera vectes ſunt in contraria nitentes, ac diuidentes lignum per quod adiguntur. Quam ad rem vide plura, & curioſa apud Ariſt. quæſt. 17. mech. & egregiè Guidubaldum de Cuneo. Aptiores ſunt cunei (cæteris paribus) cum iſoſcelia fingunt, quam cùm æquilatera; in iſoſcelibus enim bina latera maiora, ob baſim minorem minus diuaricantia, facilius ingeruntur in fiſſilia. Aequilatera, & iſoſcelia baſis maioris, quam latera, ob dicta ineptiores dant cuneos. Pappus lib. 8. & Guidubaldus de Cuneo.

Cunei theoria geometrica ob iſoſcelib. &c.

III. Scalenorum vero triangulorum vſum in Architectura docet Vitruuius lib. 9. ca. 2. pro ſcalis. Vide locum Vitruuij apud nos in §. 2. ad 48.

Scaleni apti ſcalis Architectonicis.

ad 48 prop. lib. huius 1. Eucl. vbi & rationem eius praxis theoricam intelliges ex eà 48.

... & Astronomicis.

At vero etiam in Astronomicis scalas nobis mirificas exhibent scalena triangula, quibus ascendamus ad cælestia corpora, & sciamus aliquorum ex ijs à terris distantias, ex hisce eorum ambitus, & magnitudines, & ordines, ac plura alia. Quæ pendent omnia è triangulis scalenis paralacticis, vti nos ad aliquas Euclidis propositiones à suis demonstrationibus educemus. Interim hæc hìc pauca saltem indigitata sint, vt Tyrones discant non negligere quæ hìc sunt abstracta, & nullius vsus videntur.

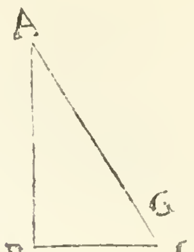
§. IV.

Aristotelis locus de progressione animalium per scalena, & isoscelia triangula.

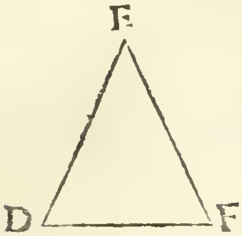
Philosophus lib. de incessu animal. cap. 7. copiosè disserit de necessaria inflexione membrorũ in incessu animaliũ. Nos, omissis Philosophi verbis, pauca tantum hic indicabimus è scalenis, & isoscelibus triangulis, vnde id caput Philosophi perspicuum fiat.

Ambulare est triangulare.

Ambulare igitur est non solum, vt in antecedentibus diximus, angulare, sed quasi triangulare, siue triangulizare à scalenis ad, & per isoscelia triangula. Exemplum esto ab homine in appositis hìc figuris.



Dum stat quispiam, crura ambo perpendiculariter horizonti insistunt in recta AB; si mouere se velit, alterum crus antrorsum aperit, ac proycit ad G, & facit ex altero crure hypothenusam, siue rectam A G angulo recto B subtensam, & oppositam. At vero A G non est totale latus oppositum recto angulo B, quia (per 19. propos. primi Elem.) in eodem triangulo debet maiori angulo maius latus opponi, nempè recto B, qui angulus maior est alterutro A, vel C; ideò crus A G deberet produci ad C, & excedere ipsum latus AB quantitate FC. Vt ergo AG, æquale ipsi AB, pertingat ad pauimentum in C, debet fieri inclinatio ab B ex angulo recto in acu-



in acutum ita, vt è Scaleno ABC fiat iſoſceles DEF, vt vides in altera hìc figura. Atq; ita deinceps per continuatas inclinationes fit progreſſio, & triangulatio è Scaleno per Iſoſcelia.

Vides ergo, mi tyro, quàm neceſſarius, & quàm creber ſit vſus triangulorum, dum ſine ipſis ambulare animal non poteſt.

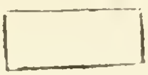
XXVII.

Quadrilaterarum figurarum Quadratum eſt, quod æquilaterum & æquiangulum eſt.



XXVIII.

Altera parte longior figura eſt, quæ æquiangula quidem, at non æquilatera eſt.



XXIX.

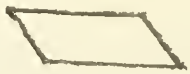
XXIX.

Rhombus, quæ æquilatera, æquiangula verò non est.



XXX.

Rhomboides, quæ opposita, & latera, & angulos æqualia habet; at neq; æquilatera est, neque æquiangula.



XXXI.

Reliqua ab his quadrilatera vocentur trapezia.



§. I.

SCHOLION

Exempla definitionis perfectissimæ in quadrato, & altera parte longiore. &c.

INdico etiam in definitionibus 27. & 28 (in alijs deinde tu, lector, animaduerte) exempla definitionum formalium, quæ & nomen, & rei essentiam notant. Nam figura, quæ quadrata dicitur, est species quadrilaterarum figurarum (quadrata quasi quadrilatera) cuius essentia est vt habeat & quattuor latera æqualia, & quattuor angulos rectos. At quadrilatera figura, quæ dicitur altera parte longior, notat quadrilateram, quæ habeat altera bina opposita longiora latera alteris binis oppositis, sit tamen rectangula. Itaq; differt à quadrata non in angulis, sed in binorum laterum inæqualitate. &c.

Ex hic, & in antecedentibus notatis circa definitiones Geometricas vides, Lector, Geometricã Philosophiã non progredi à verborum notionibus, sed à rerum geometricarum geometricè veris definitionibus.

§. II.

MORALE--

-- Symbolum Quadrati. & vndenam rhombo nomen? cum eruditione optica.

Quadratũ symbolum virtutis est

1. Q*Vadratum* assimilant quidam vniuersæ virtuti, quatenus quattuor rectos habet vnumquemque perfectum. Quemadmodum porrò Virtutem quoq; vnamquamq; perfectam dicimus, & se ipsa contentam, & mensuram, & terminum vitæ, omniumq; obtusi, & acuti medietatem. *Proclus.*

Ex his verbis Mathematicus Doctor, si sit etiam moralis Philosophus, habet quæ pluribus explicet cum vtilitate Auditorum, præsertim

tim è Stoica Philoſophia. Quomodo virtus ſe ipſa contenta, ſitq; vitæ menſura, & terminus, dum appetitum ſenſitiuum ratione ſedat. Habes & à nobis vbi ſuperius de angulo recto virtutis, & medio inter acutum, & obtuſum, &c. Vt rectâ lineâ metiuntur geometræ areas, ſic & earumdem quantitatem pronunciant à numero quadratorum, nempè figurarum rectangularum.

II. Videtur hoc nomẽ Rhombi a motu impoſitum fuiſſe. Etenim ſi quadratum in modum Rhombi moueri intellexeris, iuxta angulos tibi ordine commutatum videbitur. Quemadmodum porrò ſi circulus etiam in modum fundę moueatur, ellipſis ſtatim apparet. *Proclus. Ratio dictorum à Proclo petenda eſt ex fontibus opticæ Philoſophiæ. Quadratum enim, & circulus ſuis diametris perpendiculariter erecta dum mouentur, diametri trãſuerſæ in eo motu obliquantur, & ſub minori angulo apparent, ideo lateraliter imminuũtur oculo, & oblongæ videntur figuræ, quadratum quidem ſimulat Rhombum circumactum, circulus vero diametrum altitudinis maiorem, latitudinis minorem, quales in ellipſi ſunt, oſtentat.*

Quadratũ agitatum quomodo, et cur Rhombum; circulus ellipſim ſimulet.

Sed hæc fortaſſe extra tyrocinia ſunt, tamen ad Procli *verba intelligenda tyronibus neceſſaria. Nec refert nos exemplum in circulo diuerſum ab exemplo Procli poſuiſſe. Nam eadem vtriuſque ratio eſt.*

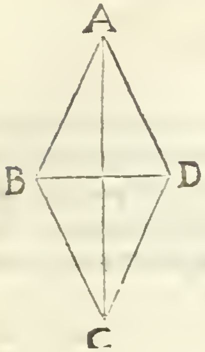
§. III.

Curioſæ quæſtiunculæ de Rhombo apud Ariſtotelem ſolutio geometrica.

INgenioſiſſimè, vt ſolet, Philoſophus inueſtigat, & quærit, & affert cauſam tum phyſicam, tum geometricam de motibus quibuſdam paradoxicis per rhombi latera. Cuius quæſtionis ſtatus hic eſt.

Finge mobile vnum ab A deferri in B, & alterum, ac ſecundum mobile deferri a B in A, ac tertio ipſum latus B A deferri obliquè in CD ſecundùm latera BC, AD. Atq; hi tres trium mobilium motus fiant in eodem tempore pari omnes velocitate. Finito motu, erunt in eodem momento latus AB in latere CD, & mobile A in C, mobile B in D. Ac eodem tempore ipſum quidem latus mobile AB peregerit ſpatium AD, BC, mobile vero A confecerit ſpatium AC, mobile B ſpatium

tium



tium BD. At hæc tria spatia inter se inæqualia sunt, breuissimum BD, longius BA, longissimũ AC. Cur ergo in eodem tempore, ac in pari velocitate tam imparia spatia peracta sunt? &c. Circa rationes, ac solutiones huiusce quæstionis vide apud Philosophum plura. Nos hic breuiter innuemus id in primis, quod geometricum est, & propriè ad nos attinet. Ait ergo Philosophus: ratio aliqua esse videtur ab angulis Rhombi alternè inæqualibus. Nam angulus acutus habet latera AB, AD (secundum quæ factæ sunt motiones tum ipsius A in B, tum ipsius AB per ipsum AD) vergentia ambo ad easdem partes deorsum. At verò angulus obtusus ad B habet latera in contrarias partes diuaricantia, & secundùm BA sursum motum est mobile B versus A, secundùm verò latus BC motum est obliquè deorsùm mobile latus BA. Itaque mobile A, & latus mobile AB quasi vnicà latione deorsum partim obliquè, partim rectà mota sunt; at mobile B dùm vna latione fertur sursùm ad A, alterà latione à motu lateris AB versus CD retrahitur, ac detrahitur obliquè ab A versus D. Quoniam igitur A & suo motu deorsum versus B, & motu lateris AB obliquo per AD, BC quasi geminà deorsum latione delatum est, spatium maximum AC confecit, & quoniam latus mobile AB deorsum obliquè per latera AD, BC ambo deorsum vergentia vnicà latione descendit, confecit spatium AD, vel BE minus quidem ipso AC, sed maius ipso BD, quia mobile B dum ab angulo obtuso ascendebat versus A, simul detrahebatur per BD à mobili latere BA descendente obliquè iuxta BC, AD, &c.

In Rhombo spatia imparia in paribus tẽpore, ac velocitate.

Ratio Geometrica appositi paradoxi Rhõbalis.

Ex his habes vnde cætera intelligas à Philosopho posita in ea quæstione 23 mechan. & vnde ab angulis alternè inæqualibus oppositè æqualibus Rhombi ornes eruditè definitionem eius parallelogrammæ figuræ. Quamquam aliqua hic supposita videbis, mi Tyro, magis confirmata ex posterioribus propositionibus huius libri primi elementaris.

SCHOLION.

Regulares figuræ quænam.

REgulares figuras vocant Geòmetræ illas, quæ & æquiãgulæ, & æquilateræ sunt, quales ex antecedentibus solæ sunt triangulum æquilaterum, & quadratum, reliquæ, quæ non sunt simul æquiangulæ, ac æquilateræ, irregulares sunt. suntq; trilateræ, quadrilateræ, ac plurilateræ, irregulares, et regulares.

XXXII.

Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ in eodem plano existentes, & vtrimq; in infinitum eiectæ in neutram partem coincidunt.

---

§. I.

PARADOXA INDICATA

De lineis non parallelis, quæ tamen numquam coincidunt, etiam in infinitum productæ.

VIde inter nostra paradoxa in Apiario 3. lineas multiplices asymptotos, id est non coincidentes, licet protractæ semper spatium intermedium imminuant in infinitum. Sunt ibi apud nos non solum theoriæ, vt apud aliquos alios, sed & praxes nostræ describendarum earum asymptoton rectarum ad hyperbolas. Sunt ibidem non solum mixtarum ad rectas, vt apud aliquos alios, sed & apud nos rectarum ad rectas asymptoti.

Prodi-

Prodigium est duas rectas ducere, quæ semper magis, ac magis inter se accedant, atq; in infinitum productæ, tamen numquam se possint contingere; quod idem videtur esse, ac si affirmes lineas aliquas simul esse parallelas, & non parallelas. Præter multiplicia exempla, & demonstrationes, quas habes in cit. Apiar. 3, videbis inferius alterum ad propos. 20. lib. 1. alterum ad prop. 16. lib. 3. Quoniam enim earum asymptotωn ductio, veritas, & demonstratio supponunt eas propositiones Euclidis, ideò illuc exempla visenda proponimus, quæ hìc Tyronibus tenebras potius, quàm lucem afferrent.

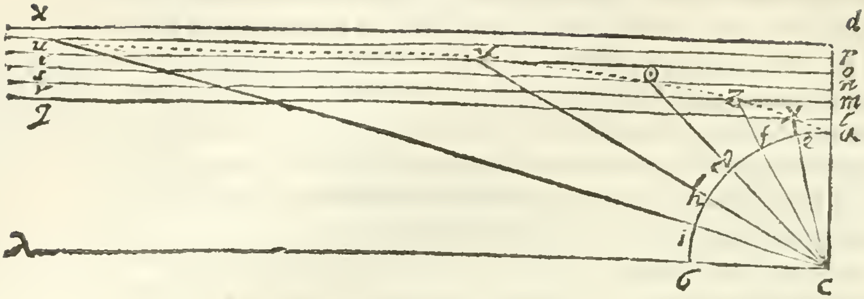
Mox inferius aliquod exemplum asymptotωn afferemus, cuius veritas constare poterit hìc Tyronibus sine Geometrica demonstratione, nempe concentricorum circulorum, quorum circumferentiæ non coincidunt, nec tamen sunt parallelæ ab Euclide nominatæ. Possibile etiam est intelligere helices circa rectas lineas ordine describi, quę si vnà cum rectis lineis in infinitum producantur, nunquam coincidunt. *Quæ hìc affert Proclus ex Gemino de helice, intellige de helice circa superficiē cilindricam, quæ in infinitum producta semper æquidistat ab axe cilindri producto in infinitum. &c. Quæ tamen non sunt parallelæ Euclidianæ. &c.*

§. II.

PARADOXVM, & PROBLEMA

De rectà, quæ asymptotos est cum appendicula quadratricis, nec tamen sunt parallelæ.

VT exemplo aliquo fruantur Tyrones, ac mirentur esse aliquas lineas, quæ licet non sint parallelæ, hoc est æquidistantes, vt vult Euclides, tamen infinitè productæ in vtramuis partem coincidere non possunt, hic exemplum dabimus, quod nō posuimus in nostris Apiarijs, vt aliquid extra ipsa noui (quod & alibi fecimus in materijs eorumdem Apiariorum) supersit ad varietatem, & ad tollendam satietatem ijs, qui Apiaria viderint, ac fortasse molestum accideret eadem subinde ipsis obtrudi. Explicabitur verò ità hoc à nobis exemplum, vt etiam sine geometricis subtilitatibus, ac demonstrationibus à Tyronibus queat intelligi.



Sit quadrans ABC: ſemidiameter CA producatur extra quadrantem in directum quantum lubuerit in D. Quadrantis AB arcus diuidatur in minutiſſimas, ac plurimas inter ſe æquales particulas, & ipſa AD in totidem, hic facilioris exempli gratia, quadrans in ſex E, F, G, H, I, &c. & pariter in ſex æquales partes diuiſa ponatur ipſa AD. Per puncta diuiſionum L, M, N, O, P, &c. educantur rectæ LQ, MR, NS, OT, PV, DX, indefinitæ, ac parallelæ ſemidiametro CB. Ex centro C per primæ diuiſionis punctum E in arcu quadrantis educatur CE, ac producatur donec incidat in Y primæ parallelæ LQ. Sic deinceps ex cẽtro per alias quadrantis diuiſiones producantur rectæ incidentes ex ordine reliquis parallelis citra, & infra ſupremam DX, per F in Z, per G in θ, per H in κ, per I in V. Ac præterea ſi libeat educere ex C alias, quæ incidant alijs quotlibet parallelis actu, vel cogitatione ductis inter PV, & DX, diuidatur PD in quotlibet, ac totidem partes, in quot diuiſus fuerit arcellus IB, & per eas diuiſiones fiat, vt factũ eſt in antecedentibus &c. Iam per puncta incidentiarum, ſiue ſectionũ Y, Z, θ, κ, V ex A deſcribatur mixta curuilinea AYZθκV, &c. Quã affirmo & ſemper magis accedere ad ſupremam DX, nec tamen ipſi vnquam coinciſuram, licet in infinitum producatur per alia infinita pũcta ſectionũ factarum in alijs ductis, vel imaginatis parallelis inter ipſas PV, DX. Ipſam AYZθκV ſemper magis accedere ad parallelam XD patet, quia ducitur per puncta ſectionum in parallelis ductis, vel imaginatis ſemper altioribus, ac vicinioribus ipſi XD; Verb. grat. per θ parallelæ NS altioris, ac vicinioris ipſi DX, quàm punctum Z in inferiori MR; per κ altioris OT, quàm ſit punctum θ in inferiori NS. & ſic deinceps.

Quod verò ipſa eadem AYZθκV nunquam coinciſura ſit ipſi DX, ratio, ſine longioribus ambagibus, pro Tyronibus eſt è ſuppoſitionibus con-

constructionis. Si enim ΑΥΖθκV protracta, &c. coincidere debet in aliquo puncto ipsi extremæ, ac supremæ DX, opportet id punctum in ipsa DX sit à sectione, quæ facta sit ab eductà ex centro C, quæ transeat per infimam, & extremam partem arcelli IB, & quæ coincidat in ipsam extremã semidiametrum CB, semper enim mixta ΑΥΖθκ, &c. incedit per sectiones eductarum ex C ad parallelas ductas per puncta signata inter AD; ac per cõstructionem debẽt semper diuisiones partiũ in arcubus quadrantis correspondere diuisionibus in recta AD, & quẽadmodum linea, quæ ex C educitur per quadrantis, verb. grat. penultimam sectionem I proximam ipsi B, producta secat penultimam parallelam TV proximam ipsi DX; ita educta ex C per infimum, & extremum punctum B producta debet secare supremam, & extremam D X. At hæc postrema sectio fieri nequit in DX; supponuntur enim per constructionem parallelæ ipsa CB producta, velut in λ, & ipsa DX, id est æquidistantes, siue, iuxta definitionem hìc Euclidis 32, neutram in partem coincidentes. Essent ergo Cλ, DX parallelæ, & non parallelæ, &c.

Quare habes duas lineas etiam non parallelas, mixtam ΑΥΖθκV, &c. & rectam DX inter se accedentes versus X, quæ tamen, etiam in infinitum productæ, nunquam coincident, &c. sed inferius mox conciliabimus cum Euclide paradoxa de asymptotis.

SCHOLION

N*Omen problematis, quod in inscriptione proximè præcedentis § 2 vsurpauimus, quid significet apud Geometras videbis ad Propositionem 1. huius lib. 1.*

§. III.

SCHOLION

M*Ixtam ΑΥΖθκV asymptoton hìc appellamus Quadratricis appendiculam, quia ducta est similem ad modum, quo apud Clauium ad finem lib. 6 Eucl. designatur mixta linea inuenta à Dinostrato, & Nicomede, atq; appellata Quadratrix à fine, ob quem inuenta est, nempe vt eius ope circuli quadratio perageretur. De qua vide Pappum Alexandrinum lib. 4. Mathem.*

them. Collect. & apud nos aliqua de eâ Apiar. 2. prog. 3. Schol. 3. post prop. 11. Ea verò quadratrix ducitur intra quadrantem ab alijs, at verò nos illi appendiculam produximus extra quadrantem. &c. Ex eâ quadratrice quasi corollarij loco asymptoton eduximus, quemadmodũ Nicomedis linea mixta conchòis inuenta ad quadrandum circulum & ipsa fit asymptotos rectæ, &c. vt habes ex antiquis apud nos Apiar. 3. Progym. 1.

SCHOLION.

Biennio postquam præcedentem appendiculam Quadratricis ad rectam asymptoton exposueram, forte incidi in nostri Guldini librum de centro grauitatis, atq; in eo quadratricem asympton reperi. Ab alijs igitur tacitum hic ego candidè, ac libenter Authorem nomino, vt sua cui debetur laus tribuatur. Plura de asymptotis ex quadratrice, atq; etiam paradoxa videbis in nostris analectis ad Apiaria nostra Philosophiæ Mathematicæ, quæ analecta editioni adpropero antequam secundum Aerarij tomum inuulgem.

SCHOLION.

Vsus alij paradoxici definit. 32. indicati.

Vide in fine Apiarij nostri 8 Astronomici, vbi diem, & Auroram perpetuas exhibemus geometricè ab absurdo contra hanc 32 defin. Breuitatis gratia hic omittimus. Vide inferius in vsibus axiomatis 13 magis in loco post postulata, vt ibi notatur.

SCHO-

§. IV.

SCHOLION.

Exclusio prædictorum pararadoxorum ex verbis definitionis Euclidianæ iuxta fidem codicis græci. Aliæ parallelarum definitiones indicatæ.

1 D*Efinitio Euclidis per id verbum:* rectæ, *excludit hyperbolicas, conchilem, nostram quadratricis appendicem, peripherias concentricas,&c. definit enim hìc Euclides lineas non coincidētes rectas.Verbis verò,*in eodem plano,*excludit helicem circa cilindrum, quæ non est in eòdem plano cum axe cilindri, cum quo axe non concurrit.Verbo,*in infinitum, *excludit rursus peripherias concentricorum circulorum, quæ sunt orbe suo terminatæ, non in infinitum productæ.Verbo deniq;* eiectæ,*excludit etiam reliquas aliquas asymptotos, de quibus nos in Apiarijs nostris Philosophiæ Mathematicæ, & in his Tomis in Euclidem, ad propos. 20. lib. 1. & ad 16, lib. 3. Nam rectæ illæ asymptoti, nec tamen parallelæ, producuntur per partes proportionales, vt in 3 Apiar. à nobis demonstratur; Itaq; non eijciuntur, & quasi temerè sine respectu ad partes proportionales, proferuntur.*

2. *Rectè hic noster interpres ad fidem græci codicis, vbi est: ἐκβαλλόμεναι. Vides quanti intersit cum fide interpretari Euclidem. Hæc enim fida interpretatio eximit Euclidianam definitionem ab obiectione non leui, quæ fieri posset ex aliquibus rectis, quæ in eodem plano in infinitum productæ, & in alteram partem annuentes, tamen non coincidunt, nec tamen parallelæ, aut æquidistantes sunt.*

Quanti intersit fida interpretatio verborum Euclid.

3 *Possidonius apud Proclum parallelas definit* quæ neq; annuunt, neq; abnuunt in vno plano, sed æquales habent omnes perpendiculares, quæ à punctis alterius ad alteram ducuntur.

Parallelarũ definitio 2.

Geminus vero, post eruditam linearum non coincidentium diuisionem, sic concludit de parallelis Euclidianis, easq; definit: earum linearum, quæ æquali semper distant interuallo, quæ sunt rectæ, spatium, quod inter eas positum est, numquam imminuentes in vno plano, parallelæ sunt.

Parallelarũ definitio 3.

§. I.

DEFINITIO 33.

Parallelogrāmi definitio.

Parallelogrammum est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

SCHOLION.

APplicato verba definitionis huius 33 figuris antecedentium definitionum 27, 28, 29, 30, quæ exhibent parallelogrammata, &c. nè frustrà hìc multiplicemus figuras, & verba.

§. I.

Definitiones 33, & 34, cur addendæ.

NOn immeritò apud Clauium adduntur Euclidis definitionibus definitiones parallelogrammi, & parallelogrammorum, & complementorum circa diametrum. Nam vsui futuræ sunt propositionibus præsertim 33, 34, 43, 44, &c. in quibus supponuntur.

§. II.

SCHOLION.

Addenda etiam diametri definitio in parallelogrammo.

CItatæ Euclidis propositiones in proximè antecedenti §. I. supponũt etiam definitionem diametri in parallelogrammo, propter quas propositiones, & propter alia, vt videbis inferius, addendam censemus eam definitionem.

§. III.

§.III.

Paradoxum de Parallelogrammo plurilatero vltra quadrilaterum ---

Vide apud nos in §. 10. ad propos. 24 huius libri 1. Elementorum Geometricorum vnà cum dem. ex Proclo.

DEFINITIO 34.

Cum vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno, eodemq́; puncto, ità vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.

Complemẽta, & circa diametrum consistentia, quænam sint in parallelogrammo.

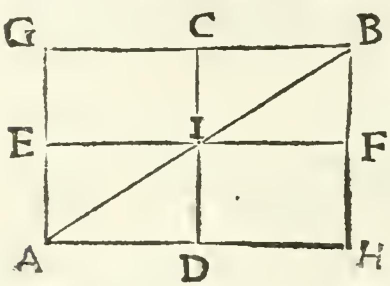
DEFINITIO 35.

In parallelogrammo diameter est recta linea ad oppositos angulos ducta, quæ parallelogrammum in duas ęquales partes dispescit.

Quænam diameter in parallelogrammo.

SCHOLION.

Demonstrationem habes inferius in propoſ. 34. vbi probatur quod hic ſupponitur ad diametri definitionem, ſiue notionẽ nominis. &c. Nos vero in hac definitione non affectatè, ſed ad vſum Tyronum vſurpauimus verbum: diſpeſcit; veterum, ac doctiorum poſteriorum Geometrarum exemplo, qui verbo diſpeſcere in ſenſu à nobis vſurpato vtuntur, eſtque quaſi proprium geometriæ vocabulum. Vide exempla in verſionibus Apollonij, Pappi, &c. & è neotericis doctioribus Geometris ante alios vide Commandinum, & Guidubaldum, qui ſæpius in ſuis Mathematicis lucubrationibus eo verbo vtuntur.



Igitur in parallelogrammo GH diameter eſt AB, & à CD, EF, quę parallelę ſunt lateribus GA, AH, ſecatur diameter in I ita, vt parallelogrammũ GH diuidatur in quattuor parallelogrammata GI, ED, DF, FC. Duo parallelogrammata CE, DF, per quæ nõ trãſit diameter AB, dicuntur cõplemẽta; duo verò ED, FC, per quæ diameter AB tranſit, circa diametrum dicuntur conſiſtere apud Geometras.

§. I.

Ariſtotelicum problema de diametri appellatione in parallelogrammo.

In parallelogrammo cur diameter ſola, quæ per angulos oppoſitos diuidit figurã in duas partes æquales

Philoſophus ſect. 15. Problematum, problemate 1. & 2. quærit de ea, quã Geometræ appellant in parallelogrammo diametrum; cur ea ſola appelletur diameter, quæ ad oppoſitos angulos, ac nõ etiã aliæ, quæ ad oppoſita latera ductæ in duas æquales partes figuram partiuntur? Vtrum quoniam ſola bipartito figuram diuidat? An quod ſola figuram ſecat per partes, ſiue membra, quibus inflexa coarctatur, cum cæteræ per latera diuidant? *Quę* ver-

Verba è 2. problemate plenius explicantur ab eodem Philosopho in antecedenti primo problemate. Ac videtur velle, diametrum meritò appellatam solum eam, quæ ad oppositos angulos ducitur, quia (vt inquit in prob. 1.) non destruit figuram, nouis angulis importatis ad latera, vbi nulli sint anguli (quod faciunt reliquæ præter diametrum) sed ducitur ad angulos vbi iam figura inflexa, & quodammodo diuisa est. Vide verba Philosophi, ac tu cense quanti sint eius rationes; easq; applicato schemati à nobis apposito ad maiorem euidentiam.

Cur sola, AB diameter, ac non etiam CD, vel EF? quæ & ipsæ bipartiuntur figuram? sola diuidens in duas æquas partes appellata est AB, quia non solũ diuidit bifariam, sed sola ad diuisiones .i. angulos, vbi committuntur latera, ducta est. Reliquæ solum bifariam diuidunt, ac non etiam per diuisiones, idest angulos. Quasi ergo bis diameter AB, ac per antonomasiam præ cæteris bifariantibus non per angulos. Ex his nostris apertissima tibi erunt verba Philosophi, quæ apud eum lege prob. 1.

POSTVLATA.

I. Postuletur à quouis puncto ad quoduis rectam lineam ducere.

II. Et rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III. Et quouis centro, & interuallo circulum describere.

§. I.

SCHOLION.

Postulata quid sint, quotuplicia, quid ab Axiomatibus differant. Euclidis de ijs asserta sententia.

Postulatū assumitur tanquā facile factu. Axioma tanquā in facile assensu. Vtrumque indemonstrabile.

1 G*Eminus (acutissimus, & doctissimus antiquorum Philosophorum Geometricorum) apud Proclum:* Differt vt Problema à Theoremate, ità Postulatum ab Axiomate. tametsi ambo indemonstrabilia sint, quemadmodum problema, & theorema demonstratione indigent. & postulatum quidem tanquam factu facile sumitur, axioma vero tanquam cognitu facilè communi omnium consensu conceditur. *Aliquando tamen apud veteres Philosophos Geometricos reperias nomine Postulati appellatum aliquid ad cognitionem, & ad axiomata spectās, velut apud Archimedem ante librum Aequiponderantium.* Petimus æqualia grauia ab æqualibus longitudinibus ęquè ponderare. *Quemadmodum enim conceduntur facili effectioni aliqua, sic & facili cognitioni, atq; ideò Postulata etiam dici possunt, quorum quasi postulatorum cognitioni facilis à discente conceditur assensus.*

Aliquando axioma sub nomine postulati.

Alia huc spectantia videbis inferius, vbi de Axiomatibus, & ad prop. Eucl. vbi de Theoremate, Problemate, de demonstratione, cō-

su-

structione, conclusione &c. Nam in operationibus constructionum vsus est postulatorum, in demonstrationum probationibus vsus axiomatum. &c.

2 *Caue interim, mi tyro, cum aliquibus discedere audeas à sententia, & iudicio Euclidis, qui, iuxta distinctionem hic præmissam, tria hic tantum in censum Postulatorum admittit, quæ operationibus interueniunt.*

Itaq; ab Euclide, ac etiam à nobis reijciuntur, qui aliqua ad cognitionem, & ad Axiomata spectātia in Postulata inuexerunt. Contra quos rectè, ac distinctè sensit Euclides hic in re pro verbo.

§. II.

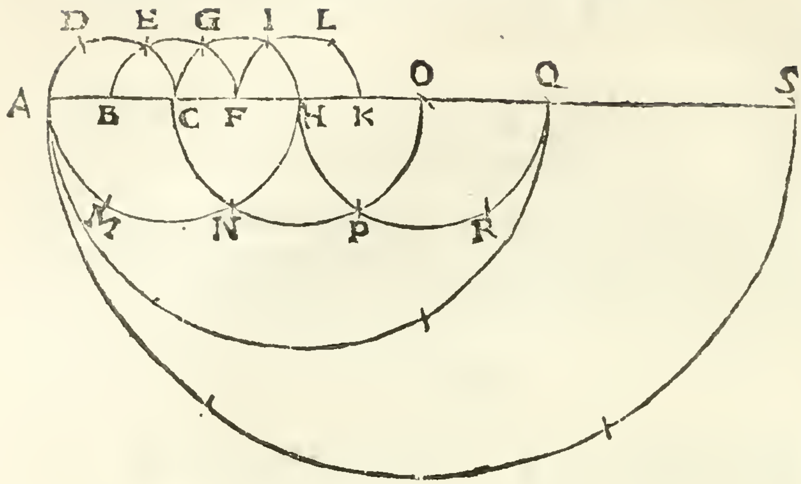
PRAXIS, ET PARADOXVM

De vnica circini diductione, quà Euclidis postulatum 2 absoluitur, hoc est recta linea continuatur. &c.

C*lauius lemmate* 11, *lib.* 1. *Astrolabij varijs modis exequitur, ac demonstrat* : Rectam lineam breuissimam in continuum extendere, vel *(quod idem est)* per duo puncta parum inter se distantia lineam rectam quantumlibet producere. *Sed quoniam eorum modorum aliqui supponunt demonstrationes è propositionibus librorum Euclidis, quas demonstrationes tyrones, quibus adhuc tantum definitiones cognitas supponimus, nondum didicerunt, ideo ne fidem illis proscientia ingeramus, reijciantur ceteri modi ad suas demonstrationes suis locis, & hic à nobis ponatur vltimus modus Clauij per vnicam circini diductionem ingeniosus, ac facilis. & cuius scientiam tyrones consequi possunt ex antecedentibus, nempe ex defin.* 17. *antecedenti de circuli diametro, vnicaq; suppositione facta, eaq; facillimè concedendà non solum è corollario propositionis* 15. *lib.* 4, *sed etiam è vulgata, & vulgo vsurpatà circini appellatione,* il Sesto, *quia scilicet semidiametri continet interuallū, quod sextam peripheriæ circularis partem subtendit.*

Vide nomē circino nahbeūl sesto.

Igitur Clauij verba Authoris clarissimi famà, & scriptione sunt. Libet hoc facillimè absoluere, & quidem, si iubet, vnico circini interual-

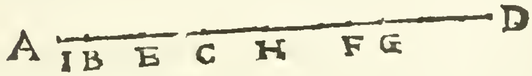


Vnico circini interuallo rectā quantū libet continuare.

teruallo. Sint enim data duo puncta A,B, vel recta AB producenda. Ex B per A arcus describatur A C, ex quo ad idem interuallum AB tres æquales arcus abscindantur AD, DE, EC, rursus ex C ad idem interuallum describatur arcus BF, qui per B centrum prioris transibit, cum eius semidiameter huius semidiametro ponatur æqualis; abscissis autem eodem interuallo tribus arcubus æqualibus, BE, EG, GF; (cadetq; punctū E in punctum intersectionis arcuū AC, BF, ob semidiametrorum æqualitatem) describatur quoq; ex F arcus CH ad idem interuallum, qui eadem de causa per C centrum antecedentis arcus incedet. Sumptis eodem interuallo tribus arcubus æqualibus CG, GI, IH, (cadetq; eadem ratione punctum G in sectionem arcuum BF, CH) describatur rursum per F eodem interuallo ex H, arcus FK, in quo iterum sumantur eodem interuallo tres æquales arcus FI, IL, LK, atq; in hunc modū constructio eadem continuetur quantum libuerit, aut opus fuerit. Dico rectam AB extensam transire per omnia pūcta inuenta C, F, H, K. Quoniam enim ex coroll. propos. 15. Eucl. arcus AD, DE, EC, tres sextæ partes circuli sunt, erit ADEC semicirculus, ideoq; diameter AC per centrum B transibit. Eadem ratione transibit BF per C, & CH per F, & FK, per H, &c.

§. III.

Praxis altera paradoxica, & ingenioſa cuiuſuis lineæ rectę quantumuis minimæ producendæ ad habitam proportionem, etiam circino non acceptam.



S*IT producenda, verbi gratia lineola AB, in triplum.* Extenſo circino quantumlibet ex A ad C, ſumantur ipſi AC duæ ęquales CF, FD, vt tota AD ipſius AC ſit tripla. Item ipſi C B ſumantur tres æquales DG, GH, HE. Dico AE, eſſe ipſius AB triplam. Quoniã enim tam multiplex eſt tota AD totius AC, quam multiplex eſt ablata DE ablatæ CB, nimirum tripla, erit quoq; multiplex reliqua EA reliquæ AB, vt tota totius, videlicet tripla, quod eſt propoſitum. *Sic idem Clauius lib. 8. Geom. Pract. propoſ. 23.*

SCHOLION

Ad intelligentiam, & confirmationem praxeos proximè antecedentis.

E*Tiam ſi ſatis eſſe debeat hic ſola praxis Tyroni, tamen indicanda ſunt etiam fundamenta theorica. Nititur praxis axiomate, quod eſt apud Clauium vigeſimum, & extremum:* Si totum totius, &c. & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui *&c. & videbis in lib. 5. propoſit. 5. & 19:* Si magnitudo magnitudinis æquè multiplex fuerit, atq; ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque multiplex erit atq; tota totius. *&;* Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam erit vt tota ad totam. *Quæ*

appli-

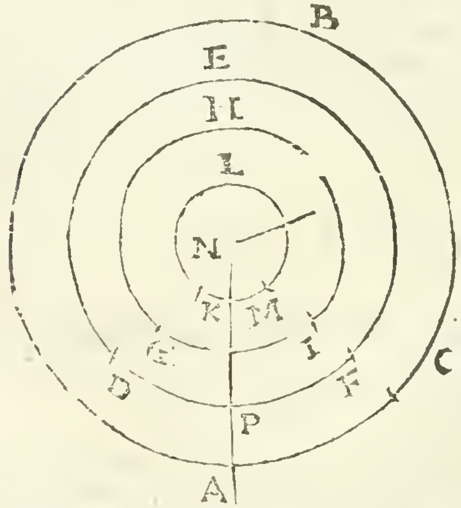
applica figuræ, & verbis demonstrationis Clauianæ, atque ètiam, si malis, numeris in sequentem modum: 18. 6 sint tota; 12 ablatum è 18, & 4 ablatum è 6, atq; vt 18 est triplum ipsius 6, sic & 12 ipsius 4; ergo & 6, (reliquum post ablatum 12 è 18) est triplum ipsius 2, quod est reliquum post ablatum 4 è 6. Vides 18, 6: 12, 4; 6, 2, binos in tripla propor. Interim vtere praxi hìc paradoxica, & ingeniosa.

§. III.

Applicatio, & vsus trium simul postulatorum in designatione lineæ meridianæ.

Ex Vitruuio antiquus & vulgatus modus meridianæ lineæ designandæ.

VItruuius lib. 1. cap. 6. quod obscurius proponit nos paucis, & clarius pro tyronibus indicabimus iuxta tradita à nobis in Ap. 8. Prog. 3. prop. 2. Describuntur varijs interuallis ex postulato 3. Eucl. plures cōcentrici circuli ABC, DEF, GHI, KLM. Et fixo perpendiculariter stylo in centro communi, N, notatur ante meridiem vmbræ vertex cum attingit aliquē è ductis circulis, velut in D; rursus post meridiē notatur in eiusdem circuli DEF altero pūcto attactus vmbrosi verticis, velut in F. spatium DF bifariam diuiditur in P, & ex postulatis primo, ac secundo à centro N per P ducitur recta, quæ est meridiana inuenta per applicationem trium postulatorum Euclideorum.



Cuius lineæ maximum momentum, & creberrimus vsus est in Astronomicis, Gnomonicis, Geographicis, &c. Aliquem videbis etiam inferius ad prop. 4. lib. 1. Eucl. Mundi plagas ea linea docet, & sine magneticà acu horaria horizontalia iuxta eamdem meridianam collocata ritè horas indicant, & solis locum in Zodiaco, &c.

SCHO-

SCHOLION.

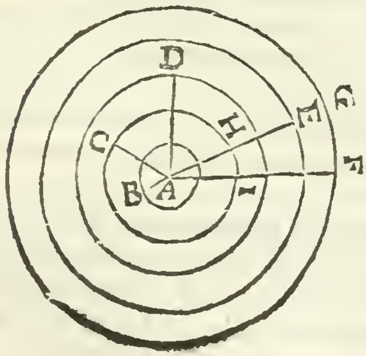
Cautio à fallacijs in prædicta meridianæ designatione.

VT emendatè designetur ea linea, nec fallaciam aliquam patiatur sciotericus hic vsus postulatorum Euclidis, vide quæ nos monemus, & corrigimus in cit. Apiar. 8. propos. cit. 2.

§. V.

Paradoxa, & admiranda machinaria, & Astronomica in Praxi tertij postulati, & in eius figurà, quà incredibilis velocitas primi mobilis proditur.

POstulatum tertium vnico tractu licet exequi, si habeas circinum, cuius alter pes sit multifidus. ex eodem enim centro ad varia interualla eòdem ductu signabuntur plures circuli, vt ostendit figura Campani, Orontij, Commandini, Clauij.

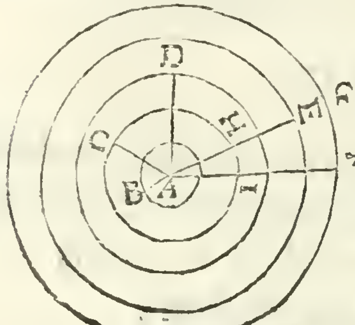


1 Accidetque id mirum, quod in antecedētibus docuimus in definitione, & designatione circuli, nimirum vt semidiametri A F quælibet pars eodem momēto impari velocitate circumferatur, dū partes quò sunt longinquiores à centro, eò semper velocius feruntur. eodem enim tempore pars F circulū maiorem conficit, quàm E, & E maiorem, quàm D, & D quā C, & C quàm B.

S 2 Hinc

2 *Hinc tyronibus ad cõdimentum quasi corollarij loco deducitur, & explicatur id, quod Aristoteles affirmat lib. 2. de Cælo, tex. 46. dum de stellarum fixarum motu, & velocitate vltra inferiores Planetas, loquitur:* Accidit velocitates esse secundum magnitudines circulorum, & celeriorem esse circuli velocitatem rationabile est circa idem centrum infixis. &c *scilicet stellis fixis in firmamento. Nam dũ motu primi mobilis, ac diurno mouetur & Planeta inferior (qui sit in H) & stella suprema (quæ sit in G) ac Planeta peruenerit ad I dũ stella peruenit ad F, dubitari nõ potest eodem tempore maiorem arcũ interceptum esse inter GF, quàm inter HI. In exemplo accipe sequentia.*

Cõuexi firmamenti ambitus quãtus sit.



3 *E tabellis apud Maurolycum, & Clauium in cap. 7. sphæræ Sacroboschi, ambitus cõuexi firmamẽti, siue supremi, & maximi cursũs fixarũ stellarum est milliariorum 1017561500 Cuius vigesima quarta est milliar. 42398437½. Ambitus conuexi celi lunaris est milliar. 1443750. Cuius vigesima quarta pars est milliar. 60156 6/24. Dum ergo vnà hora Luna percurrit milliar. 60156 6/24, vnà eàdem horà stella percurrit milliaria 42398437½. Iuxta prædictos calculos videre poteris quanto etiam sit velocior motus stellarum, siue maior earum arcus GF, quam arcus, qui sit 24 pars ambitus terræ. est enim terræ ambitus 22500 milliar. cuius 24 pars est 937 12/24 milliar. Itaque cursus prodigiosè velocissimi cælestium luminarium, dum aliud alio inferius, vel superius motu diurno, ac nocturno terram ab Oriẽte per Occidentem ambiunt, ab eodem centro, siue circa idem terræ centrum varijs interuallis, & pernicitatibus circulos describunt iuxta tertium hìc postulatum.*

Ambitus cõuexi cæli lunaris quantus.

Motus cælorum sunt vsus tertij postulati explicati.

4 *Ad prædictorum intelligentiam peculiariorem, & admirationẽ diuinæ immensitatis, atq; omnipotentiæ, accipe ex Clauio citato sequentia.* Est tantum illud spatium, quod in 1 hora punctum Æquatoris cuiuis in firmamenti conuexo conficit, quantum vix in annis 20904 peragerct quis, etiã si quotidiè sine vlla intermissione 40 milliaria conficeret, quod incredibile videtur, Nam velocior est motus illius

Quam immensum spatium vna hora Æquator percurrat.

illius puncti, quàm motus sagittæ alicuius, aut auis, quæ in eo temporis spatio, quo semel salutatio angelica recitatur conficeret milliaria 176660, hoc est circumiret totam terram ab ortu in occasum sub Æquatore sæpius, quàm septies, cùm ambitus terræ milliariorum 22500 in hoc numero 176660 cõtineatur sæpius, quàm septies. Quę velocitas captum ingenij humani excedit. Hoc autem ita esse facile sibi quiuis persuadebit, si attentè consideret in quadrante vnius horæ vix dici posse 60 salutationes angelicas, atq; adeo 240 in vna hora. Hinc enim efficitur tempus, quo angelica salutatio semel recitatur, esse $\frac{1}{240}$ vnius horæ. Constat autem punctum Æquatoris in firmamenti conuexo conficere milliaria 176660 in $\frac{1}{240}$ vnius horæ, cùm in 1 hora milliaria 42398437$\frac{1}{2}$ absoluat, vt diximus. quare necesse est vt sagitta, aut auis conficiat quoq; milliaria 176660, hoc est circumeat terram sæpius, quàm septies in spatio temporis vnius salutationis Angelicæ, si motum firmamenti consequi velit. Vel (si mauis) tanta est velocitas motus illius puncti firmamenti in 1 hora, quanta esset alicuius sagittæ, aut auis, quæ totam terram ab ortu in occasum sub Æquatore in 1 hora circumiret millies octingenties octogies, & quater, quòd terræ ambitus milliaria complectens 22500 contineatur in milliarijs 42398437$\frac{1}{2}$ (quæ in 1 hora ab illo puncto Æquatoris conficiuntur) toties, quot vnitates sunt in hoc numero 1884, & amplius; quæ celeritas ægre concipi potest. *Hæc ad condimentum, & ornamentum 3 postulati. &c.*

Prodigium velocitatis firmamenti.

SCHOLION

Contra damnatos Phylolaistas.

D*Octor Roffensis pro Astronomię peritia, quàm obtinet, egregiè ad meum sensum alicubi sic eloquitur*, Prædicta in proximè antecedenti § nullam habent dubitationem apud omnes Astronomos sana sentientes. Nihil verò refert ea non probari bustuarijs Phylolaistis astra sistentibus, & insanos illos suos motus terræ affingentibus. Quos Geometria, Astronomia, Physica Philosophia, Theologia (vt videre licet in plurium doctorum virorum volumnibus) meritò exploserunt, damnarunt, mulctarunt tanquam somniantes ea, quæ sensibus ipsis, primis principijs, ac diuinæ veritati manifestissimè repugnãt. Nimirum aliqua ingenia inanis gloriæ mancipia, dum vanissimam laudem nouitatis, & singulari-

tatis apud rudiores captant, etiam insanire non dubitant, lucratura scilicet apud seram, ac seriam posteritatem pro fama doctrinæ infamiam insaniæ.

§.VI.

Corollarium in Machinariâ Philosophia ex antedictis in applicatione, ac figura postulati tertij.

Libræ maiores cur sint exactiones.

ARistoteles in quæstione 2, quæ est prima de libra, rationem affert, cur libræ maiores sint exactiores, nempe quia brachia lõgiora maioris libræ sunt Diameter circuli maioris, cuius centrum est vbi libra suspenditur, & extrema Diametri maioris mota maiorem peragunt arcum, atq; euidentiorem in eo momento temporis, quo minoris libræ brachia mouentur à pari põdere. Cuius rationis quasi quoddam euidens exemplum est in figura tertij postulati, si fingas AH esse brachium libræ minoris, AG verò maioris, eodem enim tempore, ac pondere deferetur extremum minoris per arcum minorem HI, quo extremum maioris libræ per arcum maiorem GF. Quare ex arcu maiori GF melius, atq; euidentius apparet ponderis quantitas, quàm ex arcu minori HI.

Libræ vsus est quidam tertij postulati.

Itaque libræ vsus est quasi quædam praxis huius tertij postulati, dum minor, & maior libræ ad varia interualla suos peragunt circulos ad ponderum quantitatem ostendendam.

Affert Philosophus in ead. quæst. rationem alteram acutam, & geometricam, cuius tamen geometricam demonstrationem nos construximus in Apiar. 3 Progym. 10, Corollario post Propos. 11. Quæ quoniam hùc non faciunt, hic omittimus, ac tantum indicamus videnda in cit. Apiar.

AXIO-

AXIOMATA.

Communes ſententiæ, ſeu axiomata.

I. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

II Et, ſi æqualibus æqualia adduntur, tota ſunt æqualia.

III. Et, ſi ab ęqualibus æqualia tollantur, reliqua ſunt æqualia.

IV. Et, ſi inæqualibus æqualia addantur, tota ſunt inæqualia.

V. Et, ſi ab inæqualibus ęqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.

VI. Et, quę eiuſdem ſunt dupla, inter ſe ſunt æqualia.

VII. Et, quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia.

§. I.

SCHOLION.

Axiomata quænam ſint. Circa ea notata, & cauta aliqua. Ariſtoteles explicatus.

1 N*Omine Axiomatis appellatur apud Philoſophos* immediata (inquit Proclus hìc) per ſe ſeq; , propter euidentiã, fidem faciẽs propoſitio. idem enim eſt, iuxta Ariſtotelis, & Geometrarum ſentẽtiam, pronuntiatum, & communis notio. *Axioma igitur cùm ſit enũtiatio per ſe euidens, indemonſtrabilis eſt, atq; eſt primum ſcientiæ principium. Ariſtot. cap. 9. lib. 1. poſter.* dico autem principia in vnoquoque genere hæc, quæ quod ſunt, non contingit monſtrare. quid igitur ſignificant, & prima, & quæ ex his accipitur, quod autem ſunt principia quidem neceſſe eſt accipere, alia verò monſtrare. *Quod ait ſatis eſſe explicare ſignificationẽ axiomatis, & quæ ex his, caue intelligas demonſtrationes, ſiue propoſitiones demonſtrabiles deductas ex primis principijs, quaſi etiam eſſent ſolùm ad aſſenſum verbòtenus explicandæ; ſed intelligit Ariſtoteles id, quod rectè à Proclo notatur circa conditiones axiomatum, non eſſe ea multiplicanda, ſed ea tantum ſuprema ponenda, è quibus inferiora aliqua alia axiomata facilè deducuntur. exempli gratia, ſatis eſt ponere,* ſi æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia. *ex quo conſequitur & illud:* Quæ eiuſdem ſunt duplicia ſunt inter ſeſe ęqualia. *Nam (inquit Proclus)* quæ dimidio ſunt æqualia, cũ ipſum dimidium aſſumpſerint, eiuſdem duplicia quidem fiunt, & ſibi inuicem æqualia, propter æquale additamentum. *Axiomata igitur cum ſint ſcientiarum principia per ſe ſe euidentia, non egent demonſtratione. rectè enim Philoponus incit. Ar.* Principiorum eſſe principia impoſſibile eſt, *Quod tentaret qui principiorũ demonſtrationes moliretur. Merito à Geometricis Philoſophis Apollonius reiectus eſt, qui dum prima aliqua principia conatur demonſtrare coactus eſt aſſumere obſcuriora ad clariora demonſtranda. Vide exempla apud Proclum in lib. 3. ad pronuntiata Euclidis.*

Axiomatũ tantũ ſignificatio, non demonſtratio aſſerenda eſt.

Axiomata pauca, & præcipua ponenda.

Apollonius male principia aliqua nititur demonſtrare.

2 *Nos cum Euclide recipimus inter axiomata (vt videbis inferius) aliqua, quæ aliqui coniecerunt inter petitiones, vel prolixis digreſ-*

gressionibus demonstrare conati sunt. Modo enim ritè, & apertè explicentur (quod nos efficere conabimur inferius) statim veritatem in se latentem exponunt oculis à liuore, & ignorantia purgatis clarissimè allucentem. Definitiones aliquæ præcedentes lucem afferent aliquibus minus patentibus Pronuntiatis.

De suppositionibus, siue definitionibus, & dignitatibus, & Petitionibus, vide quæ aliter, & ad alias scientias pertinentia proponit Aristoteles cap. 10. lib. 1. Post. Nos hìc ea posuimus, quæ elementis ab Euclide concinnatis adsonant.

SCHOLION.

Ad faciliorem euidentiam axiomatum pro Tyronibus.

VEritatem, præsertim septem priorum axiomatum, experientur Tyrones in numeris facilè, ac iucundè.

§. II.

SCHOLION

In gratiam Chinensium Philosophorum.

Vitanda fallacia in vsu theologico axiomatis logici similis axiomati primo Geometrico.

NON omittam pro Doctoribus religiosis apud Sinas hunc gradum, quem hinc facere possunt ad aperiendam fallaciam, & tollendam dubitationem auditoribus suis, quibus Christianæ religionis ineffabile mysterium de Deo vno, ac trino aperuerint. Itaq; quemadmodum Philosophi Geometrici affirmant: Quæ sunt æqualia eidem, siue vni tertio, sunt æqualia inter se, *sic logici in pri. resol.* Quæ sunt eadem vni tertio, sunt eadem inter se. *Cuius axiomatis veritas*

Quæ sunt eadem vni tertio, sunt eadem & inter se.

tas quemadmodum constat in rebus creatis, ita fallit in applicatione quam malè vsurpant aliqui circa ineffabile mysterium trium in vnica diuina essentia personarum. Rectè enim Theologi negant blasphemam eam illationem: Ergo diuinæ in Deo personæ non sunt inter se distinctæ, quia scilicet non sunt distinctæ ab essentia diuina. Ioan. Euang. c. 10. Ego, & Pater vnum sumus. & definitum est in cap. firmiter. & in cap. Damnamus, de summa Trinitate, & fide Catholica. Igitur diuinæ personæ cùm sint eædem vni tertio, idest diuinæ essentiæ, sunt eædem & inter se, velut eidem æqualia & sibi æqualia.

Fallax illatio e præcedenti axiomate.

Missis aliquorum antiquorum Theologorum respõsionibus minus aptis, vt docet præ alijs noster Gregorius Valentia tom. 1. Theolog. disput. 2. q. 2. punc. 4, respondet ipse: id tertiũ, cui duo alia sunt eadem, si sit re non solùm vnum, sed & plura (qualis est diuina infinita natura, quæ nobis in Euangelio à Deo reuelata est, non solum vna, & singularis in essentia, sed & pluralis in personis) non valet illatio ab eo tertio ad duo extrema, quòd sint eadem inter se, immo potius infertur ab vno tertio plurali etiam extrema non esse vnum, sed plura. In rebus verò creatis, quia tertium quodlibet vnum ita vnum est, vt non etiam sit plura, ideo quæ vni illi tertio sunt eadem, sunt eadem etiam inter se, veluti quæ sunt æqualia vni tertio sunt æqualia inter se: Plura vide apud Theologos. Hæc satis hìc ad rem nostram.

Ratio fallaciæ.

§. III.

SCHOLION.

Ex Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ vsus aliqui axiomatum aliquot priorum.

VT tyrones, etiam ante vsum propositionum, & demonstrationum geometricarum gustum aliquem percipiant Mathematicorum aliquorum theorematum, ac problematum, & vsum aliquem videant aliquorum axiomatum hìc Euclidis, è quibus solis, sine vlla necessitate vlteriorum propositionum nos in nostris Apiarijs paradoxa aliqua demonstramus, lubet hìc vsus, & applicationes sequentes partim apponere, partim indicare.

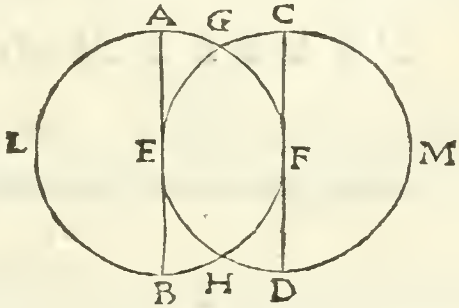
§. IV.

§. IV.

Vſus, & applicationes 2, atq; etiam 1 axiom.

THEOREMA.

Quadrangulum mixtilineum ſex laterum æquale lunulæ.



SEcent ſe duo æquales circuli per centra, & ducantur diametri parallelæ AB,CD, ac tangentes circulos in E,& F,vbi cētra ſunt. Dico quadrangulum mixtilineum ſex laterum comprehenſum ſub ABHDCGA æquale eſſe alterutri lunæ,nempe vel ipſi GALBHE, vel ipſi GCMDHF. Patet in figura. Nam æqualibus ſemicirculis CEDF, ALBE ſi apponantur communia AEG, BEH, æquales fiunt figuræ lunula GALBHE,& quadrangulum ABHDCGA.

Reliqua exempla vide in circulis ſe vltra, vel citra centra ſecantibus, in Apiar. 3. Progym. 7. Propoſ. 1.

SCHOLION.

T*Heoremata quæ nam ſint apud Geometras videbis ad propoſit. 1 huius lib. 1.*

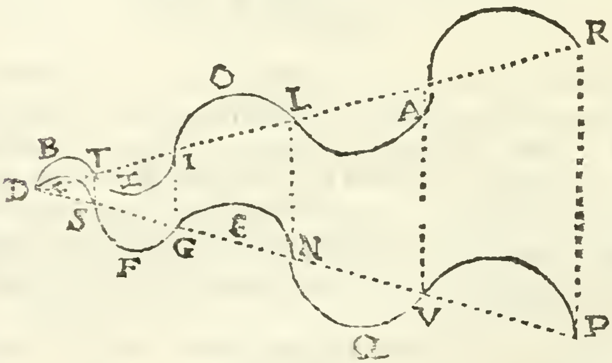
§. V.

Vſus item primi axiomatis.

Vide vſum primi axiomatis in corollario poſt. I. propoſ. citat. Ap.3.prog.7.ibi enim oſtenduntur è I.axiomate ſequẽtia paradoxa: Mixtilinea diuerſiformia tam triangula trilatera, & quadrilatera, quam quadrangula ſex laterum inter ſe æqualia, *eo quòd ſunt æqualia cuidam lunulæ.*

PROBLEMA.

Triangula rectilinea radiare, ſiue in curuilinea æqualia transformare.



Circa latera trianguli iſoſcelis PDR deſcribantur hinc inde varia circulorum ſegmenta minora, & minora verſus cuſpides, ità tamen vt ſint bina oppoſita ęqualia, vt vides SFG, THI, IOL, &c. figura curuilinea ſub curuis DBTHIOL, &c. & ſub DCSFGENQV, &c. vſq, ad R, & P, erit æqualis iſoſceli rectilineo PDR. ductis enim ad terminos oppoſitarum curuarum rectis ST, GI, NL, AV, RP, quoniam, per conſtructionem, æqualia ſunt ſegmẽta oppoſita SGF, TIH, ſi cõmune ſpatium interceptum adda-

addatur, quod mixtum est sub curua THI, & sub rectis IG, GS, ST, erunt æqualia inter se pars cuspidis rectilinea GSTI, & pars radij IGFSTH; idemq; demonstrabitur de alijs partibus, & segmentis DT, DS; GO, GL, LQ, LV, &c.

SCHOLION.

Circa eam radiationem, siue mutationẽ rectilineorũ in æqualia curuilinea, & circa praxim vt facile, ac sine errore fiat, vide plura in Apiar. 1. prælib. 3. propos. 4. Satis hìc hoc breue exemplum est vsus, & demonstrationis geometricæ à 2. Eucl. axiomate, sine aliâ vlterioris propositionis demonstratione.

§.VI.

Vsus, & applicationes tertij axiomatis.

THEOREMA GEOGRAPHICVM.

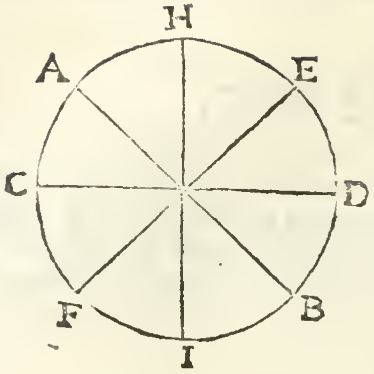
Latitudo geographica ciuitatum æqualis altitudini poli, ex 3. ax.

Magni momenti est in Geographiâ hoc theorema ad cognoscendos in omni terrarum plaga, & ad ponendos veros situs locorum in mappis, & globis geographicis. Latitudo geographica alicuius ciuitatis est quantitas arcus in meridiano intercepta inter Aequatorẽ, & verticalem primarium eiusdem loci. Quæ quanta sit in quolibet loco cognoscitur ex inuentione eleuationis poli eiusdem loci. Quam eleuationem pluribus, ac facillimis modis nos tradidimus in Apiar. 8. & 9. Astronom. & Gnomon. Eleuatio porrò inuenta poli dat latitudinem geographicam loci, quia sunt inter se æquales. quod sic demonstro è 3. axiomate.

Latitudo loci geographica qd sit

Latitudines locorũ, siuè poli eleuationes variè à nobis prodita.

Esto circulus meridianus CHDI; diameter Aequatoris sit FE; & E punctum æquatoris declinans à verticali HI per arcum HE. sit axis



mundi AB, & polus A eleuatus supra horizontem CD per arcum CA: dico eleuationem poli CA esse æqualem declinationi Aequatoris HE. Quoniam enim, per prima Cosmographiæ principia, distant inter se per quadrantē maximorū, & inter se æqualium circulorum polus A, & AEquinoctialis E, item horizon C, & verticalis H, si duorū æqualium quadrantum CH, AE communem arcum AH auferas, remanebunt æquales inter se CA eleuatio poli, & HE declinatio verticalis ab Aequatore. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

VIde in Apiar. 9. Prog. 3. cap. 3. §. 5 fallaciam Astronomicam in vsu instrumenti nostri ad horaria muralia describenda demonstratam ex hoc eod. 3. axiom.

Non solum æqualia, sed & commune si auferas, vel addas, vera sunt 2, & 3 axiomata.

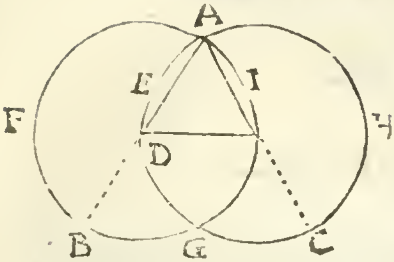
§. VII.

THEOREMA.

Triangulum mixtilineum æquale falci, siue triangulo mixtilineo falcato, ex 3. axiom.

SEcent se duo æquales circuli AFB, AEDC siue per centra, siue extra centra transeant eorum peripheriæ, modo ducta diameter alterius circuli secet peripheriam alterius, vt AB secat AED in D, dico triangulum è rectis, & curuà lineis mixtum

ACDA



ACDA æquale esse falci AFBDE. Cum enim æqualiũ circulorum ęquales sint semicirculi ABF, ACE, (etiam è 7. axiom.) si cõmune ADE auferatur, remanent, per 3. axioma, ęqualia AEDBFA falx, & ACDA triangulum mixtilineum.

§. VIII.

Vsus, & applicationes 2, & 3 simul axiomatum.

THEOREMA.

Triangulum mixtilineum quadrilaterum æquale lunulæ.

IN eàdem figurà dico triangulum ABGCA æquale esse vtrilibet Lunæ vel AEGBFA, vel AIGCHA. Quoniam enim, per præcedens theorema, æqualia sunt ACDA, & AFBDEA, si per 2 axiom. addatur commune DBGD modò ipsi ACDA, modò ipsi AFBDEA, erunt æqualia triangulum mixtilineum quadrilaterum ABGA, & Lunula AEGBFA.*

SCHOLION.

ERit porrò vsus nõ solum 2 axiom. in antecedenti theoremate, sed & 3 simul, si velis id theorema demõstrare sine altero antecedenti. Nam ex æqualibus semicirculis ABF, ACD & aufertur commune ADE, & additur commune DBG.

§. IX.

VSVS –

– Plures alij geometrici, & stereometrici, axiom. 1, 2, 3, &c. in Apiarijs indicati.

IN exemplum satis sint quæ hactenus attulimus è nostris Apiarijs. Alia exempla, & alios vsus axiom. 1, 2, 3, &c. in ijsdem Apiarijs vide Apiar. 1. prælib. 3. propos. 1, 6, 7. Ap. 3, Progym. 5. Propos. 12, & Progym. 6 Propos. 19; quibus in locis triangulum æquilaterum falcatur, figura curuilinea sub infracta circuli peripheriâ quadratur; solidū pelecoides sub mixtis superficiebus cubatur, siue in cubum æqualem transformatur, & triangula alia mixtilinea lunantur, siue in æquales lunulas mutantur, præter alias figuras in antecedentibus hìc lunulatas.

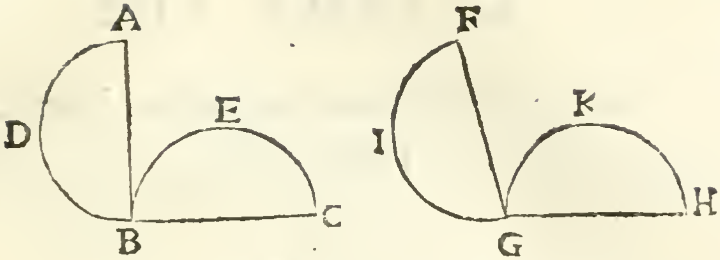
§. X.

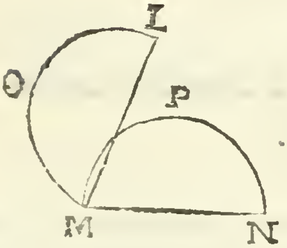
THEOREMA, & PARADOXVM.

Anguli curuilinei æquales rectilineis demonstrati è solis 2, & 3. axiom.

NOs hanc propositionē demonstramus in Apiar. 3, Progym. 5, Propos. 1. & 2 è 1, & 2 axiom. Illuc vise. Hic interim varietatis gratiâ lubet apponere theorema, & problema in exemplo, quod est apud Proclū, sed à Clauio expositum in Schol. ad definit. 5. lib. 5. Eucl. Clauij verba sunt:

Sit angulus rectus ABC contentus rectis æqualibus AB, BC, circa quas semicirculi describantur ADB, BEC. Quoniam igitur anguli semicir-





micirculorũ ABD, CBE ſunt æquales, addito communi angulo mixto ABE; fiet angulus totus curuilineus DBE tot angulo recto ABC æqualis. Similiter oſtendetur angulum curuilineum IGK æqualem eſſe obtuſo FGH; nec non curuilineum OMP acuto LMN, dummodo hic ab angulis ſemicirculorum LMO, NMP auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea LM, & curua MP.

AXIOMA VIII.

Quæ ſibi inuicem congruunt, inter ſe ſunt ęqualia.

§. I.

SCHOLION.

Fallacia, & paradoxum è conuerſo axiomatis 8.

Nō eſt verū vniuerſal: Quæ ſunt æqualia ſibi mutuo congruunt ſi geometrice ſuperponantur.

HAllucinari eos, qui putant valere conuerſum 8 axiomatis: Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuo congruunt, ſi alterū alteri ſuperponatur, *perſuadent, ac demonſtrãt ea omnia, quæ hactenus appoſuimus ad vſū præcedentiū 1, 2, 3 axiomatum. Aequalia enim ibi plura curuilinea. & mixtilinea rectilineis indicauimus, quæ ſibi mutuo non congruere manifeſtum eſt. Sunt etiam plura rectilinea inter ſe areis æqualia, quæ ſibi congruere non poſſunt. Qualia plura ſuppeditare poſſunt theoriæ, ac praxes (vt alias omittam) è propoſitionibus* 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 44, 45 *lib.* 1. *Elem. Eucl. & lib. 2. propoſ.* 14. *& lib. 6. propoſ.* 14, 15, 16, 25. *& plures aliæ, quas cùm didicerit tyro, ac viderit ex iis plura rectilinea æqualia eſſe, vel fieri poſſe æqualia, nec tamen congruentia inter ſe, &c. non dubitabit veram eſſe noſtram hanc animaduerſionem ad hoc axioma. Sit ergo pro paradoxo:* Quæ ſunt æqualia non & ſibi congruunt, *ſcilicet omnia.*

§. II.

§. II.

SCHOLION.

Recta intelligentia conuersi ex axiom. 8. & de superpositione, & congruentia geometrica.

1 PRoclus lib.3.in 1.Euclid. ad propos. 4. Angulorum autem æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterũ in rectilineis, in cæterisq; omnibus, qui eiusdem sunt speciei, vt in lunaribus, in systroidibus, atq; in vtrinq; conuexis &c. & inferius: Quæ æqualia data sunt sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autẽ dico quòd quæ æqualia data fuerint sibi inuicem congruunt.

Aequalia congruunt, &c. in eadẽ specie.

2 *Cõgruentia illa æqualiũ mathematicè, idest abstractè idealiter, intellectualiter intelligitur, non mechanicè ad oculum, & sensum; quę congruentia supponit etiam superpositionem intellectualem (non mechanicam, & sensualem) ęqualis supra ęqualem quãtitatem terminatam, figuratam. &c. Qua in re, idest in crassa illa, & ad sensum facienda superpositione falsus est Peletarius, & ausus est ex interprete Euclidis vertere se se in hostem ipsius, ĩpsumq; reprehendere (atq; adeo alios præcipuos philosophos geometras, quos citabo ad 4. lib.1.) ac propterea meritò ipse Peletarius à Io. Buteone, & à Clauio reprehensus est tanquam homo prauæ, atq; hebetis intelligentiæ in geometricis subtilitatibus, & abstractionibus. Vide inferius plura pro hoc 8 axiomate apud nos ad propositiones 4, & 5 lib.1. Euclid.*

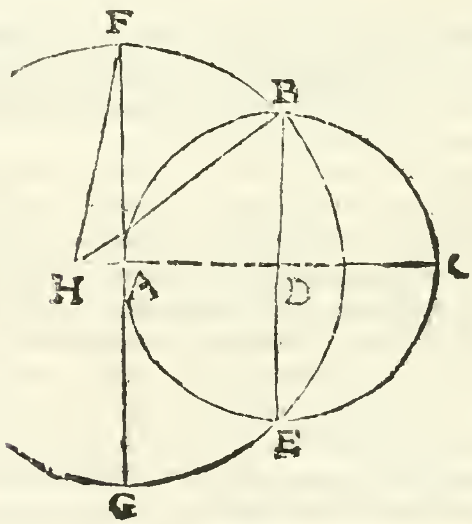
Cõgruẽtia, & superpositio abstracta intellectuales, geometrice, &c.

§. III.

PROBLEMA.

Organicæ cuiusdam quadraturæ circuli occasio, ac demonstratio ex 8 Axiomate.

IO. *Buteo lib.2. de quadratura circuli affert Caroli Bouilli tetragonismum 1, qui eiusmodi est.* Cum essem (inquit Bouillus) aliquando Parisijs super paruo ponte respiciendo ad rotas plaustri circumductas superuenit mihi visibilis, & facilis occasio assequendi finem intentionis meæ.



Esto datus circulus ABCE, in quo ducātur diametri CA, & BE se secantes angulis rectis in centro D, & producatur linea DA in H ita, vt qualium est DA quatuor segmentorum æqualium inter se, talium sit DH quinque, & connexis HB, agatur per signum A circulum contingens linea recta FAG; & cētro quidem H, spatio verò HB describatur circulus FBEG. Dicit Bouillus (apud Buteonem) lineam AG esse æqualem quadrāti peripheriæ circuli ABCE. Quoniā (inquit) si circulus ABCE esset rota circūducta super plano FG ad partem G, ipse punctus E caderet in punctū G, & ab altera parte punctus B in punctum F.

Ex huiusce commentationis occasione fortasse aliqui finxerunt circu-

circulum è solida materia æqualẽ ipsi ABCE, qui circa D axem voluatur, & peripheria ABCE attramento imbuta signet rectam inceptam, & terminatam in eodem peripheriæ circumuolutæ puncto. Cum ergo sit (aiunt) linea recta æqualis peripheriæ circuli ABCE, & (iuxta ea, quæ habes apud nos in Ap. 2, progym. 3. Schol. 2. ad propositionem 11) constet ex Archimede circulum æqualẽ esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus rectum angulum efficiens æquale sit semidiametro, & alterum æquale peripheriæ circuli; atq; ex Euclide pateat modus quadrandi datum rectilineum lib. 1. propos. 44, 45, 46, & in primis lib. 2, propos. 14. atq; etiam e lib. 6, præsertim propos. 25. Ex hisce confectum erit problema de circuli Quadratura.

Circulus cuinam triangulo æqualis.

Hortor te, mi lector, ac tyro, vt ad hæc melius percipienda videas in Ap. 2. prog. 3. citatum nuper 2. scholion, in quo censeo problema de circuli quadratura adducendum esse ad organicam operationem non minus, quàm cum regula, normà, circino rectas lineas, angulos, peripherias signamus. Si qui ergo materiali circulo organicè signant rectam peripheriæ æqualem, eiusdem videntur esse mecum opinionis.

Quadratura circuli organicè peragenda.

Tota autem vis eius organicæ quadrationis videtur niti geometrico hoc axiomate. Quæ congruunt sunt æqualia, *Cum ergo in illà materialis circuli circumuolutione singulæ partes, ac puncta peripheriæ circularis congruant cum recta, quam signat peripheria, non videtur dubitandum signatam esse rectam curuæ peripheriæ æqualem.*

Recta lineā signata æqualis peripheriæ.

Si Bouillus suã cõstructionem in hunc modum vel explicasset, vel ad praxim adduxisset, nec se se in determinatas angustias redegisset, vt diceret rectam AG interceptam à peripheria maioris circuli FBEG esse æqualem arcui quadrantis, fortasse nõ incidisset in paralogismum, quem ei opponit Buteo, dum demonstrat ab absurdo contra demonstrationem Archimedis, rectã AG maiorem esse arcu quadrantis AE. Demonstrationem ex Buteone hìc nõ appono, ne facessam negotium tyroni nondum assueto geometricis demonstrationibus è libris sequentibus Eucl. Interim modus organicus hìc positus ex occasione Bouilli tuetur se axiomate hoc 8.

Verumtamẽ organica hæc quadratio in eo valde deficit, quod particularis est, quemadmodum etiam quadratura Lunulæ ab Hippocrate Chio facta, licet ingeniosa, vniuersalis tamen non est. Vide Buteonem ad eam Hippocratis quadraturam lib. 1. Igitur licet dato particulari circulo per organicum hìc positum modum constitueretur quadratum æquale, varianda tamen esset circuli quãtitas ad mensuram

geometrici cuiuscumq; dati circuli.

Nos saltem pro tyronibus non negligendã, & reponendam existimauimus in suum hunc locum axiomatis 8, quo geometricè vtcumque nititur. Et iucunda, nec omnino est otiosa cognitio tyronibus ad aliquam lucem circa famosissimum problema de circuli quadratura. Vide nos in Ap. 2 citato &c. & in Ap. 1. Prælib. 3. vbi in Proteo Geometrico quadrauimus plures figuras ex axiomatibus antecedentibus 2, & 3.

AXIOMA IX.

Totum est maius sua parte.

§. I.

Vsus arithmetici axiom. 9 indicati in Apiar. &c.

Additio Arithmetica &c. ex Ax. 9.

ADdo ex *Clauio:* Omne totũ est æquale omnibus suis partibus simul sũptis. *Cuius axiomatis vsus est apud nos in Apiar. 11, Prog. 2. cap. 2, & & 5, & Progym. 3. cap. 4. dum circa praxes arithmeticas Additionum, Subtractionum, Multiplicationum philosophamur, & ostendimus eas prodire ab hoc axiomate. Vide, amabo, citata loca, & theorias apud nos. Est enim pretium operæ videre quomodo ex apposito hìc axiomate prodeant mirifica illa compendia logisticarum operationum. Vnde habebis quo condias, & ornes hìc Euclidem.*

AXIO-

AXIOMA X.

Omnes anguli recti inter se sunt æquales.

§. I.

SCHOLION.

Asseruntur cum Euclide inter axiomata sequentia 10, 11, 12, ac decimum exponitur.

1 Rectè ab Euclide posita esse inter axiomata 10, 11, 12 ostẽdemus hìc, & in sequentibus ostẽdemus etiã non rectè, ac sine vlla necessitate ab aliquib. partim aßerta inter petitiones, partim prolixè demõstrata. Nos autem eorum veritatem aperiemus præsertim ex anteced. definitionib. Ac primo quidem quod ad hoc 10 pertinet iuxta explicationem ad definit. 8, & 10 in antecedentibus traditam, intellige hìc inclinationem, atque ipsum spatium, ac quantitatem sub linearum inclinationibus. Omnes ergo anguli recti sunt æquales, quia eadem est ad rectos efficiendos linearum inclinatio, & eadem rectorum intercepta quantitas, si eodẽ circini interuallo, & centro facto in puncto concursûs linearum ad angulum rectum, secueris, & iunxeris lineas (ad rectum efficiendum inclinatas) arcu, vel rectà lineà. Erunt enim ducti arcus, vel lineæ angulis oppositæ omnes æquales. Iuxta quam explicationem non solum in eodem triangulo, sed & in diuersis erit quilibet angulus rectus in quantumuis maximo triangulo æqualis recto in quantumuis minimo. Non sic de obtusis, & acutis; varia enim est linearum ad eos efficiendos inclinatio & quantitas intercepta, & (quod paradoxum est) maior linearum inclinatio minuit quantitatem anguli interceptam, minor auget; maior enim inclinatio (verbi gr. in acuto) linearum ad inuicem minuit acuti anguli quantitatem, & c. cuius mensura sumitur, & comparatur, iuxta modum prædictum, ab eodem circini interuallo

Ostensio quomodo omnes recti æquales.

Cur nõ omnes acuti, vel obtusi inter se æquales.

uallo. &c. estq; maior angulus, verb. gr. acutus alio acuto, cui obtenditur linea, vel arcus maior, non solum in eodem triangulo, vt demonstrat Eucl. prop. 18. & 19. lib. 1. sed & in diuersis, acceptâ mensurâ linearum eodem circini interuallo, vt prædictum est. Exemplis expressa videbis in comment. ad propos. 9. lib. 1.

Demonstrantur ab aliquibus axiomata ad abundantiam, non ad necessitatem.

2 Proclus demonstrat hoc axioma 10. vide eius demonstrationem etiam apud Clauium. Sed quoniam axiomata per se nota sunt, modo rectè percipiantur verba, ideo demonstrationes axiomatum ad abundantiam, non ad necessitatem sunt. Sine demonstratione tamen affirmat idem Proclus patere hoc axioma ex communibus notionibus. Cum enim angulus rectus vnitatis, vel termini rationem habeat ad angulorum, qui vtrobique sunt, accretionem in infinitum, atq; decretionem, respectu cuiuscumq; recti æqualis est. Acutus est Proclus in angulo recto. Perpende, ac percipe, mi tyro, eius philosophationem.

Acuta ratio æqualitatis rectorũ inter se.

Omnes termini, omnes mensuræ, omnia extrema, & summa in vnoquoq; genere sunt æqualia: sic recti anguli, qui termini sunt accretionis in acuto, decretionis in obtuso &c. Acuto quidem acutior, obtuso obtusior est, at recto non est rectior angulus. &c. ergo recti omnes æquales. &c. Vide sequẽtia post hoc Scholion etiam moralia geometricis allucentia; & recole quæ ad definit. 10. §. 4.

Æqualis recto angulus rectus est; scilicet qui & rectilineus.

3 Cõuersum est huius decimi axiomatis: omnis angulus æqualis recto est rectus. Quemadmodum in decimo axio. affirmatur: Omnis angulus rectus omni recto est æqualis, Siue quod idem est: Omnes anguli recti sunt inter se æquales. Cõuersum igitur etiam verum est, sed in specie ab Euclide proposita, nẽpe in rectilineis, de quibus solis hic Euclides. Itaq; quicumq; angulus rectilineus recto sit æqualis notum est per se quòd est rectus. Quemadmodum notum est quod quicumq; rectus (rectilineus scilicet) est æqualis cuilibet recto. &c. iuxta explicationem antepositam. Quare argumentum Pappi à curuilineis est extra rem. Vide apud Proclum. Qui rectè concludit: Alij quidem quantitatem angulorum inspicientes rectum recto dicunt æqualem; alij verò qualitatem, similem. Quod enim in quantitatibus æqualitas, idem similitudo in qualitatibus est. Reuise dicta de anguli essentia, de inclinatione linearum, & de quantitate intercepta inter inclinatas lineas, &c.

Pappi ratio nihil valet contra Euclidem.

Rectus recto æqualis, & similis. &c.

§. II.

§. II.

Geometricè moralia explicata, & correcta ab Axiomate 10.

1 AT *enim ad defin. 10. §.7. diximus rectum angulum symbolum esse virtutis, &c. hic hoc axioma* 10: Oēs anguli recti inter se sunt æquales; *ergo (Stoicus quispiam obijciat) rectè affirmant Zenonij virtutes omnes esse æquales. Idq; exponunt exemplis etiam geometricis à circulis, à regula, qua recta ducitur linea, &c.*

Nam si dixeris perfectiorē esse virtutem, quam diuturnior exercitatio firmarit, respondent id extra virtutis essentiam esse, & pertinere ad maioritatem temporis, non virtutis, exemplo duorum circulorum, quo vtitur Seneca, dum epist. 74 ait. Vtrum maiorem, an minorem circulum scribas, ad spatium eius pertinet, non ad formam: Licet alter diu manserit, alterum statim obduxeris, & in eum, in quo scriptus est, puluerem solueris: in eadē vterq; forma fuit. *sic & virtus diālis æquè virtus, ac annosa, inquiunt Stoici.*

Maior circulus non differt forma à minori. vide inferius sanā applicationem moralem.

2 *Fundamentum Stoicæ opinationis est apud eumdem Senecam epist. 71. cum similitudine regulæ geometricæ:* Sapientia persuadet vnum bonum esse quod honestum est, hoc nec remitti, nec intendi posse non magis, quàm regulam, qua rectum probari solet, quam si flexeris, quidquid ex illa mutaueris, iniuria est recti. Idem ergo de virtute dicemus; & hæc recta est, flexuram non recipit, rigida est, amplius intendi non potest. *Idem cit. ep. 74.* Quod rectum est nec magnitudine æstimatur, nec numero, nec tempore: non magis produci, quàm contrahi potest. Honestam vitam ex centum annorum numero inquantū voles corripe, & in vnum diem coge æque honesta est. *deniq; epist.* 25. Nihil inuenies rectius recto &c. *Vt ex axiom.* 10, omnes recti anguli sunt æquales, ac æquè recti.

Exemplum hoc regulæ geometricæ moraliter, ac sane interpretabere inferius.

Senecæ, ac Stoicis Peripateticorum princeps respondeat, & axiomati huic 10 ab abusu vindicato rectum vsum rectorum omnium inter se æqualium moraliter attribuat. lib. 2. moral. Nicomach. cap. 6. definit virtutem: virtus est habitus electiuus in mediocritate quantum ad nos consistens: quæ quidem mediocritas ratione præfinita sit; atq; ita vt prudens præfiniret. *Mediocritatem, seu medium duplex*

Definitio virtutis.

ante

ante statuerat, rei, & quoad nos. rei medium quod ab vtroq; extremo æquè distat, estq; vnum, & idem omnibus. Quantum vero ad nos, quod neq; modum excedit, neq; deficit; idq, non vnum, & idem apud omnes est. &c.

Medium virtutis duplex.

Addit inferius: Quapropter substantia quidem, & ratione, quæ quid sit res exponit, mediocritas: quantum ad optimum autem spectat, & quod bene se habet, extremitas virtus est. *Vide ibi plura, & apud morales Theologos in primis D. Tho. 1. 2. q. 65. a. 1.*

Igitur angulus rectus virtutis est, iuxta Pythagoricos apud Proclum ad hunc lib. 1. Eucl. acceptà virtute, vt extremitas quædam est, idest perfecta, & planè congruens cum norma, & regula rectæ rationis. Vtq; omnes anguli recti æquales, ità & omnes virtutes inter se sunt æquales quatenus perfectum, & extremum quid sunt omnino rectæ rationi adsonans. At verò sunt inæquales virtutes in medio quod ad nos, quod varium est &c. iuxta citata ex Aristotele, & ab eo explicata in cit. cap. Hic hæc satis nunc. Alias virtutum inæqualitates genere, subiecto, vtilitate, firmitate, habitu, &c. vide apud cit. D. Tho.

Distinctio eludit vis oppositorum Stoicarum.

Hic ergo rectus est vsus moralis huius axiom. 10. Vnde habes quo interpreteris exempla Stoicorum geometrica de circulo, regula, norma, angulo recto, &c. & quo etiam interpretationem apertiorem accipias pro ipsomet axiomate 10. de rectorum angulorum æqualitate.

AXIO-

AXIOMA XI.

Si in duas rectas lineas recta incidens angulos interiores, & ad easdem partes duobus rectis minores fecerit, coincident duæ illæ lineæ in infinitum protractæ versus illam partem, ad quam sunt duo anguli duobus rectis minores.

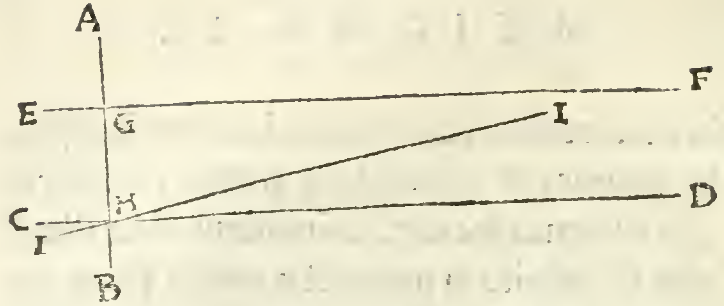
§. I.

SCHOLION.

Pro euidentia 11 axiomatis.

VT hoc 11 Euclidis axioma & intelligatur, & admittatur, opus est memorare, ac intellexisse aliqua ex antecedētibus in definitionibus, & postulatis eiusdem Euclidis. Quid sit angulus, qui duo recti, quid perpendicularis, quid acutus, &c. quid parallelæ, quid figura, quid triangulum, quid sit à puncto ad punctum lineam ducere, &c.

1 Igitur (in seq. fig.) si recta AB incidēs in rectas CD, EF efficiat internos FGH, GHD vel rectos vtrūq;, vel vtrumq; simul sumptum duobus rectis æquales (quod idē est: exemplū facilius pro Tyronibus ponamus in vtroq; recto) erunt AGF, FGH deinceps ad rectam FG efficientes vt ipsa GF in vtramuis partem non inclinetur, & pariter HD, propter æquales, ac rectos sibi deinceps, non inclinabitur potius ad F, aut auertet se ab F, quod est esse parallelas, perpendiculares, & efficere duos rectos, ac æquales inter se, iuxta definitionem antecedentem 10. Sin autem accidat vt rectæ EF, IL efficiant internos ad G, & H duobus rectis angulis minores, hoc est in exemplo, recta CD efficiat ad H angulum recto minorem, siue acutum, iuxta definit. 12,



id non poterit fieri, nisi CD inclinet se versus ipsam GF, & ex eà (iuxta definit. 8) inclinatione imminuat spatium anguli recti ad H, quod est conniuere, & facturas EF, IL, si cum eà inclinatione producantur, tertium angulum versus L, & confecturas figuram trilateram, siue triangulum, iuxta defin. 14, 20, 21. Ac sane iuxta figuras definitionis 12, patet in acuto angulo fieri inclinationem duarum inter se. Posita igitur inclinatione, quæ fit ab imminutione recti anguli, est deinde per se notum duas illas, vel alteram duarum inclinatam, si producantur, coincisuras ad angulum. Ac sensui per se notum est dum videt quodlibet triangulum. &c.

Euidentia 11 Axiomatis.

Axiomati 11 non obstat asymptoti.

2 Neq; obstat asymptoti (de quibus copiosissimè in nostro 3 Apiario) hoc est lineæ in Geometrica Philosophia, quæ in infinitum productæ nunquam se tamen contingunt. Nam eæ sunt extra genus linearũ ab Euclide hic positarum in hoc 11 axiomate. Expresse enim loquitur tantum de rectis lineis; asymptoti verò sunt ex lineis (saltem alterà) mixtis conchili, hyperbolicà, &c. Ac licet nos etiam duas rectas ostenderimus, quæ internos duobus rectis minores efficiant, & productæ tamen nunquam coincidant, tamen id paradoxum soluitur per productionem factam proportionaliter. Vide nos in cit. Ap. 3 Quæ proportionalis rectarum productio non requiritur in hoc axiom. 11. Conuersum huius 11 axiomatis demonstratur quidem ab Euclide in propositione 17, sed id fit ex abundãti; ac per se notum esse potest, si rectè intelligãtur termini, vt ibi in §1. & 2 docemus, & vt hic docuimus de hoc 11 ax. Vide nos ad eas prop. 16, & 17, lib. 1 Eucl. Quemadmodum enim si duæ rectæ cum tertia fecerint angulos internos minores duobus rectis, efficiunt inclinationem, & coeunt in angulum, hoc est conficiunt triangulum, ita etiam si coierint, & effecerint triãgulum, tunc etiam duo anguli eius triãguli sunt minores duobus rectis. In apposita figurà, si fit triangulum HLG ex concursu rectarum GF,

Conuersum huius axiomatis 11 demõstratur ab Euclide ad abundantiã

GF,HL, duo FGH,GHL sunt minores duobus rectis, propterea quod duæ GF,HL coierunt in triangulum.

Hoc potius est ex licentia, & consensu, quā resilire Antiquorū doctrinā in philosophia pronuntiata.

3 Hactenus pro Philosopho, ac doctore nostro geometrico Euclide. Pro quo, hoc est pro veritate, nobis honestius ducimus perstare, atq; eius inconcussam Philosophiam propugnare, quàm ab eo nō bene percepto sine necessitate resilire. Esto Proclus, & si quis alius ante, vel post ipsum, vt ingenium Geometricum excolant, prolixis excursionibus conati sint hoc principium demonstrare, non id tamen effecisse putandi sunt quasi arguerent falsitatis Euclidem, sed vt veritatem magis elucidarent. Tyronibus tamen ex prolixitates aliquādo potius tenebras, quàm lucem afferunt. Laudatâ igitur aliquorum abundantiâ, nobis satis est vnus Euclides, qui tria inter se mirè coniunxit veritatem, breuitatem, perspicuitatem. Non est tamen oscitanter legendus.

Breuiter explicāda sunt Geometriæ axiomata, reiectis prolixitatibus non necessarijs.

Ad maiorem etiam huius 11 axiomatis elucidationem, & confirmationē accipe à Possidonio apud Proclum sequentia ad definitionem parallelarum spectantia, & ex ea definitione lucem afferentia huic 11 pronuntiato. Parallelæ sunt quæ neque annuunt, neque abnuunt in vno plano, sed æquales habent omnes perpendiculares, quæ à signis alterius ad alteram ducuntur. Quæcumque verò maiores semper, atque minores fecerint perpendiculares, coincident aliquando, quia sibi inuicem annuunt. perpendicularis siquidem spatiorū altitudines, linearumque distantias terminare potest. Quocirca æqualibus quidē perpendicularibus existentibus, æquales etiam sunt rectarum linearū distantiæ: maioribus verò, atque minoribus factis, distantia quoque fit maior, & minor, & sibi inuicem annuunt illis in partibus, in quibus sunt perpendiculares minores. *Perpendiculares minores efficit angulorum à rectis imminutio. &c.*

Possidonij antiqui Geometræ locus ucculentus pro axiom. 11.

4 Mirū est à Gemino egregio Philosopho geometrico cōcedi quidem annuere duas rectas propter imminutionem duorum rectorum, negari vero id quod facile consequitur ex concesso (loquendo de duabus rectis non per determinatas partiales productiones) scilicet coincidere aliquando, si in infinitū producantur. Quod tamen ex 1, & 2 petitionibus mox patebit. Rectas quidem lineas *(inquit Geminus apud Proclum)* annuere, dum anguli recti imminuuntur, verum atque necessarium est *(iuxta antecedentia à nobis partim explicata, partim alibi indicata)* at verò magis, atque magis dum producuntur, annuentes lineas quandoque coincidere, probabile, non autem necessarium est, nisi aliqua ratio demonstret quod in rectis lineis hoc verum est. *Immò vero, mi Gemine, necessariū est, ac sine demonstratione, sed sola sim-*

Geminus Geometra contra Euclidem reiectus.

plici ostensione à primo postulato. Cum enim sine vlla difficultate concedatur, & concessum iam sit rectam in continuum producere, & à quolibet puncto ad quodlibet rectam lineā ducere, si, in figura, duæ rectæ EF, IL cum tertià incidente AB imminuunt angulos ad G, & H, a quantitate duorum rectorum, & annuunt, per concessa, quidni etiam concedas, ex postulatis, à punctis vel H, vel L duci, & produci posse rectam HL ad punctum quod sit in recta EF? igitur EF, IL, siue HL, annuentes coincident in id punctū, ad quod, per postulatum, potest duci, ac produci recta siue ab I, siue ab H, siue ab L. Quare non est temerè discedendum à sententia Euclidis, qui rectè, ac merito ponit inter axiomata hoc 11, quod sine demonstratione patet ex antecedentium definitionum, & postulatorum intelligentià. Vide præter hìc dicta, alia etiam confirmatoria inferius apud nos ad 17, & 29 propos. præsertim ad propos. 17, § 1, & 2. Sed, missis disceptationibus, veniamus ad vsus aliquos iucundos, & ad applicationes practicas huius 11 axiom.

§. II.

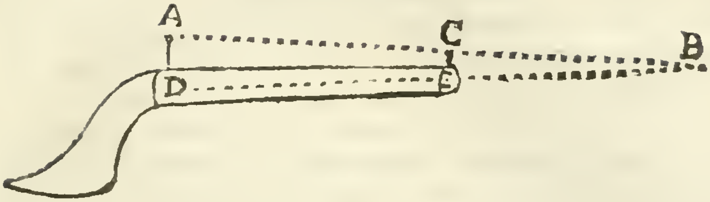
APPLICATIONES, VSVS,

Philosophationes Geometricæ, & quęstiunculæ aliquot paradoxicæ solutæ ab 11 axiomate circa eiaculationes ad scopum è balistis, & bombardis.

BRevitatis gratia omitto plura, & pluribus explicare, quæ tu, Lector, de tuo poteris ingenio apponere circa philosophationes varias, & paradoxa de balistarum, vel bombardarū eiaculationibus. Intra angustias axiom. 11, & definit. 32. me contineo.

Linea iaculatoria nō est vere recta.

1 Primo duæ concipiēdæ sunt rectæ lineæ, altera visualis directa AB per dioptras, quarū prior est ad oculum A, posterior est C versus obiectum, & scopum B. Altera linea est DB, quam signat eiaculatio, siue motus proiecti per balistam, vel bombardam explosi. Qui tamen motus non est verè in rectà linea, quoniam proiectum violento motu dela-



delatum extra breuissimas lineas ad centrum vniuersi tendētes (quas directionis appellant) semper proprio motu deorsum grauitando magis, ac magis recedit à recta linea delationis violētæ. Hìc nos lineam eiaculationis, si non vt verè rectam, tamen quasi parum à recta recedentem contemplamur.

In has duas lineas visionis, & eiaculationis quasi tertia incidens est alterutra dioptra linea AD, CE. Quæ si ita sint erectæ, vel vsurpentur, vt vtrumq; internorum angulorum faciant vel maiores, vel æquales duobus rectis, hoc est sint visualis, & eiaculationis lineæ AB, DB vel diuaricantes, vel iuxta definit. 32, sint parallelæ, ac sibi mutuo non coincidentes, nusquam fiet ictus ad scopum B, ad quem linea visualis, & eiaculationis directæ sunt.

Est ergo necesse vt, iuxta 11 axioma, fiant anguli ad D, & ad E inter visionis, & eiaculationis lineas duobus rectis minores, & sibi mutuo incidant. Vt autem ictus fiat ad scopum, ad quem directa est linea visualis, necesse est vt linea eiaculationis incidat lineæ visuali ibi, vbi ea terminatur ad scopū. Quod est vulgo. tirare, e coglier giusto di mira. *Ex prædictis licet soluas quæstiunculas quasi paradoxicas circa dioptras balistarum, & bombardarum, & circa eiaculationes ex ijs. Nam —*

Ictus ad scopū fit in cōcursu lineæ visualis cū lineæ eiaculationis.

2 Cur in balistis, ac bombardis altera versus scopū dioptra CE fit minor, quam ad oculum altera AD? Resp. Vt linea visualis AB inclinetur versus lineā eiaculationis DB, facto ad A angulo, qui minor sit recto, & vt coëant in B. Ac propterea in balistis dioptra C ab oculo remotior solet fieri mobilis sursum, ac deorsum, vt, pro varia exigētia eiaculationis, linea visualis per C directa angulum variet ad A, magis, aut minus recedendo à recto, sicq; minus, aut magis attollatur ad faciendum concursum propinquiorem, vel remotiorem cum linea eiaculationis. Quod est vulgo: tirar più lontano, ò più vicino di mira.

In sclopis, & balistis cur altera dioptra, q̄ vergit ad scopum, sit minor, ac varietur. &c.

3 Cur in balistis linea visuali ad scopum directā, si linea eiaculationis feriat infra scopum, dioptra remotior ab oculo demittitur; & si fiat

Cur dioptra versus scopū demittatur, quādo ictus fit infra scopum.

Cur attollatur eadem supra scopum fit ictus.

si fiat ictus supra scopum, eadem dioptra attollitur? Contraria enim ratione faciendum videtur, vt ictum demissum corrigas eleuatione dioptræ, minus altum demissione dioptræ. Ratio apparentis paradoxi in ea correctione est, quia cum linea eiaculationis ferit infra scopum, indicium est ab eâ nimium distare lineam visualem ita, vt nulla fiat coincidentia duarum earum linearum ad pūcta vel ante, vel ad scopū. Demissâ igitur dioptrâ versus scopum, linea visualis facit ad A angulum acutiorem, ac demittitur ad cōcursum viciniorem citra, vel ad scopum. Quo facto balista ad eam directionem accommodata ferit nō amplius infra, sed ad, vel supra scopum. At verò cum ictus est iusto altior, elata dioptra dilatat angulum ad A, & visualē lineam attollit, vt incidat remotius lineæ eiaculationis, &c. ob contraria dictis de demissione dioptræ.

In bombardis vbi neutra dioptrarum est mobilis fit correctio ictus demissioris per elevationem bombardæ, elatioris per demissionem. Idē quod accidit etiā in balistis per motiones illas dioptræ. Nam demissior dioptra exigit elationem balistæ, elatior demissionem. Atq; hisce rationibus paradoxum dissoluitur.

Ad scopum elatiorem, & valde demissū cur attollatur dioptra remotior in balista, vel sclopis, &c.

4 Cur quanto altior scopus est, dioptra remotior in balistis magis attollitur, vt fiat ictus ad scopum; quanto etiam demissior est scopus dioptra item attollitur? Vide ne implices quæstiunculam antecedentem cum priore huius quæstionis parte. Ibi enim quæsitum est de ictu elato supra scopum; hìc verò quæritur de scopo ipso valde alto, ad quē in eo situ eiaculatio, & ictus facienda sunt. Cur ergo si attollitur dioptra pro altiore, non demittitur item pro inferiore scopo? Ratio prioris partis est, vt ex elatione dioptræ C linea visualis faciat angulum ad A minus recedentem à recto, & linea visualis elatior coincidat remotius lineæ eiaculationis, quæ iaculationis linea propiùs, quàm par est, & citra scopum coincidit lineæ visuali tunc magis, ac magis quanto scopus est elatior; quia in ea scopi elatione pila proiecta è balista, vel è bombardâ minus proprio pondere degrauitat in latus, & minus à rectâ recedit; cum ergo rectiori via feratur, incidit lineæ visuali, & eam intersecat propiùs, quàm si curuatiori, & longiori linea ferretur. Idemque accidit, quando iaculatio fit ad partes valde demissas versus horizontem, &c. Experimenta enim physica docent proiecta rectiori linea ferri sursum, vel deorsum cùm ad perpendicularem, vel prope perpendicularem fit proiectio. Attollitur ergo dioptra altera remotior ob prædicta in iaculatione ad scopum elatum; atq; ob eandem causam attollitur etiam in iaculatione deorsum ad scopum valde demissum, quia in ea demissione pila defertur

Linea eiaculationis rectior est quo vel altior, vel demissior.

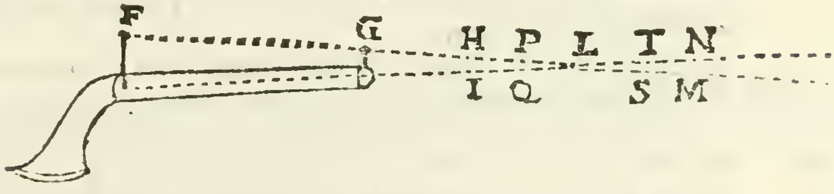
per minus curuam lineam, ac citius quàm par est, ac citra, seu supra scopum ferit. &c.

Quas easdem ob causas bombardæ, quæ dioptras immobiles habēt, in vtroq; ictu tum sursum attolluntur, tum deorsum demittuntur infra scopum à linea visuali spectatum.

Huiusce geometricæ philosophationis ignoratio effecit vt in pugna Pragensi, cùm Cæsariani Boemiæ regnum recuperarunt, hostes per dorsa collium dispositi, dum ad dioptrarum directionem bombardas explodérent, Cæsarianos irrumpentes per imas valles pilæ igneæ non ferirent, sed supra Cæsarianorum capita illæsa transuolarent.

5 *Quid est cur in eiaculationibus iuxta dioptras directis, aliquando quanto magis ad scopum accesseris, vel à scopo recesseris, tanto longius extra scopum fiat ictus? aliquando quanto longius à scopo recesseris, vel ad scopum accesseris, tanto fiat ictus scopo vicinior?*

Videtur res plena paradoxi, vt remedia errorem augeant; deberet enim vel accessus aberrationi à scopo in recessu, vel recessus aberrationi in accessu esse remedio.



Inspice figuram appositam, in qua, ob angulum F recto minorem, inclinata visuali ad iaculatoriam lineam, iuxta dioptras F, G spectatur scopus H de proximo, & aberratio est in I, item post concursum linearum, & intersectionem in L, scopus lōgissimè spectatus est in M, aberratio autem eiaculationis est in N. Rursus ante decussationem L spectatur scopus P longinquior, quàm H; & post decussationem L spectatus scopus est S propinquior, quā M. Quoniam igitur in inclinatione mutua linearum visualis, & iaculationis ante, & post coincidētiam, & intersectionem L, vides maiora esse interualla intercepta inter HI, & inter NM, minora inter PQ, & inter TS, inde est vt in spatio proximo FH, & in remotissimo FM fiāt maiores aberrationes, in I quidem infra, in N verò supra scopum L; contrar a ratione in spatio FP maiore, quàm FH, & in FS minore, quàm FM, fiant minores aberrationes à scopo, in Q quidem infra, in T vero supra scopum. Reliqua, & plura tute applica figuræ, mi Tyro.

Paradoxa soluta in eiaculationibus modò accedēdo, modò recedendo.

AXIO-

AXIOMA XII.

Duæ rectæ ſpatium non concludunt.

§. I.

SCHOLION.

Quid ſit à duabus rectis ſpatium non concludi.

AD abundantiam habes à Proclo huius 12 axiomatis demonſtrationem lib. 3, in comment. ad prop. 4. Quam vide etiam apud Clauium amplificatam in Schol. ad hoc 12 ax. Patet veritas huius axiomatis 12 tum ex poſtulato 1, tum ex definitione rectæ lineæ.

Vna recta, non duæ, duo puncta iungit.

Accipe hic, extra demonſtrationem geometricam, è Proclo verba illuſtratoria huius axiomatis: figuram iuxta verba tibi finge, mi Tyro, ad intelligentiam. Vna recta linea ſemper duo puncta coniungere poteſt, non autem duæ. *vnica tantùm, quæ ſit recta, duci poteſt, & quotcumq; inter eadem puncta ducentur, quæ perfectè ſint rectæ, ſemper in eandem coincident, ac proinde ſpatium non intercipiet inter ſe, ſed alterius ſingulæ, ac omnes partes alterius ſingulis, & omnibus partibus congruent.* Plures quidem circumferentiæ duo pũcta coniungere poſſunt, & in ijſdem partibus, & in contrarijs. hoc modo enim extrema quoq; diametri duabus quidē circumferentijs, vnà verò rectâ lineâ coniunguntur, fieri autem poteſt, vt & extra, & intra ſemicirculos infinitæ circumferentiæ data puncta coniungentes deſcribātur. cauſa verò eſt, quoniam recta linea eadem habētium extrema eſt minima, vnum autem vbiq; minimum eſt, & ſemper menſura aliorum infinitudinis fit. *&c. Satis ſunt prædicta elucidationi, & euidētiæ huius 12 axiomatis, & propugnationi Euclidis qui id reponit inter axiomata.*

Plures cir cũferentiæ poſſunt iũgere duo puncta.

Ratio acuta pro axio. 12.

AXIO-

AXIOMA XIII.

Duæ lineæ rectæ non habent vnum, & idem segmentum commune.

§. I.

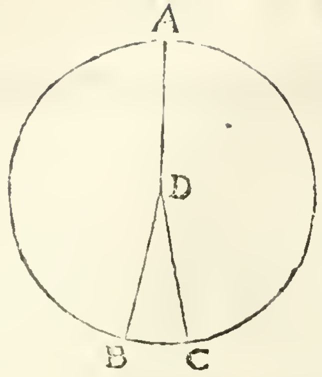
SCHOLION.

Expositum, & assertum axioma 13.

Axioma hoc ab Euclide non ponitur, nec apud eum vllius est vsus. Quoniam tamen in Geometricà Philosophia (in nostris Apiarijs nos aliquando) & in re aliquà physicà demonstrandà vsui esse potest (vt mox in seqq. §§ videbis) & à Proclo ad 1. propositionem confirmandam contra calumnias Scepticorum, apponitur, non erit hìc etiam otiosè à nobis appositum. Demonstrationem, ad abundantiam, huiusce axiomatis vide apud citatum Proclum, à quo & Clauius.

Nobis, qui axiomatibus iniuriam fieri arbitramur dum demonstrantur, iuxta ea, quæ initio attulimus ad axiomata Euclidis, satis erit veritatem huius 13 axiomatis aperire ex definit. 4, & postulato 2, & verba Procli afferre: Quodammodo in principijs primis acceptum fuit, duarum nempe rectarum non esse commune segmentum. Etenim rectæ definitio hoc comprehēdebat, si quidem recta est, quæ ex æquo inter sua collocata est puncta. Hoc enim æquale esse punctorum interuallum ipsi rectæ eam, quæ ipsa puncta coniungit, vnā, breuissimamq; efficit, ita vt si quis ipsam secundùm partem alteri adaptet, secundum reliquam quoq; partem ipsi congruat. Cum enim in extremitatibus suis sit constituta, eo quod breuissima est, totam in totam cadere necesse erit. Deinde hoc etiam in petitionibus manifestè acceptum fuit. Illa enim petitio, quæ ait: rectam lineam terminatam in directum producere, perspicuè ostendit, quod ea, quæ producitur, vna esse debet, vnoq; motu produci.

In figura hic appositā ex Procli à nobis, omissā demonstratione,



vides in D, vbi duæ BD, CD committuntur, fieri inflexiones, & angulos vtrimque ad D, esseque non duas in directum ductas, sed tres AD, BD, CD à D in diuersa diductas, & tres angulos facietes ad D. Itaq; duarum rectarum non esse commune segmentum patebit consideráti verba ipsa ipsius axiomatis. Recta enim est quæ sine flexione, ac breuissima habet suas omnes partes in directum iacentes. Ac proinde si duæ rectę à diuersis partibus ductæ conueniant in aliquod commune punctum, protractæ vltra id commune punctum in diuersa ibunt, nec coibunt in segmentum vtriq; commune, nisi earum saltem altera flectatur ad punctum commune, ac proinde in ea flexione desinat esse vna recta, hoc est desinat habere omnes partes in directum iacẽtes cum reliquo cõmuni segmẽto. Quare non amplius duæ rectæ, sed tres erunt. &c. Hic dicta tu, mi Tyro, applica figuræ, vt euidentiora videas. Ingenio ingenuo, perspicaci non peruicaci hæc satis.

§. II.

SCHOLION.

Ab axiomate 13 quæstio physica soluta de fractione in instanti omnium simul partium in rebus friabilibus, atq; inflexibilibus.

I*Nspice figuram ex demonstratione Procli ad axiom. 13 hic appositam, & sit marmorea, vel vitrea, &c. superficies circuli ABC, quam velit quispiam vi manuum inflectere, atque infringere per diametrum, vel prope diametrum; si fractio dicatur fieri non in instanti, sed per partes successiuè, ergo dũ partes, verbi*

bi gratia inter BD, CD, disiunctæ fuerint, & reliquæ inter DA non-dum disiunctæ, fiet commune segmentum DA duarum rectarum AB, AC. Marmor enim, vitrum &c. cùm inflexibilia sint, per rectas aperiuntur, nec patiuntur fieri flexionem in D; quare vtraq; DA, CA rectæ sunt, quarum commune segmentum DA fieri non potest. Vide inferius in §. 3, & 4, & seq. alia huc spectantia.

§. III.

SCHOLION.

Narratiuncula, & demonstratio ex 13 axiom. cur plana exquisitè polita, & iuncta diuelli nequeant in oppositas partes. Ac notæ ad Scaligerum.

I*Vlius Cæsar Scaliger de subtilit. ad Card. exercitat. 333.* De planis exquisitis, quæ semel iuncta separari nequeāt, verissimum est. Eramus olim apud Albertum Durer aliquot tyrunculi. Quorum vnus cum, vt alibi solebat, sui roboris clarum specimen multis factis periculis dedisset; demulcēs illi caput Durer, Ecquid igitur, inquit, videmus te perpusillam rem moliri posse? Simul ostendit æreas tabellas duas, alteri alteram superpositam, quas ille ad scalpturam quādam compararat. Tolle inquit, superiorem leniter apprehensam, atq; ab inferiore disiunge. Cùm ille frustra tentasset: ac maiore vi aggressus nihil procederet: causatus adolescens dolum ex ferruminatione, deposuit. Tum Durer inclinatis illis facilè effecit, vt quia esēst maximè lubrica politurà, altera ab altera quasi deflueret. Hanc narratiunculam obieci tuæ dubitationi. Ais enim; Verisimilius est non dari exquisitè plana. Quin dari necesse est. Duo enim specula, si mutuo attritu confricentur, adeò plana fient, vt propemodum vnum sit. Ratio quare non diuellantur, vna est. Quia vna linea nequit esse actu duæ. At essent duæ vna recta, si fieret angulus. Esset enim & contactus, & non contactus: propterea quod non datur vacuum. Et in minore tempore non fit maior motus. Ergo ad-

Dari exquisite plana.

Ratio geometrica cur duo perfectè plana non diuellantur.

dis & illa frustra. Vel aerem, inquis, inter poros semper concludi, aut ipsas inter superficies se contingẽtes. Vbi subtilitas maxima, ac maxime celebranda. Simul enim & aerem ponis inter ipsas superficies, simul contactum esse dicis ipsarum superficierum. Latuit hactenus id nos; Duo corpora se se mutuò contingere, tertio corpore intersito. Idem vt sit dissitum & contiguum.

2 *In Scaligeri verbis latet ratio narratæ ibi rei ab hoc 13 axiomate, vbi ait;* Ratio, quare nõ diuellãtur vna est, quia linea nequit actu esse duæ. At essent duæ vna recta si fieret angulus, &c. *ac si diceret cum Euclide:* duæ rectæ nequeunt habere vnum, & idem commune segmentum, *iuxta à nobis explicata. Aduerte, tyro, rationem Scaligeri debere esse, & concludere non de lineis, sed de superficiebus, de quibus in ea narratione agitur: at Scaliger argumẽtatur à linea. Vim tamen habet eius ratiocinatio, quia cùm plana superficies fiat ex ductu rectæ lineæ secundum latera, quodammodo constare videtur plana superficies ex infinitis compositis lineis. Itaq; quod de vna, de reliquis, ac de tota superficie concluditur.*

Axioma 13 quomodo valeat etiã de superficiebus.

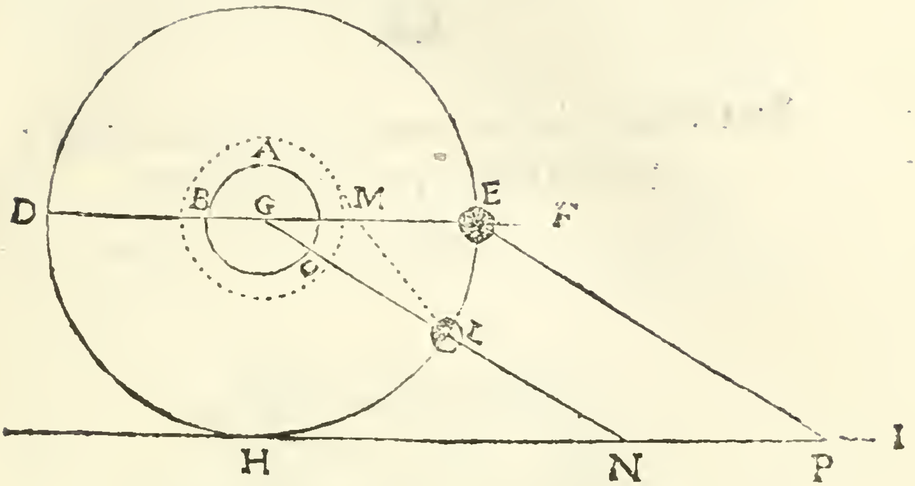
§. IV.

PARADOXVM

In vsu, & applicatione axi. 13, de Aurorà perpetuà in perpetuo accessu solis ad horizontem.

IN *Apiar. 8, Prog. 5, Prop. 8, & in corollario, pluribus hanc Auroræ perpetuitatem, ac præterea diem etiam perpetuum exposuimus. Hìc tantum de Aurora paucis perstringimus vsum hunc non iniucundum huius 13 axiomatis, vt Tyrones demonstrationem discant astronomici huiusce paradoxi ante vsum proximarum demonstrationum Euclidis. Facilius hìc, quàm ad defin. 32, exercebitur hoc problema, nempe post concessa postulata de circulo describendo, de lineà rectà producenda, &c. quæ hìc supponuntur, & mirificè à Proclo habes explicata pro vsu huius problematis; vt mox videbis.*

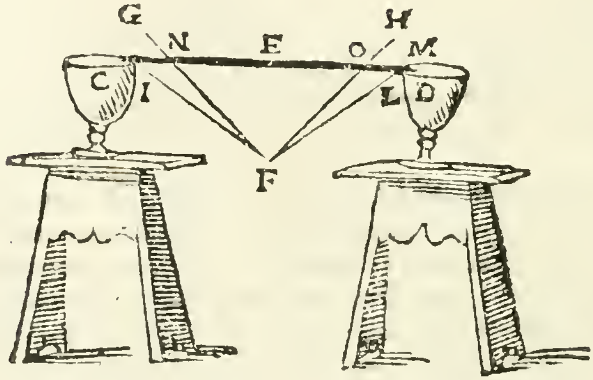
Sit



Sit terræ globus ABC, lineà vero horizontis aſtronomici ſit DGE tranſiens per cẽtrum vniuerſi G, & protracta etiam vltra E, & F, in infinitum. Sit imaginaria tangens HP parallela horizonti DE. Sol L ſit paullo infra horizontẽ, ac primis ſuis radijs pingat in athmoſpheræ vaporibus, vbi M, primos Auroræ colores ſpectatos ab habitantibus in A. Moueatur ſol L, & accedat verſus horizontem, ità tamen vt ſint ſemper in eadem rectà lineà motùs & cẽtrum vniuerſi G, & cẽtrum ſolis L, & ſolis motor Angelus N. Qui quidem Angelus moueatur deinceps per rectam HNI, ac dùm progreditur verſus I, Sol etiam accedit verſus E. Dum igitur ita gradiũtur in èadem recta GN Sol p arcum LE, Angelus per rectã HI, peruenerit, ſi fieri poteſt, ſol ad lineam horizontalẽ in E, & Angelus in P. Erit ergo Sol in duplici rectà, alterà horizontali GF, alterà ipſius motus, quæ per ſuppoſita, debet ſemper eſſe vna recta iungens centra vniuerſi, & ſolis, & Angelum motorem. Igitur duæ rectæ GF horizontalis, & linea motùs GEP recta ſuppoſita, habent commune ſegmentum GE, contra 13 axioma; quod non poteſt eſſe. Igitur nunquam ſol poterit ad E pertingere. &c.

§.V.

Paradoxum de fractione baculi supra vitreos cyathos illæsos, ex 13 axiomate.



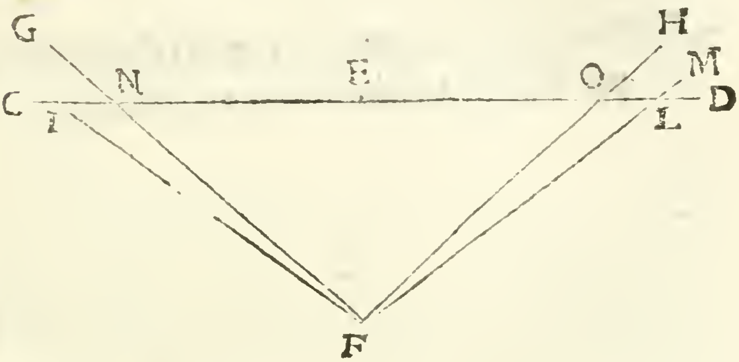
Cautiones pro cõstructione, & praxi problematis.

SVnto vitrei cyathi C,D aquà infusi, vt melius consistant. Esto bacillus gracilis, & aridæ, ac friabilis materiæ (quales aridi arundinei, vel similes &c. non autem virides, lenti, & velut iuncei. &c.) Qui bacillus extremis oris cyathorũ superponatur ita, vt eius extrema parum extent intra oras, & ora cyathorum. Quorum inter se distãtia, cæteris paribus, quo maior, & bacillus longior, eò fuerit aptior effectui. Insistant fulcris cyathi ad altitudinem, minimũ dimidij corporis respectu illius, qui experiri amat effectum propositi paradoxi. Accipiatur deinde claua, vel baculus oblongus, crassus, ponderosus, quo medium E totis viribus, celerrimo, & continuato ictu feriatur, illicò videbis bacillum diffringi, immotis, & illæsis cyathis.

Ratio admirãdi effectus in problemate proposito.

Cuius iucundi, & admirandi spectaculi cum prædictis conditionibus, & cautionib. certi, & exhibiti ratio est, quia dum claua ictu in medium E inclinat partes E in F, simul ac semel extremæ partes, & segmen-

segmẽta in arido baculo eleuantur ad G,& H, & resiliunt à cyathorum contactibus in I, & L.. Quo fit vt, dum ictu graui, & continuato magis, ac magis deprimuntur partes F, magis, ac magis baculi extrema segmenta recedãt à cyathorum omni contactu,& læsione.



Eleuari verò à contactibus cyathorum extrema baculi segmenta breuissime, ac geometricè in geometrica hic altera figura expeditiore mox demonstro. Ab F iunctæ sint geminæ rectæ ad puncta I, L, vbi baculus CD superpositus tangit oras extremas cyathorum ita, vt extrema segmenta IC, LD promineãt parallela superficiei aquæ in cyathis. Accipiamus, euidentioris explicationis gratia, partes alterutras baculi paralleli,& bac. inclinati (ac quod de alteris, etiam de alteris pari ratione demonstrari poterit) verbi gratia partes ED, FD. Suppono cautionem de baculo arido, & inflexili FD, in quo non fit inflexio (nec fieri potest sine fractione) in L, vt patet in experimento, dum ab ictu fit flexio, & fractio tantum in F, nec cyathus quidquam patitur in L, quem tamen diffringi, vel inuerti necesse esset si fieret fractio, vel flexio in L.

Cõfirmata geometricè

Quo posito, si, dum ab ictu fit depressio ex E in F, non eleuatur à contactu cyathi segmentum LD, ergo idem segmentum LD, contra 13. axioma, est commune duabus lineis rectis, nempe ipsi ED, & ipsi FD, quæ quidẽ FD, per proximè firmatum suppositum, nõ flectitur, nec frangitur in L, ac proinde etiam ipsa vna recta est. Absurdum autem contra 13 axioma ferri non potest, ergo segmentum LD eleuatur à contactu.&c.

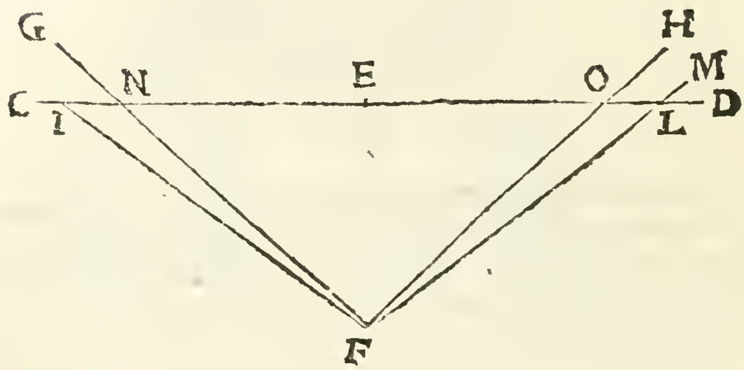
Eodem modo demonstrabitur eleuari à contactu alterius cyathi segmentum CI. &c.

§.VI.

§. VI.

SCHOLION.

Confirmatorium prædictorum de baculi superfractione illæsis vitreis cyathis.



QVid si quis affirmet eleuari partes inter LD, & inter IC, sed non eleuari à contactibus cyathorum puncta L, & I? ac proinde supponi, non probari eleuationes à contactibus in I, & L, nec fieri absurdum geometricũ contra 13 axioma? Erunt enim duæ rectæ, verbi gratia ED, & FM, eleuato LD in LM, & communi tantum eorum puncto in contactu ad L.

Respondeo. Si rectæ FM nõ eleuẽtur puncta, siue partes à cõtactu L, nec eleuari reliquas inter LD, ac proinde commune segmẽtum esset LD; & cõtraria ratione si eleuantur partes inter LD, etiam quæ in L eleuãtur à contactu. Nam ab ictu, & impulsu in E ad F omnes partes ipsarum rectarum, CE, ED proportione conniuẽt, propter angulũ, qui descendendo ad F, & vltra F semper fit minor. Itaq; quemadmodum extrema C, & D conniuent in G, & H cum suis partibus intermedijs inter CI, LD, sic & partes ipsæ I, & L conniuent in N, O. Cur enim,

&

& qui fieri possit vt in partibus cōtinuatis in vnam rectam lineam, materiæ aridæ partes inter EI, EL, & inter CI, LD conniueāt inter se dum fit angulus ad F, & non conniueant, & recedant à contactu etiam I, & L? Esset enim vna recta, & non recta. &c.

Respondeo 2. Aduersarius destruit suppositum, & se ipse implicat. Dum enim supponit effectum admirandum, & paradoxicum, qui verè apparet in experimento, scilicet diffringi baculū, nec lædi cyathos, si in ictu, & diffractione baculi non eleuantur partes I, L à contactu cyathorum, quomodo non eos lædunt? Ineptum igitur est in proposito, & supposito dati effectùs affirmare non eleuari I, L à contactibus cyathorum.

Respōdeo 3. Aliud est demittere lentè E in F ita, vt recta FM iuxtā orā cyathi sensim descendat, & nitatur, ac degrauitet per L; aliud est cū ictu, & impetu vehementissimo, & celerrimo detrudere E in F; sic enim vehementia impetus detrahentis E in F superat grauitationem ad L, & propter celeritatem, & impetum ictùs conniuente L cū cæteris partibus rectæ inclinatæ ad angulum, q i fit in F, dū perseuerat, & magis ac magis descendit grauis, & celerrimus impetus, auertit, propter prædicta, etiam præter L, reliquas partes inter LM à cōtactu cyathi. Obiectio aduersarij valet in lentà depressione ipsius E in F iuxta prædicta, nec est ad rem nostrā, qui casum ponimus aptū experimento, & vt verè est in experimēto, nempè in ictu vehemētissimo, celerrimo, & continuato. Ac præterea casus aduersarij contra ipsum est, contactus enim, & grauitatio partium ad L inuerteret, vel frangeret cyathum. In nostro vero experimento cyathi non læduntur. cuius illæsionis causam afferimus eleuationem rectæ à contactu in L, propter prædicta, & propter demonstrata in antec. §. V.

Nota vim rationis.

Hic sūma,

TOMI PRIMI PARS SECVNDA

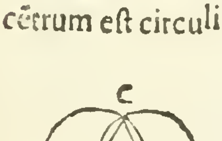
Complectens priores viginti sex propositiones libri primi geometricorum elementorum.

PROPOSITIONES.

Propositio I. Problema I.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta AB, super qua oporteat triangulum æquilaterum constituere.[a] Centro A, interuallo AB describatur circulus BCD. Rursus [b] cẽtro B, interuallo BA describatur circulus ACE: & ex C, vbi se circuli secant, ad A, B puncta [c] ducãtur rectæ CA, CB. Quoniam A cẽtrum est circuli BCD, [d] erit AC æqualis ipsi AB. Rursus, quia B cẽtrũ est circuli CAE, [e] erit & BC æqualis ipsi BA. demonstrata est autem & CA æqualis ipsi AB, vtraq; ergo CA, CB æqualis est ipsi AB: [f] quæ autẽ eidem sunt æqualia, & inter se sũt æqualia, igitur CA æqualis



a Post. 3.
b Post. 3.
c Post. 1.
d def. 15.
e def. 15.
f Ax. 1.

lis est CB: tres ergo CA, AB, BC sunt æquales. Quare triangulum ABC est æquilaterum, & super recta AB constitutum. Quod facere oportuit.

§. I.

SCHOLION.

Festiua fictio Martiani ex prima propositione in laudem Euclideorum elementorum.

Libet huc ad eruditum, & iucundum condimentum apponere id, quod Martianus in fine lib. 6 de nuptijs Philologiæ, ac Mercurij festiuè simul, & ingeniosè, pro veritate tamen, fingit, dum ait Geometriam ad eas nuptias cõuenisse, ac iussam, inter cætera, definitiones, & axiomata, quæ hic apud Euclidẽ, compẽdiosè recitasse, mox eadem Matrona Geometria (inquit Martianus non sine aliqua nostra mendosæ scriptionis correctione) Lineam in abaco rectam ducẽs, sic ait: Quemadmodum potest super datam rectã terminatam lineam trigonum æquilaterum consti tui. Quo dato, cùm plures Philosophi, qui vndique secum constipato agmine consistebant, primum Euclidis theorema formare eam velle cognoscerent, confestim acclamare Euclid, plauderéq; cæperunt. Cuius laudibus et ipsa Geometria plurimũ gratulata, se per sectantis gloriam sublimari, proueh\[i\]q; cognoscens, ab eodem libros eius, quos cætu apportari conspexerat festina corripuit, atq; in cætera astructionis, doctrinæq; documentũ, Ioui, ac senatui cælitum offerens intimauit. Quo facto, & doctissima cunctarum, & benignissima comprobatur. *Vides Euclidis astructionem, vt appellat Martianus, hoc est ordinatam demonstrationum connexionem, & doctrinam, non solum ab hominibus, sed & à superis illis fictitijs, & publica omnium temporum laude comprobatam ita, vt omnium, quæ in omni genere humanæ Philosophiæ adhuc prodierint, exquisitissima, & mirissima meritissimè censeatur.*

Geometria in nuptijs Philologiæ, & Mercurij primam Euclidis propositionem demostrat.

Geometria doctissima cunctarum cõprobata.

§. II.

§.II.

SCHOLION.

Nodus geometricus ſolutus eiuſdem Martiani primam hanc Euclidis propoſitionem appellantis theorema.

Cur ab aliquibus omnia Geometriæ appellata theoremata.

A*T quo iure Martianus hoc primum Euclidis appellat theorema? Ex antiquis, arbitror, Geometriæ monumẽtis. Nam* Speuſippi, & Amphinomi ſectatores *(referente Proclo lib. 2. cap. 8.)* arbitrati ſciẽtijs contemplantibus magis eſſe propriam theorematum appellationem, quam problematum, omnia Geometriæ appellare theoremata voluerunt. Ortus enim eorum, quæ in problemateis proponuntur, non efficiendo, ſed cognoſcendo cernimus, perinde ac ſi fiant ſemper ſunt accipientes. *Intellige de ideatis figuris in abſtractione mathematica. Addit deinde ſuam ſententiam Proclus:* Speuſippi ſectatores benè ſentiunt. Non enim eiuſmodi ſunt Geometriæ problemata, cuiuſmodi Mechanices. *Idem ad hanc prop. Eucl.* Proprè in Mathematicis diſciplinis problema vocatur, quod ad contemplãtem operationem proponitur. Quod namq; in his fit finem contemplationem habet: &c. *Pappus etiam vocat theorema, quod eſt problema in propoſ. 22. huius lib. 1. Vide nos ibi §. 3. Vides nobilitatem Geometricę contemplatricis Philoſophiæ etiam in operationibus geometricis. Vides & hìc quo iure hoc problema Martianus vocarit theorema, ab vltimo fine, qui ſpectatur à Philoſopho Geometra, etiam in problemateis, iuxta ea, quæ habes in capite noſtro de Abſtractione Geometrica, num. 6 quæ hic omnia non ſunt iteranda. Reuiſe illuc, ac vide etiam ſequentia ſcholia in hanc rem.*

Problema quod ad contemplantẽ operatio ẽ proponitur.

§. III.

§. III.

SCHOLION.

De Theoremate, Problemate, Lemmate. Geometrica Euclidis catena.

Quid distent Theōrema, & Problema.

1 PAter *Christophorus Griembergerus in suo Euclide ante propos. 1 Euclid. habet sequentia*. Propositiones vel sunt Theoremata, vel Problemata. Illa versantur circa quantitatem abstractam speculatiuè; ista practicè, quia habēt pro fine aliquod opus intellectuale, circa eādem quantitatem abstractam. Et ita sumptæ propositiones sunt propriè mathematicæ, & purè Geometricę. Ad Theoremata reuocantur Pronunciata, ad Problemata Postulata, de quibus superius.

Preter problemata, q̄ vtuntur regula, & circino, nō videntur geometrica.

2 Problemata quæ fiunt per Instrumenta non sunt pura Geometrica, possunt tamen aliquo modo dici Mathematica saltem illa, quæ vtuntur sola Regula, & Circino. Hæc enim duo instrumenta fundātur immediatè in postulatis, hoc est in linea recta, & circulari. Eodem possunt reduci etiam illa instrumenta quę fiunt per Regulam, & Circinum. Reliqua verò referuntur ad Mechanicam. Ex quibus aliqua sunt quidem vera, sed nondū Geometricè demonstrata; alia falsa, vel saltem dubia, quæ tamen subinde admittuntur, quia videntur satisfacere sensui. *Nota dictum ex acumine geometrico.* Problemata versantur circa quantitatem abstractā practicè, quia habent pro fine opus intellectuale circa quātitatem abstractam, *iuxta dicta à nobis in cap. de Abstractione Geometrica.*

Quid Lemma.

3 Deniq; tam Problemata, quàm Theoremata proponuntur aliquando nomine Lemmatum, quæ præmittūtur, vel subijciuntur propositionibus principalibus, quādo sunt necessaria, neq; possunt commode citari.

☞ *Apud Proclum non satis aptè ad vsum, & intelligentiam veterum Geometrarum interpretati sunt aliqui pro Lemmate Sumptionem, cum omnes Geometræ semper inscribant: Lemma. Cuius à Petitione, & Pronuntiato differentiam affert Proclus, quòd Lemma demon-*

demonstrabile est, Petitio, & Pronuntiatum, siue axioma sine demonstratione ad aliorum fidem faciendam præsumuntur. *Lemmatum agmina, & vsus videbis, mi Tyro, apud Pappum lib. 7, & ante Apollonij conica, & in libris primis Opticorũ Vitellionis, in Astrolab. & Gnom. Clauij, & apud alios.*

Quid differat Lemma à Petitione, & Pronuntiato.

4 Quin immò Euclidis propositiones, præsertim in hoc primo libro, ita sunt dispositæ, atq; inter se ordinatæ, vt antecedentium singulæ consequentiũ singulis sint loco Lemmatis, & per antecedentes ordine consequentes probentur, vt dictũ est in capite de elementis Geometricis, in nostris prolegom. Denique omnes elementorum Euclideorum propositiones, quæ supponuntur, & citantur in demonstrationibus reconditioris Geometriæ, sunt omnes loco Lemmatum.

Dum sapientissimus Salomon hortatur adolescentes ad sapiẽtiam, ait: Inijce collum tuum in torques illius: *Hic Geometrica sapientia auream texit catenulam, dum suas propositiones mutuo innectit, vt tibi, mi Tyro, immortale animi ornamẽtum impertiat. Ergo animum in has torques inijcito, quæ te vere liberum, ac nobilem efficient.*

Aurea Geometricarũ Propositionũ catena.

Sunt præterea quædam alia genera propositionũ Geometricarũ, velut Porismata, Corollaria, &c. de quibus inferius suo loco ad prop. 15.

Vide Proclum lib. 2. cap. 8. copiose exponentem varias antiquorũ sententias de Theorematum, & Problematum essentia, & differẽtijs.

§. IV.

SCHOLION.

Problematum genera ex antiquis Philosophis Geometricis. Ac in quo eorum genere sit hoc 1 Euclidis.

H*Oc primum Euclidis problema ex genere planorum est. Quã ad rem Pappus lib. 3 post propos. 4, & lib. 4 post propos.* 30. Problematum, quæ in Geometria considerantur, tria esse genera dicimus, & eorum alia quidem plana, alia solida, alia linearia appellari. Quæ igitur per rectas lineas, & circuli circumferentiam solui possunt, merito dicuntur plana; lineæ enim, per quas talia problemata inueniũtur, in plano ortum habent. Quæcunq;

Tria genera problematũ Plana, Solida, Linearia.

Probl. plana quænã.

cunq; vero soluuntur, assumpta in constructione aliqua coni sectione, vel etiam pluribus, solida appellata sunt, quoniam ad constructionem solidarum figurarum superficiebus videlicet conicis vti necessarium est. Relinquitur tertium genus problematum, quod lineare appellatur; lineæ enim aliæ, præter iam dictas, in constructionem assumuntur, quæ varium, & difficilem ortum habent ex inordinatis superficiebus, & motibus implicatis factæ. Eiusmodi vero sunt etiam lineæ, quæ in locis ad superficiem dictis inueniuntur, & aliæ quædam magis variæ, & multæ à Demetrio Alexandrino ἐν ταῖς γραμμικαῖς ἐπιστάσεσι, hoc est, in linearibus aggressionibus, & a Philone Tyaneo ex implicatione πλεκτοειδῶν, & aliarum varij generis superficierum inuentæ, quæ multa, & admirabilia symptomata continent, & nonnullæ ipsarum a iunioribus dignæ existimatæ sunt, de quibus longus sermo haberetur. Vna autem aliqua ex ipsis est, quæ & admirabilis à Menelao appellatur. Ex hoc genere sunt lineæ helices, & quas græci τετραγωνίζουσας appellant, nos quadrantes dicere possumus, conchoides, & cissoides; &c.

Probl. solida quanā.

Probl. linearia quanā.

Lineares aggressiones Demetrij. &c.

Linea quędam admirabilis à Menelao appellata.

Itaque hoc primum Euclidis problema planum est, quia per lineas rectas, & circuli circumferentiam soluitur, quæ lineæ in plano ortum habent &c. iuxta prædictam eruditionem antiquam Geometricam. &c. Quin etiam reliqua etiam Problemata elementorum Geometricorum ante libros de solidis, plana sunt, ac soluuntur per lineas rectas, & circulares, vt patebit tibi, mi Tyro, in reliquo hoc primo libro, & reliquis prioribus, &c.

Primū Euclidis problema, & reliqua in lib. elem. prior. sunt plana.

§. V.

SCHOLION.

De Datis Geometricis. Eorum genera, & species ad veterum Geometrarum intelligentiam.

1 *IN Geometricis propositionibus duo ferme proponi solent, nempe datum, & Quæsitum. Fermè, inquam, quoniam aliquando solùm proponitur quæsitum sine vllo dato. Datum appellant (quod quidem nunc attinet ad interpretationem ver-*

verbi Euclidis: super data &c.) *assumptum, suppositum, vt hic supponitur data recta terminata. Marinus philosophus Procli discipulus in Protheoria ad Euclidis data:* omnes assumptum quid datũ esse perceperunt, & omnes ferme vt communem sententiam de dato retinere videntur, perceptum quid illud esse assumpserunt, quemadmodũ & ipsius dati nomen ostendit, & in primis illi, qui per hypothesim datum describunt. *Quæsitum verò est id, quod inuestigandum, demonstrandum, comparandum, siue efficiendum proponitur.*

Quid sit datum in Geometrica propositione.

Quid sit quæsitũ in Geometrica propositione.

2 *Aliud vero dati genus, & definitio sunt de quibusdam propositionibus, quarum præcipuas complexus est Euclides libro singulari, cui inscriptio est.* Euclidis data. *Quorum datorum vsus est in resolutionibus Geometricis (de quibus nos inferius) ad problemata spectantibus. Igitur Pappus initio lib. 7 sic:* Datũ est concessum, quod fieri, comparariq; potest; *& scholion Græcum post definitiones datorum Euclidis.* Communiter dicitur datum, cui idem inuenire, & exhibere est possibile: *& Marinus Philosophus in Protheor.* datum est cui exhibere possumus æquum, &c. *Sic Euclides in Datorum definitionibus:* Data magnitudine dicuntur areæ, lineæ, & anguli, quibus æqualia possumus exhibere.

Data apud Geometras genera q.dã propositionũ &c.

Quid sit datum in Geometrica philosophia.

3 *Datorum vtriusq; generis quatuor species proponunt Marinus in Protheoria, & scholion græcum post defin. Datorum Euclidis, & Proclus ad hanc 1. prop. Eucl. qui omnium clarissime sic:* Omne datum quatuor his modis dari potest, vel positione, vel ratione (*siue proportione*) vel magnitudine, vel forma (*siue specie.*) Nam signũ quidem positione tantùm datur, linea autem, & alia omnibus. cum enim dicimus datum angulum rectilineum bifariam secare, speciẽ anguli, quæ data est, dicimus, quod scilicet rectilinea, ne iisdem methodis curuilineũ etiam bifariam secare quæramus. Cùm verò, quòd duabus datis rectis lineis inæqualibus, à maiore minori ęqualem abscindere, magnitudine datæ sunt; Maius enim, & minus, Finitum, & infinitum, propriæ magnitudinis prædicationes sunt. Cùm autem dicimus, quod si quatuor magnitudines proportionales fuerint, permutatim quoq; proportionales erũt, eadem ratio in quatuor magnitudinibus data est. Cùm verò in dato signo datæ rectæ lineæ æquã rectam lineam ponere oportet, tum signum positione datum est.

Datũ positione, ratione, siue proportione, magnitudine, formã, siue specie.

Punctũ solum positione datur.

Exemplis dati genera explicata.

Quid sint data positione.

Appone definitionem quartam ante data Euclidis; Positione dari dicuntur puncta, lineæ, & anguli, quæ eundem semper locum obtinent.

Ex prædictis habes lucem, mi Tyro, vnde agnoscas in Veterum Geometrarum Apollonij, Pappi, & aliorum geometricis proposi-

tionibus, ac demōstrationibus quid velint cum data positione, magnitudine, &c. appellant. Licet sine iis tuas demonstrationes condere possis.

§.VI.

SCHOLION.

De partibus Propositionum, ac demonstrationum Geometricarum: & de casibus Geometricis.

Tres præcipuæ partes demōstrationū Geometricarū Propositio. demōstratio. Cōclusio.

Sex partes non omnes sēper necessariæ. Propositio. Expositio. Determinatio. Cōstructio. Demonstratio. Cōclusio.

Quid sint Casus in Geometricis demonstrationibus.

1 TRes præcipuæ sunt partes Theorematum, vel Problematū Geometricorū, ac necessariæ, in omnibusq; semper existentes. Propositio, Demonstratio, Conclusio. *Non in omnibus semper sunt sex,* Propositio, Expositio, Determinatio, Cōstructio, Demonstratio, Conclusio, *quæ perfectissima conficiunt Geometrica Theoremata, & Problemata.* Propositio *(ait Proclus)* quidē inquit *(i. proponit)* quo existente Dato, quid Quæsitum sit, perfecta enim Propositio ex vtrisq; constat. Expositio vero ipsum per se se Datum excipiens Quæstioni præparat. Determinatio autem seorsum Quæsitum quod quid est explanat. Constructio verò ea, quæ Dato desunt ad Quæsiti venationem adjicit. Demonstratio autem peritè ex cōcessis colligit propositum. Epilogus verò, siue Conclusio rursus ad Propositionem conuertitur confirmando id, quod ostēsum est. *Aliqua alia de tertia propositionum parte, nempe de Determinatione Geometrica vide inferius ad propos. 22.*

2 *Habēt præterea Geometricæ Propositiones aliquæ aliquos aliquādo casus. Vt videre est in aliquibus exemplis apud Euclidem, & veteres alios Geometras. Proclus:* Casus diuersos constructionis modos, positionisq; mutationem enuntiat, punctis, vel lineis, vel superficiebus, vel solidis transpositis. *&:* Quapropter casus quoq; vocatur eo quod constructionis transpositio est.

§.VII.

§.VII.

SCHOLION.

Prædictorum de generibus Propositionum, Datorum, partium &c. applicatio, & indicatio in prima Euclidis Propositione. De perfecto Geometricarum Propositionum circulo.

SVper data, &c. *Datum est linea, &c. Quæsitum trianguli constructio. Quæ & Problema esse, nō Theorema indicat. Linea datur specie, & magnitudine, nempe, recta, & finita.*

Sit data recta, &c. *Proclus indicat in antiqua sui temporis Propositione Euclideà fuisse determinationē, quæ nunc nō est in vulgatis nostro æuo demonstrationibus Euclidis. Apparet non esse quas habemus sine aliqua (licet non magni momenti) accisione. In verbis igitur inscriptionis:* super data recta terminata &c. *est Determinatio lineæ genericæ non solum ad rectam, sed & ad finitam, vt confieri possit problema, quod nequiret super infinita. Estq. Determinatio dati, quod, iuxta definita, dari cōparariq. potest per postulata de recta ducenda, &c. Hæc igitur in inscriptione Determinatio hic intelligenda etiam est post Expositionem, quæ ibi incipit:* Sit data recta, &c.

Centro, &c. *est Constructio, quæ in problematibus vtitur postulatis:* quolibet centro, & interuallo circulum describere: lineam à puncto ad punctum, &c.

Quoniam A centrum est, &c. *Demonstratio est vsque ad ea verba:* Quare triangulum, &c. *quæ in hoc primo problemate vtitur axiomatibus. Aliæ sequentes vtentur antecedentibus propositionibus demonstratis.*

Quare triangulum, &c. Quod facere, &c. *Vna è duabus composita conclusio est, repetitio Dati, & Quæsiti iam comparati, & in-*

dicatio non theorematis ostensi, sed problematis effecti, &c. In conclusionibus theorematum: Quod erat demonstrandum, *Problematum:* faciendum *Quod in expositione; & Constructione circa particularem lineam, vel figuram dicebatur, vel fiebat, in conclusione vniuersim, & abstractè affirmatur.*

2 *Addit Proclus egregie, quod affirmes etiam de alijs omnibus rite factis Demonstrationibus Geometricis. In conclusione primæ Propositionis verba inuoluens Geometra* ostendit quod omnia propositionis peracta sunt, & principio finem coniungens, & conuolutam quidem mentem *(platonizat de more Proclus)* rursusque ad principium reuertentem imitans. *Circulus hic præclarus est Geometricæ demonstrationis.*

Circulus scientificus, & mysticus in Geometricis demonstrationibus.

At vero circuli mali geometrici, quo principiū patitur, & probatur aliquid per id, quod est in quæstione, ac probandum, &c. vide exemplum ex Aristotele inferius ad propos. 27.

§. VIII.

SCHOLION.

Geometricarum demonstrationum quæ resolutoriæ, quæ sint compositoriæ.

An à principijs, an ad principia?

1 A*Ristoteles Moral. Nichomach. lib. 1. cap. 4. affirmat de suo Præceptore Platone:* Plato quærebat vtrum ne ab initijs, an ad initia via esset? *Quod habet speciem paradoxi. Etiam Philosophi Mathematici in suis demōstrationibus duplici aliquando methodo sunt vsi, resolutoria, quæ reuoluitur ad principia, compositoria, quæ à principijs progreditur. Demonstrationibus vtitur Euclides compositorijs in hisce elementis.*

Cōpositoria methodo vtitur Euclides, vt ferme in Geometria, &c.

2 *Erant apud antiquos Geometras demōstrationes etiam resolutoriæ. De quibus accipe, mi Tyro, à Pappo Alexandrino sequentia in initio lib. 7. Math. Collect.* Locus qui vocatur ἀναλυόμενος hoc est resolutus, ò Hermodore fili, vt summatim dicam, propria quædam est materia, post communium elementorum constitutionem,

ijs parata, qui in Geometricis sibi comparare volunt vim, ac facultatem inueniendi problemata, quæ ipsis proponuntur, atque huius tantummodo vtilitatis gratia inuenta est. Scripserunt autem hac de re tum Euclides, qui elementa tradit, tum Apollonius Pergæus, tum Aristæus senior. Quæ quidem per resolutionem, & compositionem procedit.

Resolutoria Methodus vtilis affectantibus facultatem soluēdi proposita in Geometria

Resolutio igitur est via à quæsito tamquam concesso per ea, quę deinceps consequuntur ad aliquod concessum in compositione: in resolutione .n. id quod quæritur tamquam factum ponentes, quid ex hoc contingat consideramus. & rursum illius antecedens quousque ita progredientes incidamus in aliquod iam cognitum, vel quod sit è numero principiorum. Et huiusmodi processum resolutionem appellamus veluti ex contrario factam reuolutionem. In compositione autem per conuersionem ponentes tamquam iam factum id, quod postremum in resolutione sumpsimus. Atq; hic ordinātes secundum naturam ea antecedentia, quæ illic consequentia erant, & mutua illorum factà cōpositione, ad quæsiti finem peruenimus; & hic modus vocatur compositio. Duplex autē est resolutionis genus, alterum quidem, quod veritatem perquirit, & contemplatiuū appellatur: alterum vero, quo inuestigatur id, quod dicere proposuimus, vocaturq; problematicum. In contemplatiuo igitur genere, quod quæritur, vt iam existens, & vt verum ponentes per ea, quæ deinceps consequuntur tamquā vera, & quæ ex positione sunt procedimus ad aliquod concessum, quod quidem si verum sit, verum erit & quæsitum, & demonstratio, quæ resolutioni ex contraria parte respondet. Si vero falso euidenti occurramus, falsum erit & quæsitum. In problematico autem genere, quod propositum est vt cognitum proponentes per ea, quæ deinceps consequuntur, tamquā vera, procedimus ad aliquod concessum; quod quidem si fieri, compararíq; possit (quod datum vocant Mathematici) etiam illud, quod propositum est, fieri poterit, & rursus demonstratio resolutioni ex contraria parte respondens. At si euidenti, quod fieri non possit, occurramus, & problema itidem fieri non poterit.

Resolutio Geometrica quid sit.

Compositio Geometrica quæ, & qualis.

Duplex genus Resolutionis Geometricæ.

Modus resolutionis Geometricæ in theorematibus.

Modus resolutionis Geometricæ in Problematibus

Vsus datorum Geometricorū est pro resolutione in problematibus.

Quæ Pappus exposuit habes cōtracta in antiquo scholio ad primam propositionem lib. 13. elem. Euclid. in hæc verba: Resolutio est sumptio quæsiti tamquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod verum concessum. Compositio est sūptio Concessi per ea, quæ consequuntur in quæsiti conclusionem seu deprehensionem.

3 *Proclus ad primam hanc Euclid. propositionem* Tradūtur autem Methodi, optima quidem illa quæ per resolutionem ad explora-

Resolution. Geometricæ inuentor Plato.

ratū principiū reducit quæsitū. Quā & Plato, vt aiunt, Leodamanti tradidit. Ex quo ille quoq; multorum in Geometria inuentor factus fuisse fertur. *Adde ex eodem Proclo in com. ad 6. prop. (vt Tyrones penitus norint thesaurum Geometricæ resolutionis vtillimū ad demonstrationes Geometricas inueniendas: velut inferius etiam apparebit.)* Omnino sciēdum est, quod omnes Mathematicæ probationes vel à principijs sunt, vel ad principia, vt alicubi Porphyrius etiam dicit. Et quæ à principijs quidem duplices & ipsæ sunt, aut enim à communibus notionibus, a solaq; euidentia fidem per se facientе emanarunt, aut ab ijs, quæ præostensa fuere. Quæ autem ad principia, vel ponendorum principiorum, vel destruendorum vim habent. Verum ponēdi quidem principia vim habentes Resolutiones appellantur, hisq; Compositiones apponuntur. Nam fieri potest vt à principijs ad Quæsitum ordine progrediamur, & hoc nil aliud, quam Compositio est. Destruendi verò vim habentes Deductiones ad impossibile nuncupātur; aliquid enim eorum, quæ cōcessa sunt, explorataq; habentur, destruere huiusce opus est. Et est in hac quoq; ratiocinatio quædam, non autem eadem quæ in resolutione. In deductionibus enim ad impossibile iuxta secundum hypotheticarum ratiocinationum modum complexio est. Vt si triangulorum æquales angulos habentium latera æquos angulos subtendentia æqualia non sunt, totum suæ parti æquale est. Verum hoc fieri non potest, triangulorum igitur duos angulos æquales habentium latera quoque æquos angulos subtendentia æqualia sunt. Totidem de ea etiam, quæ apud Geometras deductio ad impossibile vocatur, sufficiant. *Hæc Proclus, vnde seponas aliqua etiam spectantia ad Cōuersiones Geometricas, de quibus inferius, præsertim ad propos. 14. 39. 40.*

Mathematicarum probationū, quæ à principijs sūt, duo genera.

Duo itē genera earū, quæ ad principia.

Probationes ad pricipia ponēda sūt propriè Resolutiones.

Probationes ad principia destruenda vocātur deductiones ad impossibile.

Differt deductio ad impossibile à Resolutione.

4 *Addidere Priscorum methodo resolutoriæ semiprisci methodū resolutoriam per Algebram. Semipriscorum methodo resolutoriæ per Algebram addidere neoterici methodū resolutoriam per nouam Algebram. Vt non solum antiquos, sed etiam nouos fontes saltem indicemus Tyronibus ad demonstrationes geometricas inueniendas, accipe etiam sequentia ex Marino Ghetaldo (Patritio Ragusino insigni Philosopho Mathematico) in quibus licet aliqua videas repetita ex antecedentibus, tamen fortasse clarius expressa erunt, & post ea leges, atq; intelliges quæ semiprisci, & Neoterici Priscorū resolutoriæ methodo addiderunt. Igitur initio lib. 1. Mathematicarum resolutionum (opus posthumum est, sed numquam humandum) sic præfatur.* Omnes Mathematicæ probationes vel à concessis ad

quæ-

quæsita, vel à quæsitis ad cōcessa progrediūtur. Quæ à cōcessis progrediuntur ad quæsita, Cōpositiones appellantur. Compositio .n. est assumptio concessi per cōsequentia ad quæsiti finem, & cōprehensionem; quæ verò à quæsitis progrediuntur ad cōcessa duplices sunt; vel .n. concessa ponunt, vel destruunt: quę ponunt Resolutiones vocantur: Est .n. Resolutio assumptio quęsiti tāquam concessi per consequentia ad verum concessum. Nam in resolutione id quod quæritur, vt iā existens, & vt verum ponentes, per ea, quę deinceps consequuntur, procedimus ad aliquod concessum: quo opere quæsitā cōclusionē in proprias causas, per quas demonstratur, reducimus: atq; his resolutionibus cōpositiones opponūtur. Fieri .n. potest, vt a concesso illo per eadē resolutionis vestigia ad quæsitū reuertamur. Quę verò destruunt concessa, deductiones ad impossibile nuncupamus. Deductio .n. ad impossibile est assumptio eius, quod quæsito contradicit tanquam concesso per cōsequentia ad id, quod vero concesso opponitur. Nā in deductione ad impossibile sumimus id, qđ quæsito contradicit, idq; supponentes progredimur donec in aliquod absurdum incidamus, per quod, suppositione destructā, cōfirmetur id, quod à principio quærebatur. Ex quibus patet resolutionem à deductione ad impossibile ratiocinatione tantùm differre; nam vtraq; ab incognito ad cognitum eodem progressionis ordine procedit; sed resolutio desinens in verum, concludit verū esse & quod supponitur. Deductio vero ad impossibile, desinens in falsum, falsum esse & quod supponitur, arguit, & consequenter quæsitū verum esse. Duplex aūt est resolutionis genus, alteru quidē ad Theoremata pertinet, eiusq; finis in sola veritatis inuestigatione consistit; alterū vero ad problemata, cuius scopus est rationem constructionis, atq; demonstrationis inuestigare: proposita enim problemata construere docet, viamque ad constructionis demōstrationem ostendit. Sed omnia fere Theoremata, & Problemata, quæ sub Algebram cadunt facillimè resoluuntur, ac per resolutionis vestigia componuntur: non quidem vulgaris Algebræ beneficio, quæ resolutionis vestigia omnino confundit; sed illius, cuius auctor est Franciscus Vieta, vir certè de rebus Mathematicis optimè meritus: cui non solum nostra, sed etiam superior ætas haud scio an vllum huius scientiæ laude parem, nedū superiorem, inuenerit. Etenim resolutio procedens per species immutabiles, non autem per numeros mutationi, quacunq; operatione tractentur, obnoxios, sua vestigia clara relinquit, per quę nō est difficilis ad Compositionem reditus. Compositio enim in Problematibus siue per Algebram, siue Antiquorum methodo resolu-

Resolutio à deductione ad impossibile differt tantum ratiocinatione.

Vtriusque clara explicatio.

Problemata, & Theoremata plerasque facillime resolui per nouā Algebram.

Noua Algebra præstantia promulgatur.

tio,

An quorũ resolutiones sine Algebra.

Quæ sub Algebram cadunt facilius resoluuntur per Algebram, quam sine Algebra.

Sine Algebra fieri possunt Theorematum, & Problemat. Geometricæ Resolutiones, & compositiones.

tis, à fine resolutionis ad principium, per resolutionis vestig'a regreditur: in Theorematibus verò, quorum veritas per Algebram exploratur, eodem ordine, quo inuenta est Theorematis veritas, demonstratio procedit. At Theoremata, vel Problemata, quæ sub Algebram nõ cadunt, qualia sunt ea, quæ per Comparationem angulorum demonstrãtur, resoluuntur, & componuntur methodo ab antiquis tradita, cuius exempla extant in libris Archimedis, Apollonij, & Pappi, aliorumq; veterum, ac recentium. Et quamuis ea methodo omnia Theoremata, & Problemata resolui, & componi possint; tamen ea quæ sub Algebram cadunt plerumq, facilius, ac expeditius per Algebram resoluuntur, ac deinde per resolutionis vestigia componuntur.

Geometricus Tyro sollicita cura, & studio versetur in intelligendis Priscorum geometricis demonstrationibus, & gaudeat, vt testatur etiã Ghetaldus, se posse sola methodo Priscorum resolutoriâ consequi facultatem, & facilitatem geometricè demonstrandi quæcunq; proposita Theoremata, & Problemata.

§. IX.

PROBLEMA, &—

— Exemplum Geometricæ resolutionis in hoc 1 Problemate huius lib. 1 Euclidis.

1 *IAm exemplum affero in prima huius libri primi Euclidis propositione, in quo quidem exemplo tu agnosce, mi lector, ea, quæ in antecedentibus legisti, & vsum datorum Euclidis, & modum contrarium modo, quo Euclides vsus est in demonstratione prima huius propositionis, atq; in alijs.*

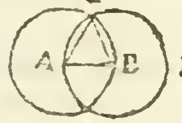
In resolutione huius 1 problem. quæsitum accipiẽdum est tamquam datum, idest æquilaterum triangulum excitatum super data rectâ finita; deinde facienda est resolutio per ea, quæ consequuntur constitutionem æquilateri, &c. Vnum è præcipuis, quod cõsequitur, est quòd, posito, ac dato æquilatero, ergo datum est etiam punctum

extra

extra datam rectam finitam, à quo puncto duæ deductæ ad extrema datæ rectę sunt inter se, & cum datâ æquales. Id autem punctum datum esse, hoc est inueniri, compararíq; posse, ac inuentum, comparatumq; esse demonstratur ex 25 propos. datorum Euclidis.

Facta hac resolutione, fit deinde compositio relegendo vestigia resolutionis, formata demonstratione, & compositione, vt hìc habet Euclid. in 1. propositione. Ac quod in resolutione fuit extremum, in compositione primum est; incipit enim compositio Euclidis à positione puncti (à quo æquales, &c.) per mutuam sectionem circulorum. &c. Accipe exemplum Resolutionis.

Recta lineà magnitudine datà, datisque eius extremis, describere super ipsa triangulum æquilaterum.



SIt in figurà Euclidis recta AB magnitudine data, nec nõ eius extrema A, B positione. Oportet super ipsâ triãgulum æquilaterum efformare, seu, quod idem est, inuenire extra ipsam punctum datũ, ã quo ad extrema A, B ductæ rectæ sint tum inter se, tum ipsi AB æquales. Factum iam sit: punctumq; inuentum sit C, à quo ductæ lineæ sint CA, CB. Quoniam AC, AB, ex suppositione æquales sunt, si centro A, interualloq; AB circulus describatur, vtiq; eiũs peripheria transibit per C. describatur itaq;, sitq; eius peripheria BC. Similiter quia BC, BA æquales ponuntur, si cẽtro B, interualloque BA circulus alius describatur, transibit & huius peripheria per idem punctum C. describatur ergo, sitque AC. Itaq; punctum C existens in vtràq; circumferentia est in communi earum sectione. Quoniam datur centrum A positione, & semidiameter AB magnitudine, dabitur etiam positione peripheria BC, per definit. 6. datorum. Eadẽ ratione dabitur positione peripheria AC, siquidem centrum B datur positione, & quæ ex centro BA magnitudine. Igitur cum vtraq; peripheria AC, BC positione detur, etiã punctum C, in quo se inuicem secant, dabitur, per 25 Datorum.

§. X.

SCHOLION.

Parergicon de Authore præcedentis Resolutionis.

PRæpositam primæ huius propositionis elementaris Resolutionem exposuit olim hortatu meo Dominus Ioannes Baptista Parmegianinus eximius Geometra, & meus olim in Philosophia morali auditor. Qui deinde præclara morte perfunctus est dùm peste laborantibus diuina Sacramenta ministraret. Curaui ego per litteras eius viri egregias Geometricas lucubrationes à domesticis, & consanguineis conquiri, & publicę luci exponi. Respõsum est nullas inter eius posthuma aduersaria inuentas esse. Doleo factam esse non exiguam in Geometrià iacturam, ac vereor vt aliqua cornicula plumas sibi alienas assumat, & rerum alienarum furto gaudeat. Sane post eius mortem prodierunt ab aliquibus aliqua eorum generum, in quibus eum non pauca, & egregia commentum esse pernoram. Habes interim hic à nobis, mi Tyro, bona fide appositum vestigium Geometriæ non vulgaris in carissimo mihi capite.

§. XI.

SCHOLION.

Exẽpla reſolutionis Geometricæ circa Theoremata indicata. Et notata aliqua circa vſus Datorum, & Elementorum Euclidis.

1 *QVoniam non pertinent ad vſum Problematicum, in quo genere eſt prima hæc Euclidis Propoſitio, ideo indicare tantùm hic lubet aliqua exẽpla reſolutionũ etiã in theorematibus. Vide igitur librum 13 elem. Euclidis, & ad eum Campanum, Zambertum, & Commandinum, apud quos inuenies quinque priora eius libri theoremata è veteribus ſcholijs demonſtrata tum per reſolutionem, tum per compoſitionẽ. Hic non apponimus ea, quæ apud vulgatos Authores proſtant, & quæ nõdũ debita ſunt Geometricis Tyronibus, quibus ignotæ ſunt Propoſitiones non ſolum eius libri 13, ſed ſecũdi, & ſexti librorum elementorum Euclidis, quas ſupponunt eæ ibi reſolutiones, & compoſitiones. Alias reſolutiones inuenies apud Archimedem, Apollonium, & Pappum. Videant qui ſe iactant eos Auctores intellexiſſe, quàm verè id faciant, ac non potius fidem, quam ſcientiã hauſerint, niſi prius verſati ſint in Datis Euclidis, qui liber Reſolutionum gratià perſcriptus eſt ad problemata abſoluenda, vt vidiſti ex Pappo. Multa enim ibi ſunt probata fieri, comparariq; poſſe, quibus vti, eaq; citare, vt iam probata, poſſit Geometra in Reſolutionibus Problematum.*

Datorum Geometricorum cognitio vtilis eſt intelligentiæ veterũ Geometrarum.

2 *Datorum tamen cognitio licet neceſſaria videatur intelligẽtiæ veterum Authorum vtentium Reſolutionibus Problematum, tamen ſimpliciter, ac per ſe non videtur ita requiri, vt ſine eà non poſſit quiſquam eximius Philoſophus Geometricus fieri. Eſto, ex Pappo à nobis citato, Data conducerent ad facilitatem, & breuitatem ſoluẽdi propoſita problemata in Geometria, tamen etiam ſine ijs datis*

Nõ est simpliciter necessaria, & sine ea, potest quispiã habitum geometricũ sibi comparare à vulgatis geometricis elementis.

Geometricis sciat, & gaudeat Tyro se summũ fieri posse Geometrã, si calleat, & in promptu habeat propositiones Euclidis elementares, quæ habitum Geometricum, & facilitatem conferre possunt ad quæcunq; demonstranda in omni genere Mathematicarum scientiarum. Sunt enim hæ propositiones, ac demonstrationes medij quidam termini, vt vocãt Logici, & loca, vnde pene omnia probantur, quæ proponi possint Philosopho Mathematico. Quare Tyro diligentem in his operam impendat, quam tam vtilem futuram intelligit.

§. XII.
SCHOLION.

Primę Euclidis propositionis Resolutio logica. Aristotelis libri analytici, siue resolutorij. De resolutione in consultationibus locus insignis eiusdem Philosophi explicatus ex hoc primo Probl. Euclidis.

1 *SPecimen habes Logicæ resolutionis factæ ex compositoria demonstratione Eucl. in primo problem. apud Clauium. Vnde videas quã non verbosè disceptent, ac philosophẽtur Philosophi Mathematici, dum sua scita demonstrãt. Nos olim ante annos 40 omnes propositiones libri primi Euclidis in logicas formas redegimus, ad exercitationem, & examinationem, an aliquid aliquando vel minimum comperiri posset in Geometricis demonstrationibus, quod non esset probatum, ac demonstratum.*

Logicos libros Arist. cur Resolutorios appellarit.

2 *Aristoteles, quo viuente Mathematicæ scientiæ florebant, Logicorum suorum librorum priorem partem, in qua (vt in Mathematicis) mediũ necessarium, & demonstratiuum (quatenus licet extra Mathematicas) docet inuenire, & humani discursus ratiocinationes, ac formas in sua, & prima redigit principia; quia imitatus est Mathematicas resolutiones, resolutorios, siue analyticos rectè inscripsit. Quæ sententia est etiam præstantium, atq; eruditorum interpretum Aristotelis. Præ alijs vide è neotericis Zabarellam, & Toletum in eos libros Aristot.*

3 Idem

3 *Idem Philoſophus acutè, atq; ad vſũ, lib. 3 mor. Nichom. cap. 3, vbi de conſultatione, ſimilem ait eſſe reſolutioni Geometricæ conſultationem.* Qui conſultat quærere videtur, & reſoluere: & quemadmodum Deſignationes *(ideſt circa figuram aliquam geometricã deſignãdam, vt in hoc primo problemate Euclidis circa deſcriptionem trianguli æquilateri)* quod extremum eſt in reſolutione, in generatione eſſe primum videtur. *Vt vidiſti in Reſolutione primi problem. ſectionem circulorum æqualium ad cõmune punctum (quæ eſt extrema in demonſtratione compoſitoria Euclidis) primam eſſe vnà cum generatione æquilateri trianguli. Igitur Philoſophus (apud quem plura vide citato cap.) ait: quemadmodũ in Reſolutionibus Geometricis quæſitum ſupponitur, deinde fit reſolutio, & inquiſitio ad cõceſſum aliquod verum, vel falſum &c. ſic in reſolutionibus de rebus agendis, verbi gratia, ſit ne bellum ſuſcipiendum, ſupponitur, & fingitur bellum quaſi iam ſuſceptum, deinde fit reſolutio, & inquiſitio per ea, quæ conſecutura ſunt ad id bellum ſuſceptum, donec incidas vel in aliquod abſurdum, vnde concludas bellum non ſuſcipiendum, vel in aliquod poſſibile, ac commodum, vnde inferas bellum omnino ſuſcipiendum.*

Qui cõſultat quaſi geometricè reſoluit.

4 *Hinc qui res politicas, vel œconomicas adminiſtrant videant, ac diſcant rebus tum priuatim, tum publicè agendis aptiſſimos eſſe, præficiendos, & in conſultatione præ alijs admittendos Philoſophos Mathematicos, ac verè Geometras, tamquam præceptores reſolutoriæ conſultationis, & in ea præ alijs verſatos, præſertim ſi Mathematicæ philoſophiæ Moralem etiam adiunctam calleant. Huiuſce veritatis conſcij Chinenſes Philoſophi, præ cæteris ſcientijs, animos imbuũt ſuos Morali, ac Mathematica philoſophia, quibus inſtructi Prouincijs, ac Regnis præficiuntur, idq; ingenti cum publicæ rei bono, dum tot ſæculis florentiſſimum illud imperium experitur, & palam facit beata eſſe regna (vt aiebat Plato) in quibus Philoſophi regnant, nempe viri boni ingenio pollentes, reſolutionum, & conſultationum magiſtri.*

Rerum gerendarum cõſultationibus præficiẽdi, præ alijs, Geometrici Philoſophi.

Chinenſis politica laus, in qua philoſophi morales, ac mathematici publicis adminiſtrationibus præficiuntur.

§. XIII.

§.XIII.

SCHOLION.

E resolutione logica primæ propositionis Euclidis patet exemplum demonstrationum perfectissimarum in Geometricà Philosophia.

IN exemplo analysis logicæ, quam executus est Clauius circa hanc primam demonstrationem Euclidis, & aliarum, quas quilibet non rudis in Logicis, & in cōmuni philosophia potest efficere, aliud insigne, ac notandū elicitur pro dignitate Philosophiæ Geometricæ, quod longe maioris momenti est, quàm logicæ analysis forma.

Scire est ex primis principijs. &c. ut in mathematicis exemplis, &c.

1 *Ac primo quidem Aristotelem, atq; alios antistites Philosophos agnoscere, fateri, depredicare, exemplis patefacere, potissimas esse Geometricæ Philosophiæ demonstrationes, in ijsque comperiri omnes conditiones necessarias, ad perfectissimas demonstrationes, vt palam est legēti præcipuè libros Aristotelis posteriores analyticos. Ex ingenti sylua tantummodo aliquem ramusculum profero. 1. poster. tex. 23.* Vnumquodque autem scimus non secundum accidens, quando secundū illud ex principijs illius, secundum quod illud. *Affert exemplum illud tritissimum ex 32. primi huius lib. Euclid. de omni triāgulo habente tres internos angulos æquales duobus rectis. Quæ affectio vsitatis omnibus triangulis trilineis inest per se, ac semper, iuxta exceptiones nostras in Ap. 3 nostro, vbi pro paradoxis afferimus inusitata triangula quadrilatera, & plurilatera. Igitur Philosophus:* vt duobus rectis ęquales habere, cui inest per se ex principijs huius. *Tex. 29. de causis formalibus in Mathematicis demonstrationibus:* cōuertuntur autem magis quæ sunt in Mathematicis, quoniam nullum accidēs (sed & hoc differunt ab alijs, quę sunt in disputationibus) sed definitiones. *Verba singula ponderato, mi Lector, nec me properantem distine. Disputationes appellat reliquas Philosophias, extra mathematicam pacem in apertis demōstrationibus. Tex. 31.* Figurarū autem maxime sciētialis est prima.

In Mathematicis scientijs nullum accidens. Ar. Reliquas philosophias, præter mathematicas, Arist. appellat Disputationes.

Mathema-

Mathematicæ namq; scientiæ per hanc demonstrationes ferunt, vt Arithmetica, & Geometria, & Perspectiua, ferè dixerim quæcũq; ipsius propter quid considerationem faciunt. *Extra libros analyticos, 2 Physic. tex. 68.* Aut enim ad ipsum quidem reducitur ipsum propter quid vltimum in immobilibus, vt in Mathematicis. Ad definitionem enim recti, aut commensurabilis, aut alterius cuiuspiam reducitur vltimum. *En causas formales agnoscit.*

Principi Peripateticorum appono eximium è pluribus interpretem, ac Philosophum Toletum. Qui in 2. phys. quæst. 4. Physicus frequenter vtitur demonstratione effectus, & signi, quia ipsius causæ frequentius sunt occultæ, nec per se sensibiles; at Mathematicus frequentius à prioribus procedit, cum eius causæ notiores sint effectibus, à sensu enim abstrahit, & in intellectu notius est quod prius est. *Vide ibi plura.*

Mathematicus philosophus frequentius à prioribus procedit, &c.

2 *Iam secundo loco, pro omnibus alijs, quæ in sequẽtibus demonstrationibus afferri possunt, exemplum perfectæ, ac scientificæ demonstrationis affero in hac propositione Euclidis. Ac supponendũ hic est primam hanc propositionem, iuxta inscriptionem, nõ Theorema, sed esse Problema. In Problemate autem docetur effectio aliqua per aliquas linearum constructiones, &c. vt hic docetur, ac demonstratur effectio trianguli æquilateri à descriptionibus duorũ æqualium circulorum, & ductibus duarum linearum, iuxta præscripta in constructione, siue priori parte demonstrationis.*

Ac Proclus quidem eximius Philosophus Platonicus in comment. ad hanc primam propositionem Euclidis ait. Quando autem per descriptionem circulorum, quod constructum est triangulum æquilaterum esse ostenditur, à causa apprehensio fit: similitudinem enim, & ęqualitatem circulorum causam dicimus esse æqualitatis laterum illius trianguli. *Quibus verbis innuit demonstrationẽ hanc esse à causa formali, siue à definitione, quod s. triangulum hic efformatum sit æquilaterum, quia eius tria latera sunt tres semidiametri duorum æqualium circulorum. In circuli autem definitione, quæ 15 est, inter essentialia ponitur vt sit* figura, ad cuius peripheriam à centro rectæ omnes, hoc est, semidiametri, ductæ sunt æquales.

Demõstratio 1 prop. est à causa formali.

3 *Itaq; vides etiam in Logica huiusce propositionis analysi factà à Clauio, vltimo loco medium terminum, ac probationem, (quæ tamen vi, ac dignitate prior, ac potior est) esse eam maiorem propositionem vltimi syllogismi:* lineæ rectæ à centro ductæ ad circumferentiam circuli inter se, per 15 definit. sunt æquales. *Cui*

deinde

deinde minor propositio applicata succedit: lineę AB, AC; BA, BC à centris A, B ad ęqualium circulorum circumferentias CBD, CAD ductæ sunt, ac ideo æquales. Quare triangulum id constructum est æquilaterum, iuxta definitionem essentialem trianguli ęquilateri. *quæ est definitio 21 hic in versione Lantzij.*

Vere philosophi, qui geometricis demonstrationibus imbuti sūt.

Gaudeant ergo cādidati Philosophiæ Geometricæ dum euidenter in hoc exemplo agnoscunt se verè Philosophos, ac scientificos futuros esse, nec opinionibus, aut disceptationibus fatigandos, sed firmissimis demonstrationibus imbuendos, ac solidandos. Vide in rem alia contra Ageometras in § 1 ad propos. 32.

Iam ad corollaria, praxes, & vsus aliquos huius primæ propositionis deueniamus.

§. XIV.

COROLLARIVM I.

Circuli per centra mutuo se secantes sunt æquales.

Patet. Nam in figura Euclidis vides AB esse semidiametrum, & communem, & effectricem vtriusq; circuli.

COROLLARIVM II.

Per data duo puncta circulum describere.

In figura Euclidis finge A, B esse duo data puncta. Eodem arbitrario interuallo ex A, & B fiat sectio in C, & C centro descriptus circulus ibit per A, B. Sic & per datæ rectæ extrema ibit circulus, excitato super ea æquilatero, vel isosceles, vt docetur in § 16 paullo inferius. Ceu vides in fig. Eucl. ire per A, C, & per C, B vtrumq; circulum, centris factis in angulis Aequilateri.

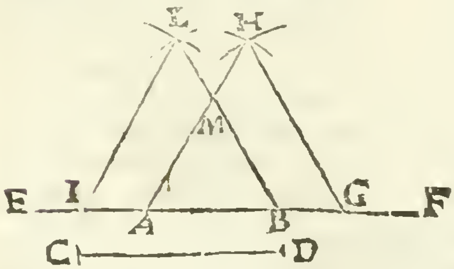
§. XV.

§. XV.
PARADOXVM, & PROBLEMA.

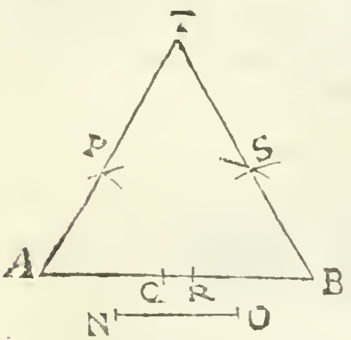
Super data recta triangulum æquilaterum excitare vnica circini diductione, quæ sit maior, vel minor datâ rectâ linea.

HVius paradoxici, ac iucũdi Problematis (cuius Cataldus solas figuras apponit) nos & constructionem breuiter exponemus, & demonstrationem indicabimus.

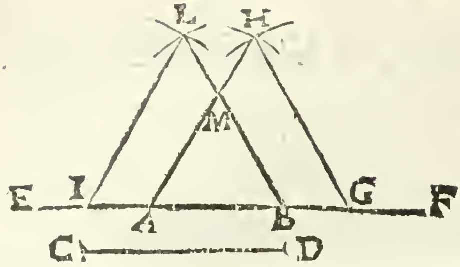
Sit data recta AB, super qua excitandum sit triangulum æquilaterum primo ex vnica circini diductione, quæ sit CD maior, quàm data AB. Producatur AB vtrimque indefinitè in E, & F, & interuallo, siue datâ circini diductione CD, ex A fiat sectio in G, & H, & eodem interuallo ex G rursus in H. Pariter ex B fiāt sectiones in I, & L, ex I itē in L. Aequilaterorũ duorum ILB, AHG latera AH, BL vbi se mutuò secabunt in M, dabunt verticem quæsiti, siue construendi æquilateri super data recta AB.



Sin autē secundo sit diductio, siue interuallum circini datum NO minus, quàm recta AB, ea circini diductione fiant sectiones ex A in P, & Q, ex Q in P, ex B in R, & S, ex R in S, mox producta latera AP, BS vbi se mutuo secabunt in T, dabunt verticem æquilateri super data AB.

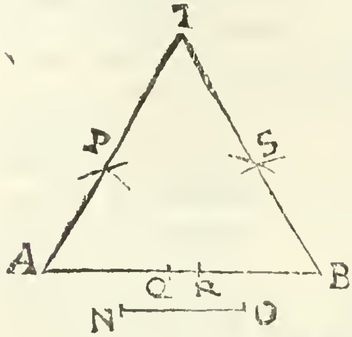


Neq; verò dubitandum est latera æquilaterorum, siue in priore figurà maiorum ILB, AHG, siue in altera figurà minorum ATQ, RSB coitura in M, & in T:



faciunt enim interiores angulos minores duobus rectis dum inclinantur ad cōficiendum triangulum.

Demonstratio cōstabit Tyroni melius in sequētibus propositionibus Euclidis. Hìc interim saltem indicanda est, suppositis tribus corollarijs è 5, 6, & 32 proposit. huius libri 1 Euclid. Tres anguli ęquilateri sunt inter se æquales. Triangulū, cuius tres anguli sunt inter se æquales, est æquilaterum. Si duo anguli vnius triāguli sint æquales duobus alterius, & tertius tertio est æqualis. *Quoniam ergo æquilaterorum ILB, AHG anguli sunt æquales, per 1 suppos. ergo angulus HAB erit æqualis angulo ABL. & quoniam duo anguli A, & B ad basim AB trianguli AMB, sunt æquales duobus ad bases triangulorum ILB, AHG, ergo & tertius ad verticem M erit æqualis vtrilibet ad verticem L, vel H, per 3 supposit. hoc est, triangulo AMB erit æquiangulum, vt sunt duo triangula ILB, AHG, ergo, per 2 suppos. est æquilaterum. &c. Pariter in altera figura constructa ex diductione circini minore, quàm data AB, anguli A, & B æquales sunt in æquilateris ATQ, BSB, & communes etiam triangulo ATB, & reliqui ad vertices P, T, S æquales; ergo æquilaterum est ATB.*



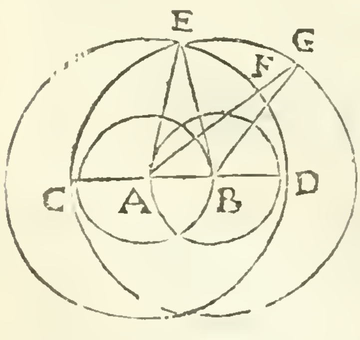
§. XVI.

PROBLEMATA, SEV COROLLARIA.

Super data recta triangula isosceles, & scalenum constituere.

Campanus, Cõmandinus, & Clauius ex Proclo Problema hoc (quod quasi corollarium est e 1 proposit. Eucl.) ita exequuntur, vt tamen Clauius etiã aliter, ac breuius expediat. Ex eo nos hîc post constructionem.

A B cõmunis semidiameter in figura Eucl. à centris extendatur ad circumferentias, fiatq; CD. Centris A, B, interuallis AD, BC describantur duo circuli DEH, CEF se secantes in E, & H. Iunctis ad interjectionem E rectis AE, BE, erit AEB isosceles. Quoniã AE æqualis est rectæ AD, & recta AD est dupla rectæ AB, propterea quod BA, BD æquales inter se sunt; erit & AE dupla rectæ AB. Rursus quia BE æqualis est rectæ BC, & BC dupla est ipsius AB, propterea quod AB, AC æquales sũt inter se, erit & BE dupla ipsius AB. Cum igitur vtraq; AE, BE dupla sit eiusdem AB, erũt AE, BE inter se æquales, maioresq; præterea rectà AB. isosceles ergo est triangulũ ABE.



2 *Pro scaleno vero, ex alterutro cẽtro A, vel B maiorũ circulorum DEH, CEF ducatur recta ad alterutram circumferentiam eccentricam, verbi gratia ab A ad G punctum circumferentiæ CGH, cuius centrum non est A, sed B. secetq; recta AG in puncto F circumferẽtiam EFD, cuius ipsa est semidiameter. Iunctà deinde BG, erit AGB scalenum triangulum.* Quoniam tam AF, AD ex centro A ductæ sunt æquales, quàm BG, BC ex centro B, ductæ sunt autem AD, BC ipsius AB duplæ, quòd AB vtriq; BD, AC æqualis sit, erunt quoq; AF, BG ipsius AB duplæ, ac propterea maiores, quàm AB. Cum ergo AG maior sit, quàm AF, siue quàm BG, scalenũ erit triangulum AGB, habens latus AG maximum, BG medium, & AB minimum.

§. XVII.

SCHOLION.

Ad compendia praxeωn, ac ſine fallacia.

SIne ductibus eorum circulorũ ſatis erit pro æquilatero ad interuallum datæ rectæ ſectiones tantum circulorum leuiter ſignare; pro iſcoſcele ad interuallum maius, vel minus datâ; pro ſcaleno vel ad maius, ac maius, vel ad maius, & minus, vel ad minus, ac minus interuallum datũ. Modò (ne fallare) duæ ſumptæ ſingulæ minores, ſimul tamen compoſitæ ſint maiores tertiæ datâ; iuxta 22 prop. huius lib. 1.

§. XVIII.

SCHOLION.

Cur Euclides cõſtructionem trianguli tantum ęquilateri docuerit. Atq; huc eruditiones, ac theoriæ geometricæ.

Problematum quænã Ordinata, Media, Inordinata.

1 EX Proclo: Problematum alia quidem ſimpliciter, alia autẽ multipliciter, alia verò infinitis modis fiunt. Vocantur autem (vt inquit Amphinomus) illa quidem, quæ ſimpliciter conſtruuntur, Ordinata: illa autem, quæ multipliciter ſecundumq; numerum conſtruuntur, Media; illa vero, quæ infinitis modis variant, Inordinata. Quomodo igitur ſimpliciter, vel multipliciter Problemata quidẽ conſtruerentur, in iamdictis Triangulis fit manifeſtum. nam Aequilaterum quidem ſimpliciter: reliquorum autem duorum alterum quidem dupliciter, alterum vero tripliciter conſtruitur.

Æquilaterũ vndiq; æquale vno modo conſtruitur.

2 *Paulò ſuperius, vbi de triplicis formæ triãgulorũ deſcriptione:* Hoc vero in his pulchrum eſt, quod Aequilaterum quidem vndequaq;

quaque æquale existens, vnico modo construitur. Aequicrus autem in duobus tantũ lateribus æqualitatem habens, dupliciter cõstruitur. data.n.rectà lineà vel ambabus æqualibus minor est, quemadmodum nos fecimus, vel ambabus maior. Scalenum verò vndique inæquale existens, tripliciter constituitur. nam data recta linea vel maxima trium est, vel minima, vel alterà quidem maior, alterà verò minor, & licet vtramque suppositionem vel protendenti, vel contrahenti exercere. nobis autem quæ sunt exposita sufficiant.

Isosceles duplice latere æquale duplici interuallo construitur. Scalenũ tripliciter inæquale triplici interuallo. &c.

3 *Adde (siue explica) trianguli æquilateri Ordinatum problema absolui vnica circini diductione, isoscelis Medium gemina diductione, scaleni Inordinatum triplici diductione, scilicet vel pro triplici inæqualitate, vel pro duplici, vel pro eàdem trium laterum æqualitate.*

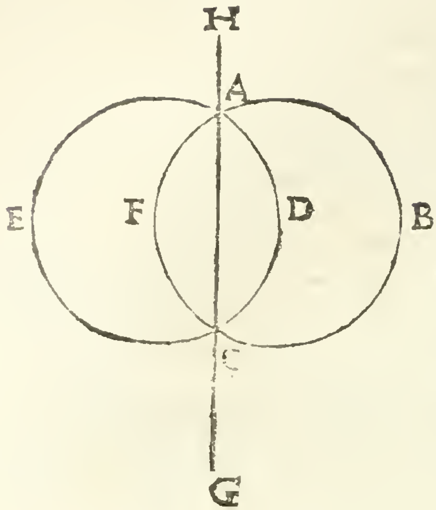
Euclides igitur Medio, & Inordinato Ordinatum æquilateri problema iure prætulit etiam ad facilitatẽ, ac venustatẽ. facilius enim, ac venustius vnicà circini diductione hoc primum problema, & alia inferius ab hoc profluentia, vt videbis, absoluuntur.

Adde prædictis moralia, & theologica, quæ habebis in fine nostrarum harum commentationum ad 1 propos. Eucl. Quarum quãmaximè possumus finem esse vòlumus in fructu aliquo vel ad bonos mores, vel ad Deum.

§. XIX.

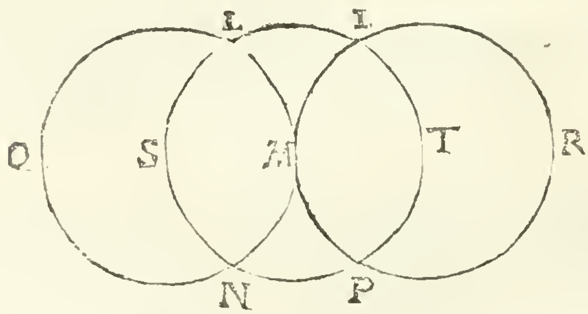
Proclus de angulo figuræ securalis ad veritatem explicatus ex figura primæ 1 Eucl. contra nonnullorum hallucinationes.

1 P*Roclus in Comment. ad 23. propos. lib. 1. Euclidis sic inquit:* Ostensum fuit ab antiquis, quod angulus figuræ illius, quæ securi similis est, æqualis est angulo rectilineo, quippe qui duabus tertijs anguli recti æqualis est. Fit autem huiusmodi securalis figura, quæ pelecoides vocatur, duobus circulis per centra se mutuo secãtibus. *Circa id, quod affirmat Proclus de angulo pelecoide æquali duabus tertijs vnius recti, habebis*



explicationem, & demonstrationem a nobis in § 12 inferius ad hanc 1 propos. Eucl. At verò circa id, qđ affirmat antiquam securim fieri duobus circulis per centra se secantibus, hallucinati sunt aliqui, dũ securim eius formæ fieri affirmarunt duobus circulis non se, sed tertium circulum per centrum secãtibus. Quam verò Proclus affirmat securim, aut vnica tantum est, aut etiã gemina, & qualem subindicat figura primæ proposit. Eucl. Quæ geminam dabit securim, hoc est bipennem ex Constructione ab Euclide præcepta, vt vides in figura apposita, in qua duæ lunulæ ABCD, AECF factæ ex mutuà æqualium circulorum sectione per centra geminas secures (siue bipẽnem) dant, si eas diuidas per mutuos angulos A, C, & communi manubrio HG committas.

3 At verò in secundà hìc figura bipennis quidẽ gracilior fiet ex



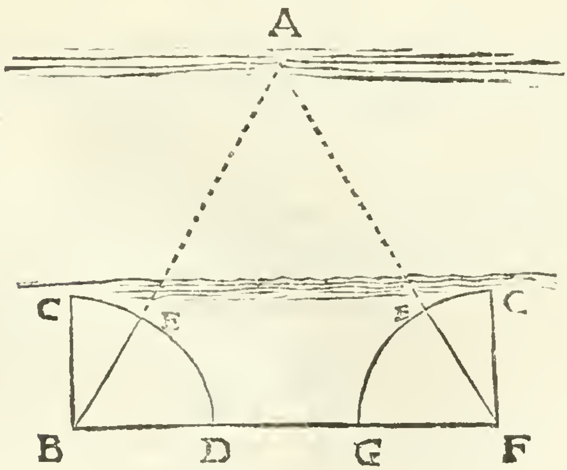
ILM, MNT, sed ea est (quam non docet Euclides) è sectione duorum circulorum MLQN, MIRP mutuà ad tertium intermedium LSNPTI.

§. XX.

Ex Apiarijs Philoſophiæ Mathematicæ ad 1 Propoſ. Eucl.

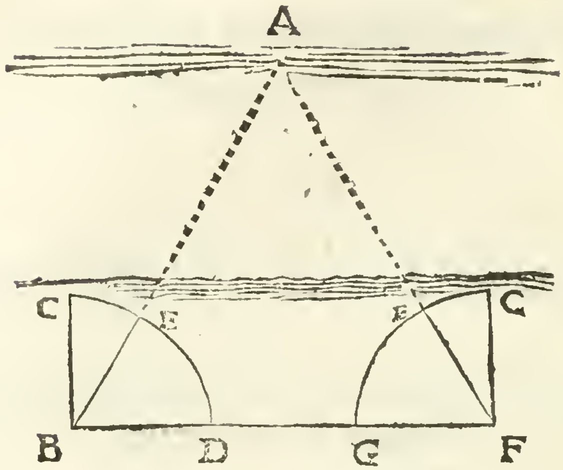
§. XX.

PROBLEMA, ET VSVS = — Trianguli æquilateri ad dimenſiones inacceſſarum diſtantiarum.



FInge in A eſſe vel nauim in mari iactis anchoris, vel oppidũ, ac te eſſe in B vbi littus, atq; inter AB intercedere vel marinas aquas, vel vallis profunditatem, quæ inacceſſam efficiant menſori diſtantiam AB. Accipe quadrantem aliquem vſitatum BCD, cuius arcus CD de more in 90 partes ęquales, ſiue gradus ſit diuiſus. Ad gradum 60 in E, (numerando à D) fige clauiculum, ſiue ſignum aliud quodpiam, & appoſito ad B oculo, per BE ſpectato ſignum A. Mox fixà haſtà in B, ac ſublato

qua-



quadrante, secus littus progreditor donec in situ aliquo, velut in F collocato quadrantis angulo B, videas per FE quidem signum A, per FG verò videas hastam in B. Metire ipsam BF, & habebis distantiam AB, vel AF. Est enim triangulum æquilaterum ABF; ac propterea noto vno latere, reliqua nota fiunt.

Satis nunc tyroni sit praxis, cuius supposita tantùm indico, vt saltem hic nunc subluceant ea, quæ clarius peruidebit in luce consequẽtium propositionũ huius libri 1 Eucl. est igitur ABF æquilaterum per 1, & 2 suppositionem in praxi § 15, & supposità 32 propositione de tribus angulis, qui in omni triangulo æquales sũt duobus rectis. Igitur iuxta diuisiones Astronomorum duo anguli recti diuiduntur in 180 gradus; qui diuisi in tres partes æquales dãt singulis partibus gradus 60. Cum ergo in triangulo ABF duo anguli ad B, & ad F sint æquales, ac singuli gradum 60, efficiunt summam graduum 120, ergo ad cõplementum duorum rectorum, hoc est ad summam 180, reliquus est tertius angulus ad A, & ipse gradum 60, ac proinde tres anguli ad A, ad B, ad F sunt inter se æquales, ac triangulum ABF æquiangulum, atq; æquilaterum.

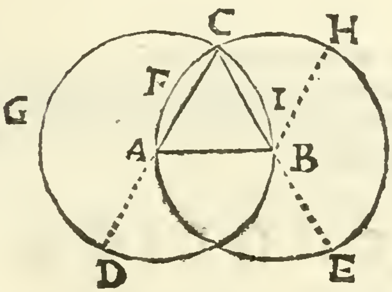
Vide plura, & in figurà illustriore apud nos Apiar. 2. progymn. 1. propos. 3. vbi citantur propositiones Euclidis, & demonstrationes, quæ ab hac praxi supponuntur.

§. XXI.

§. XXI.

THEOREMA.

Anguli curuilinei æquales rectilineis in figura primæ proposit. Euclidis.



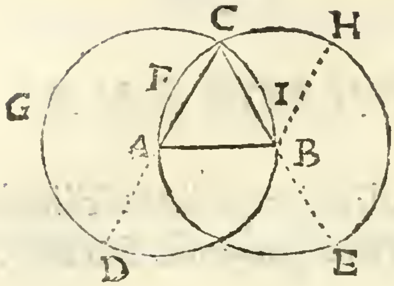
SI fingas semidiametros CA, CB productas directè in D, & E, quoniam æqualium semicirculorum æquales sũt anguli ECF, DCG, si auferatur commune segmẽtum ACF, remanẽt æquales BCA rectilineus, & FCG curuilineus.

§. XXII.

SCHOLION.

Procli locus illustratus de anguli pelecoidis quantitate.

E Prædictis intellige quid velit Proclus lib. 3. in Eucl. dum affirmat: Angulus pelecoides duabus recti tertijs æqualis est. *Vocat angulum pelecoidem, id est securi similẽ, ipsum FCG.*



Angulus verò ACB rectilineus æquilateri est æqualis duabus tertijs vnius recti, vt & patebit è corollarijs ex prop. 32. huius lib. 1. Eucl. & patet, diuisis duobus rectis in tres partes æquales, siue angulos tres æquales Aequilateri.

SCHOLION.

VIde item de angulis æquilateri, qui æquales curuilineis, plura apud nos in Apiar. 3. Progymnas. 5. proposit. 1. & seq. vbi demonstramus etiam angulos vel rectos, vel obtusos rectilineos æquales curuilineis cùm circuli æquales secant se non per centra. &c.

§. XXIII.
THEOREMA.

Triangulum æquilaterũ æquale falci, siue triangulo curuilineo falcato in figura 1. propos. Eucl.

SI ad interuallum vnius laterum æquilateri ABC sectus sit arcus ex C, verbi gratia, in H, & iunctam imagineris BH, erit tota area æquilateri trianguli ABC æqualis areæ falcatæ curuilineæ ICHB. Sunt enim æqualium circulorum sub æqua-

æqualibus rectis, & curuis æqualia segmenta CABIC, & CBHC; quorum commune segmentum CBIC si auferatur, reliqua fiunt interse æqualia rectilineum æquilaterum ABC, & falcatum CIBHC.
Vide plura ad hæc in Apiar. 1. Prælibam. 3. propos. 1.

SCHOLIA.

Compendia ad inscriptiones trianguli Aequilateri, Hexagoni, Quintidecagoni in circulo pro lib. 4. Eucl. e fig. 1. prop. huius lib. 1. Eucl.

1 *NE pluribus te morer, mi Tyro, circa plura, quæ geometrica solertia extrudere potest è fig. & prop. 1 hac Euclidis, quæ hic proposuimus in inscriptione huiusce scholij vide apud nos in Apiar. 1. Prælibam. 3. in Schol. ad propos. 1.*

Pluriformia mixtilinea æqualia lunulis, & pluribus alijs curuilineis ostēdere in fig. 1 prop. Eucl.

2 *HIc pro Tyronibus continuimus nos intra terminos æquilateri expressi in fig. huius prop. Eucl. Si plura optas iuxta inscriptionem huius 2 Scholij, vide in Apiar. 3. prog. 6. propos. 11, 16, 19. & Progym. 7, propos. 1, & in coroll.*

§. XXIV.

SCHOLION.

Æquilateri trianguli præstantia symbolica indicata præ alijs triangulis, & eiusdē symbolum theologicum in gratiam Chinensium Philosophorum.

1 P*Ræter ea, quæ habes in §. 18 ex antecentibus, vbi Proclus rationem affert cur Euclides solius æquilateri, ac nō etiā æquicruris, & scaleni triangulorum constructionem expresserit, exemplo scilicet vsus in præstantiori specie, &c. vt ibi habes; adde etiam sequentia ex eodem Proclo, & à nobis in vsum eleuandæ mentis à figuris Geometricis ad sublimiora, & vtiliora, vt decet non inaniter philosophātes. Igitur Proclus post definitionem 29. habet quæ huc fortasse melius faciant:* Æquilaterum quidem æqualitate prorsus, simplicitateque præstans Diuinis cognatum est animis: mensura siquidē est & inæqualium æqualitas, quēadmodum & inferiorum omnium diu nitas. Æquicrus autem melioribus generibus materialem naturam dirigētibus, quorum maior pars quidem mēsura tenetur, extrema verò inæqualitatem, materialemq; immoderationē attingunt: Æquicrurijū namq; duo quidem latera æqualia sunt, basis autem inæqualis. Scalenum verò vitis partibilibus, quæ vndequaq; claudicant, se seq; præparant, cum ad generationem tendant, refertaq; materia sint. *Aequilaterum symbolum est Dei, & supernarum Intelligentiarum nusquam à bono, & perfecto deficientium; Aequicrus hominis rationali quidē, & recte morata æqualitate animi secundum virtutem præditi, at deficientis in inferiore basi animalitatis; Scalenū animantium ratione carentium, & vndique inæqualium ad inferiora, & materialia pro sui naturà.*

2 *Vidi olim in sacris aliquibus voluminibus typis expressis inter diuinæ Triados tres augustiss. mas personas triangulū Aequilaterum ita interpositum, vt singulæ angulum vnū è tribus eius figu-*

ræ

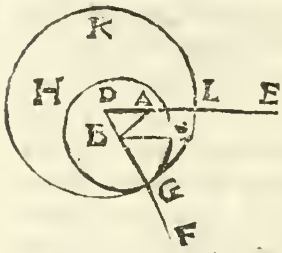
ræ contingerent. Ac passim christiani Pictores Aequilaterum triangulum apponunt sacro vertici primæ in diuinà Triade personæ, hoc est Patris. Quemadmodum verò ad definitionem 15. circulum Theologicum in Deo etiam apud antiquos Philosophos Triadico exposuimus pro nostræ Religionis Socijs Euclidē apud Sinas explicātibus, & occasione Mathematicarum scientiarū Christi Domini Seruatoris verā fidem docentibus; ita & hic ijsdem religiosis Doctoribus in gratiam Chinēsium discipulorum, ac philosophorū apponimus hoc symbolum Aequilateri Trianguli, quo vtantur ad cognitionem aliquam diuinæ Triados afferendā. Recte Proclus, ad hanc Eucl. propositionem, Circulo Aequilateri præstantiam comparat: Quod igitur Æquilaterum Triangulum inter Triangula optimum sit, & Circulo maximè cognatum omnes a cētro ad circumferētiam æquales, vnamq; simplicem lineam extrinsecus ipsū terminātem habenti nemo est, cui non sit manifestum. *Igitur vt in Circulo, sic in Aequilatero Triāgulo vestigia, & symbola sunt augustiss. Triadis diuinarum in essentiæ diuinæ vnitate personarum. Perfecta in Aequilatero Triangulo Figura est, vnica tribus æqualibus constans lateribus, tribus æqualibus inflexa angulis; similem in modum vnica, & infinitè vndequaq; perfecta essentia Deus est, tribus tamen diuinis, & æqualibus personis distincta, &c. Plura hinc educant, & edoceant suos Auditores religiosi apud Sinas Doctores. Quorum sacris laboribus nostras hasce Geometricas, & Mathematicas alias commentationes addiximus.*

Pro-

Propos. II. Problema II.

Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam ponere.

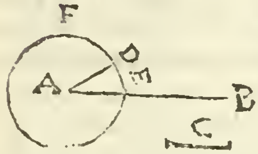
SInt data punctum A, recta BC, & oporteat ad punctum A rectæ BC æqualem ponere. Ducatur ab A ad B recta AB: super [a] eaq; constituatur triangulum æquilaterum DAB, [b] productis in directum ipsis DA, DB in E, & F. [c] Cētro B, interuallo BC describatur circulus CGH. Rursus [d] cētro D, interuallo DG describatur circulus GKL. Quoniā ergo B centrum est circuli CGH, [e] erit ipsi BC æqualis BG. Rursus cum D sit cētrū circuli GKL, [f] erit DL æqualis ipsi DG: [g] quarum pars DA est ęqualis parti DB: [h] reliqua ergo AL ęqualis erit reliquę BG. Ostensa est autem & BC æqualis ipsi BG: vtraque ergo AL, BC æqualis est ipsi BG. [i] Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia: ergo AL æqualis est ipsi BC. Quare ad punctum datum A datę rectę BC ęqualis est posita AL. Quod facere oportuit.



a prop. 1. 1.
b post. 2.
c post. 3.
d post. 3.
e def. 15.
f def. 15.
g prop. 1.
h ax. 3.
i ax. 1.

Propos. III. Problema III.

Datis duabus inæqualibus rectis lineis, à maiore minorem æqualem abscindere.



SInt datæ rectæ inæquales AB,& C; quarũ maior sit AB; à qua minori C ęqualem abscindere oporteat. Sit [a] ad punctum A rectæ C æqualis posita AD.& [b] cẽtro A, interuallo AD, describatur circulus DEF. Et quia A centrum est circuli DEF, [c] erit AE æqualis ipsi AD. sed & C æqualis est ipsi DA: vtraque ergo AE, C æqualis est ipsi AD: igitur & AE æqualis erit ipsi C. Duabus ergo inæqualibus datis rectis lineis AB,& C, à maiore AB minori C æqualis est abscissa AE. Quod facere oportuit.

a prop. 2. 1.
b post. 3.
c def. 15.

§. I.

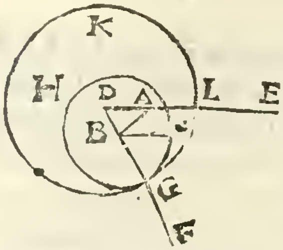
SCHOLION.

Praxes, & compendia 2,& 3 propos. ex antiquis asserta.

1 *AD vsus, & praxes præcedentium duorum problematũ haud opus est tot ambagibus, quibus tamen rectè vtitur Euclides ad demonstrationes perficiendas. Proclus in fine com. ad 2. propos. affirmat antiquos aliquos Geometras consueſse demonstrationem secundæ propos. expedire, accepto per circinum interuallo datæ lineæ, & puncto dato accepto pro centro, eodem interuallo circulum signãdo, cuius ducta semidiameter erat recta quæsita, scilicet æqualis alteri datæ, & ad datum punctum*

Antiqui ad praxim expediebãt hæc 2 Eucl. probl.

ctum posita. Quem modum esto Proclus fortasse rectè non admittat ad demonstrationem, sanè ad vsum, & praxim non video cur sit reijciendus. Neque enim, cum vsus postulat apud Geometras vt à puncto, vel ad punctum datum ducant rectã alteri datæ æqualem, alià ratione se se expediunt, quàm prædictà, licet non integro ambitu peripheriæ, sed tantùm exiguo arcu signato.



Ac sanè ea praxis nititur demonstratiuè eo principio, quod duæ rectæ ad idem interuallum ductæ sunt æquales. Quemadmodum etiam Euclides hìc (& alibi sæpius) accipit interuallum datę BC, quo dum secat ipsam BF in G, idem est, ac si ducatur eadem BG ipsi BC æqualis. Ac quod factũ est ex interuallo BC applicato ad punctum B, & circulo minore signato, fieri etiam statim potest ad punctum datũ A, applicãdo idem interuallum BC, & breui arcu signato in L, ductaque AL.

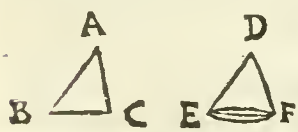
Hallucinatio versantium physicè in abstractis Geometricis.

2 Neque verò existimet Tyro Geometricus interuallum datæ BC, quod circino sumitur, esse præcipuum Geometræ, aut Geometricæ demonstrationis fundamentum, sed tantum sensibile signum est (vt & figuræ geometricę in materia) abstracti illius interualli mathematici extra materiam sensibilem in animo, quo cogitat Philosophus Mathematicus, & contẽplatur mentale interuallum cogitatæ lineæ translatum omnino idem, siue illi mentaliter æquale ad datum, & cogitatum in animo punctum. Cuius mentalis interualli signum sensibile in materia, & in tabula exhibet circini diductionem ad interuallum datæ sensibilis lineæ, atq; abstrahit in ijs signis sensibilibus ab omni, quæ sensum eludere posset, fallacià. His positis iuxta ea, quæ pluribus habes à nobis in cap. de Abstract. math. non video cur expedita praxis antiquorum ex Proclo citata circa hanc 2 propositionem scientifica non sit, ac præterea per eam aliter, ac breuius non possit absolui Euclideium hoc problema 2. Pariter secturus, iuxta 3 propositionem, de maiore partem datæ lineæ minori æqualem, Circino transfer interuallum datæ minoris, ac facto centro altero extremo maioris, breuissimo arcu secabis æqualem datæ. &c.

Pro-

Propos. IV. Theor. I.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, habuerint autem & angulum angulo, æqualibus lateribus contentum, æqualem, & basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC duobus DE, DF æqualia habeãt, vtrumq; vtrique, AB ipsi DE, & AC ipsi DF, & angulum BAC angulo EDF. Dico quod & basis BC basi EF sit æqualis, & triãgulum ABC triangulo DEF, & reliqui anguli reliquis, vterq; vtrique, quibus æqualia latera subtẽduntur, nempe ABC ipsi DEF, & ACB ipsi DFE. Si enim triangulum ABC triangulo DEF * congruat, & A super D ponatur, a congruet AB recta rectæ DE, & B ipsi E, quod AB sit æqualis DE. Cõgruente igitur AB ipsi DE, cõgruet & AC ipsi DF, quòd angulus BAC angulo EDF sit æqualis: ideo & C ipsi F congruet, quod & AC æqualis sit ipsi DF. Sed & B ipsi E congruebat. Quare & basis BC basi EF congruet. Si enim congruente B ipsi E, & C ipsi F, basis BC basi EF non congruat, continebunt duæ rectæ spatium; b quod fieri nequit. Cõgruet ergo basis BC basi EF, & æqualis illi erit; adeoque totum triangulum ABC toti triangulo DEF congruet, c eiq; æquale erit: congruent ergo & reliqui anguli reliquis, eritque ABC angulus angulo DEF; & ACB ipsi DFE æqualis. Si ergo duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c.

* superponatur.
a ax. 8.
b ax. 12.
c ax. 3.

§. I.

SCHOLION.

Vis, ac præstantia quartæ propositionis contra ageometricam hebetudinem.

1 *MErito huic 4. propositioni cēserem in fronte adscribēdum, id quod Plato pro foribus Academiæ pinxisse dicitur:* ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. *Nā aliqui potissimā rationē, qua probentur basis basi, & ad bases anguli æquales, atque adeò totum toti triangulo æquale, arbitrati sunt esse vel superpositionem, vel congruentiam materialem, & ad sensum faciendam, vel intelligendam. At horum hebetudinem Philosophis Geometricis indignissimam, & ad geometricas abstractiones ineptissimam merito Plato à sua propelleret Academia; quemadmodum egregie noster Clauius Peletarium reprehendit, & doctè conuincit in Apologia, quam habet & initio triangulorum sphæricorum, et ad proposit. 16. lib. 3. elem. Euclidis. Relege nos etiam in antecedentibus ad octauum axioma. Explicat Clauius in ea Apologia quæ sint superpositio, & congruentia æqualium apud Geometras, nempe abstractè in puro intellectu ita, vt, si duæ eiusdem speciei dentur æquales in geometricis, vel lineis, vel superficiebus terminatis, ac figuratis (iuxta requisita, quorum exemplum vnum habes in hac 4 propositione: vtrumq; latus æquale vtrique lateri, angulus sub ijs lateribus angulo æqualis. &c.) atq; illæ intelligantur superponi, siue per intellectum superponantur altera alteri secundum earum terminos. &c. (vt hic Euclides de duobus triangulis &c.) necessario futurum sit vt figuræ sic æquales etiam in ea superpositione ideali congruant; quæ etiam congruentia extra sensum, & sensuum fallacias concipienda, & intelligenda est.*

Superpositio, & congruentia abstracta in Geometrica philosophia.

Quæ quidem in contemplatione pura, & abstracta & verissima, & necessaria philosophatio geometrica est, ac per se notis principijs nititur: Quæ congruunt sunt æqualia. & : Quæ sunt æqualia congruunt, *in eodem genere si superponi alterū alteri intelligatur.*

Igi-

2 *Igitur demonstratio 4 huius propositionis potissima est, quæ resoluitur immediatè in prima principia, & nititur euidentibus, & mentis intelligentiæ per se notis. Ac superpositio mentalis quę hìc fit, est (quod quidam supinè ignorant) non medium demonstrationis (neq; enim sunt æqualia, aut congruunt, quia superponi intelliguntur) sed est loco cuiusdam quasi constructionis, quemadmodū plerumq; in aliquibus alijs theorematibus producuntur, vel iungūtur aliquæ lineæ, &c. quę sunt loco supposite constructionis, & vsus quidam postulati alicuius concessi, nō autem rationes, aut media demonstrationis. Quibus deinde suppositis, demōstratio per definitiones, vel axiomata, vel per alias probatas propositiones, ac ratiocinationes progreditur, & concluditur. Vt in hac quarta, quia duo latera alicuius trianguli rectilinei ęqualia dantur duobus alterius rectilinei vtrumq; vtriq; & angulus sub ęqualibus æqualis angulo, ergo (supposita intellectuali superpositione) congruent, &c. per conuersum 8 axioma à nobis suo loco explicatum. Et ad puncta extrema ęqualium laterum congruent etiam extrema basium, quare & tota basis toti basi, & anguli angulis erunt ęquales, per 8 axio. alioquin duę rectę spatium concluderent, contra 12 axio. &c. Ecce tibi, & aliud primum principium, quo nititur hæc demonstratio; quę duobus axiomatibus 8, & 12, quasi duabus alis, attollit se à materia, & attingit dignitatem potissimarum demonstrationum.*

Demōstratio 4. propositionis potissima est.

Hallucinatio cōfūdentū cōstructionē cum medio demōstrationis.

3 *Commandinus:* Hic demonstrationis modus, qui fit per superpositionem *(explicatam à nobis, & exactam ad geometricę abstractionis dignitatem)* figurarum, præterquam quod approbatur à Proclo Mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui Mathematicis. Archimedes enim eum vsurpat, non solum in planis figuris, vt In libro de centro grauitatis planorum, sed etiam in solidis, vt in libro de conoidibus, & sphæroidibus. *Idem Command. ad axi. 8.* Hoc geometriæ proprium est, *vt scilicet quę sibi congruunt sint ęqualia.*

Modus quarte demōstrationis vsurpatus à præcipuis philosophis geometricis.

In omnibus tamen 6. libris horum elementorum Euclidis tres tantum reperies propositiones 4, & 8 lib. 1, & 24. lib. 3. in quibus eo modo argumentandi vtitur ab axiomate 8, &c.

4 *Poletarius ad hanc, & ad 8 proposit. huius lib. affirmat eas esse per se notas, nec vlla egere probatione. Nam inquit* nulla euidentiore spetie æqualitas figurarum dignoscitur, quàm ex laterum æqualitate: *& alibi rursus:* Quis enim negauerit duas superficies esse æquales, quarum latera, & quantitate, & numero sunt ę-

Peletarius Euclidi iniquus iure reprehensus.

qualia? *Cui Io.Buteo*: Ego, inquam, nego istud esse verum in omni superficie. Dabuntur enim mille figuræ æquilateræ quidem inter se, non autem æquales, veluti sunt rhombi, rhomboides, trapezia, ac figurarum genus omne. Quod alias abũdè docui in explicatione ad locum Quintiliani Geometricum. En qualis iste confutator Euclidis, qui etiam quæ sunt apertè falsa proponit.

Ad confirmationem Buteonis, & confutationem Peletarij vide apud nos exempla figurarum, quarum singula latera singulis alterius sint æqualia, areę tamen inæquales. Apiar.3. Progym. 8. Propos. 2, 3, 4. Vide aliqua etiam pro axiom. 8. apud nos inferius ad sequentem quintam proposit. Euclidis.

Habes in primis hisce propositionibus Euclidis, mi Tyro, vbi vsum agnoscas abstractionis Geometricæ, de qua nos in capite vltimo nostrorum prolegomenων.

§. II.

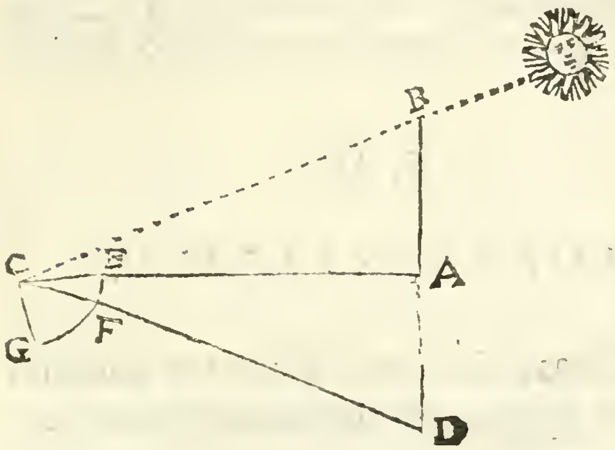
PROBLEMA, ET VSVS--

-- Astronomicus 4. propos. ad solis altitudinem geometricè inueniendam ex vmbris gnomonum.

Supposita perpendiculari erectione gnomonis, de qua nos etiã geometricè inferius ad 11 propositionem, Sol supra horizontem eleuatus radiet in styli AB verticem B, sitq; vmbræ longitudo AC, quam Tyro signet in horizontali plano. Educat ex A perpendiculariter rectam AD æqualem styli longitudini, tum iungat ipsam DC, & quantitatem anguli ACD metiatur ex arcu EF ope cartacei alicuius quadrantuli diuisi, apponendo angulum rectum C quadrantis CEG ad vmbræ verticem, & latus alterum secus lineam vmbræ signatam; numerus graduum inter EF erit quæsita, & inuenta geometricè solis in eo momento supra horizontem altitudo. Nam, ex hac quarta propos. Euclidis, duo triangula sunt CAB, CAD, quorum bina latera CA, AB,

æqua-

æqualia sunt binis CA, AD, &c. & angulus rectus BAC æqualis recto DAC, ergo & reliqui ABC, ADC sunt equales, atq; in primis qui quæritur angulus BCA altitudinis est æqualis angulo ACD iam dimenso, ac noto per arcum EF.



SCHOLION.

Circa fallacias ex vmbris.

Vide inferius ad propos. 6, quæ cauenda in vsu vmbrarum.

§. III,

COROLLARIVM I.

Etiam poli altitudinem ex vsu 4. propos. inuenire.

IN *vtroq; Aequinoctio si meridianam altitudinem solis inueneris modo prædicto ex vsu 4. propos. reliquum ad complementũ*

qua-

quadrantis erit eleuatio poli eius regionis, in qua sciotericè, ac geometricè sic operatus fueris. Nam si expectaris donec vmbra styli in æquinoctio attingat lineam meridianam ductam eo modo, quem docuimus in vsu Postulatorum, § 4, & meridianam altitudinem ex vsu huius 4 prop. acceperis, ea solis meridiana altitudo in Aequinoctijs est altitudo Aequatoris, in quo tunc sol versatur. Complementum autem ab Aequatore vsq; ad Verticalem est æqualis altitudini Poli, iuxta ea, quę demonstrauimus in vsu, & applicatione axiom. 3. § 6.

§. IV.

COROLLARIVM II.

E meridiana altitudine solis etiam quotidianá per 4 prop. poli altitudinem inuenire.

NEmpe addita, vel detracta solis declinatione, &c. Operatio fortaſse non cõueniet tyroni (licet sit facillima) nondum Astronomicis imbuto. Saltem indico in Apiar. 8. progym. 3. propos. 7. post inuentam altitudinem solis ex vsu 4 propos.

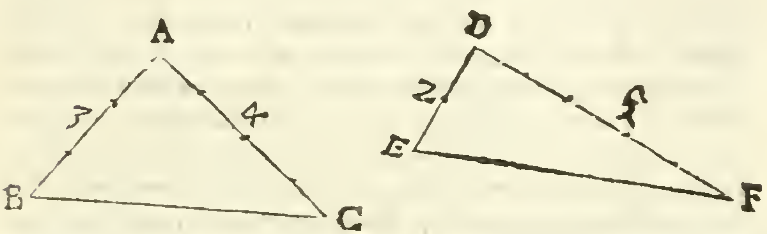
§. V.

Vsus, & praxes 4 propos. in commutationibus, & diuisionibus agrarijs ad iustitiam.

P*Roclus ad hanc 4. propos. Eucl. affirmat.* Multi in quibusdã agrorum diuisionibus non obseruantes (*scilicet conditiones huius 4. prop.*) cum maiorem agrum sumpsissent, iusti existimati fuere, perinde, ac si æqualem sumpsissent; quoniam vtraq; simul vnum agrum comprehendentia latera, vtrisque simul

simul alterum continentibus lateribus æqualia erant. *Idem paullo inferius.* Quidam olim suos participes in agrorum diuisionibus fraude deceperunt, quippe qui propter æqualitatem iuxta ambitũ maiorem agrum sumpsere. *Est pretium operæ vsum hunc huius prop. 4. tanti momenti saltem breuiter exponere, vt videant Tyrones gemetricas Euclidis propositiones non esse steriles, & ciuili vitæ inutiles. Quod etiam sæpius videbis in sequentibus, præsertim in hoc 1, & in 6. libro.*

Igitur in diuisione agri (quam finge inter amicum, ac me fieri

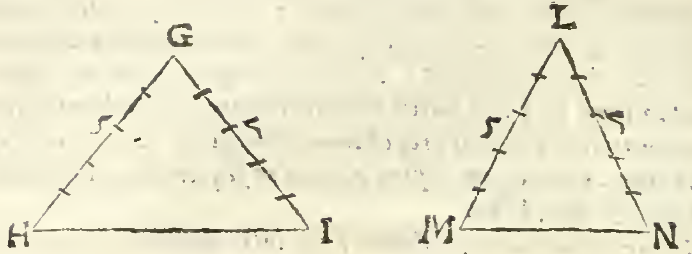


ad æqualitatem) quoniam ex hac quarta propositione Euclid. didici quę sint ęqualia triangula, diuido agrum in bina, ac bina triangula ita, Vt bina habeant angulum angulo ęqualem, puta rectos A, & D in figura, & latera angulum A conficientia bina simul sumpta æqualia binis simul sumptis angulum D conficientibus, nempe 7 partium ęqualium. In triangulo quidem ABC latus AB trium, latus AC 4; in triangulo verò DEF latus DE duarum, latus DF quinque æqualium partium. Atque ita fit Vt basis EF (vide Schol. seq.) sit maior basi BC. Mihi assumo partem agri triangulatam ABC, amico permitto partem EDF, quæ sub maiori est ambitu. An non amico non solum æqualem agri partem, sed etiam maiorem sepono? Respondet Geometra: nec ęqualem, nec maiorem, sed minorem amico tradis, tibi maiorem seponis. Ratio est à deficientia alterius conditionis, quam requirit Euclides ad ęqualitatem duorum triangulorum, nempe vt latera comprehendentia ęquales angulos sint ęqualia non bina simul sumpta binis simul sumptis, sed alterum alteri, &c. Sic enim sine fraude fiet ęqualitas in agri partitione.

Abusus primus propos. 4. contra iustitiam.

Rursus, vt Geometræ obaudiam diuido agrum in bina, & bina triangula ita, vt habeãt latera altera alteris ęqualia, & sint etiam isoscelia, nempe singula latera quinque partium ęqualium, vt vi-

des



des in triangulis GHI, LMN; itaq; hic etiam fit in exemplo vt alterius trianguli basis HI, propter angulum G, quem facio ampliorē angulo L, sit maior basi MN alterius. Assumo mihi agri partem triangulatam sub minori ambitu LMN, permitto sub maiori ambitu GHI amico. An non pro amicitia, & liberalitate me gessi? Minimè vero, respondet Geometra, sed hic etiam amicitiæ, immo iustitiæ, fucum facis, præsertim cum ego è sciētia Geometrica peruiderim duos angulos G, & L simul sumptos à te cum fraude geometrica factos esse (suppone in appositis figuris, ò Tyro, factos, & G esse valde obtusum) maiores duobus rectis. Qua in re, quoniam etiam discessisti ab altera Euclidis conditione præcipientis vt non solum latera alterum alteri sint æqualia, sed & angulus angulo sub lateribus æqualibus sit æqualis, ideò minorem agri partem sub maiori ambitu GHI permisisti amico, tibi vero maiorem sub minori ambitu LMN surripuisti.

Abusus secundus &c.

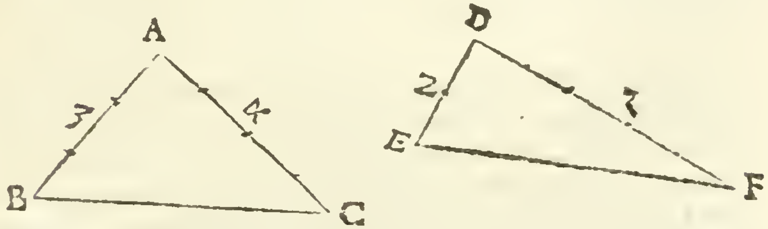
Igitur vt æqua; fiat partitio, sint agri partes triangulatæ cum vtraq; Euclidis conditione, &c. Est ergo hæc Eucl. prop. 4. ad iustitiam ciuilem necessaria. Quoniam vero in prædicto vsu, & exemplis praxim in primis spectauimus, at qui scientiā amant fortasse aueant scire prædictorū rationes geometricas, ideo erit etiam pro Tyronum aliqua institutione vt saltem indicentur scientifici fontes inferius deinde suis locis libandi. Sit ergo sequens

§. VI.

§. VI.

SCHOLION.

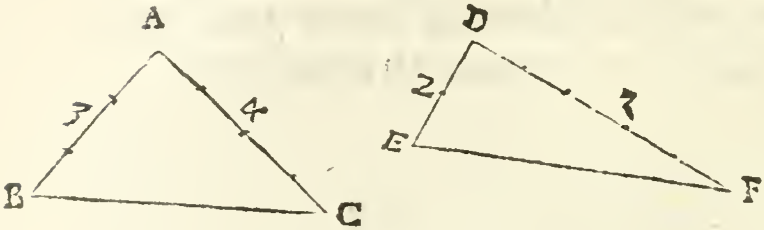
In quo indicati ſcientifici fontes præcedentium vſuum, ac praxeon agrariarum.



V*Nde naſcitur DEF, GHI (antec. §. 5.) & ſub maiori ambitu, & minoris eſſe areæ, quàm ABC, LMN? Quod attinet ad duo antecedētia triangula GHI, LMN habētia latera HGI, MLN ęqualia, patebit inferius ex 24 prop. baſim HI eſſe maiorē baſi MN, vbi demōſtratur, quod* ſi duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, angulum verò angulo maiorem, qui æqualibus lineis continetur, & baſim baſi maiorem habebunt. *Eſt aūt ex cōſtructione angulus G maior angulo L. Eſt vero maior area ſub LMN, quàm area ſub GHI, propter id, quod Geometra in præcedēti vſu animaduertit, nēpe quia anguli G, & L ſimul ſumpti ponuntur maiores duobus rectis. Demōſtrat enim Proclus in comm. ad propoſ. 24 (& ex eo Clauius in Schol. ad 37 propoſ. huius lib. 1.) quod* ſi duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, & angulum angulo maiorem ſub æqualibus lateribus, ita vt duo illi anguli inęquales, & verticales ſimul ſumpti ſint maiores duobus rectis, trianguli maiorem angulum habentis area minor eſt areà trianguli minorem angulum habentis. *Demonſtrat deinde idem Proclus eorum*

Nota arcana, & paradoxa geometrica.

triangulorum areas aliquando esse æquales, cùm scilicet anguli illi verticales sunt simul sumpti æquales duobus rectis; aliquando areã sub maiori angulo esse maiorem, cùm scilicet anguli illi verticales simul sumpti sunt minores duobus rectis. Quæ digna sunt animaduersione.



Quod ad poster. triangula ABC, DEF, quæ supponuntur æqualium angulorum, ac rectorum A, D, ac æqualium simul sumptorum laterum BAC, EDF, maiorem esse basim EF, quàm BC patebit inferius ex 47. Quoniam enim quadrata ex AB, AC simul sumpta, nẽpe 25, sunt æqualia quadrato ex BC; itemq; quadrata ex ED, DF simul sumpta, nempe 29, sunt æqualia quadrato ex EF, est autem maioris quadrati 29 maior radix, quàm minoris quadrati 25, ideo maior est basis EF basi BC.

At vero area trianguli BAC maior est areà trianguli EDF, per ea, quæ deducentur inferius ex propos. 41. ibi enim docebimus areã trianguli sciri ex ductu perpendicularis à vertice trianguli ad basim in dimidiam basis. Verbi gratia, ductà BA 3 in dimidiam AC, nempe in 2, fit area 6; ductà FD 5 in dimidiam DE, nempe in 1, fit area 5. Hæc satis hìc nunc ad tyrocinium. Doctiores precisiora, & plura norunt applicare figuris.

Ex Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ.

§. VII.

Vſus 4 propoſ. in Geometria practica.

IN *Apiar.2.Progym.2.corollar. poſt Propoſ. 9, vbi dimenſiones longitudinum inacceſſarum operosè factas in editioribus turribus docemus faciliori, ac pari certitudine facere in plano horizontali, ſpecimen exhibemus, cuius demonſtratio pẽdet ex hac 4 propoſ. ſi quidem receſſus in latus à turri fiat æqualis altitudini turris. Illuc viſe.*

§. VIII.

Vſus inſignis, & vniuerſalis 4 prop. in Optica Scenographica pro arcanis deformationibus, & pro Pictura.

IN *ea parte Opticæ Philoſophię, quæ directo aſpectu res è determinata, & moderatà diſtantia proſpicit, dum nos docemus arcanas, ac miras imaginum deformationes geometricè moliri in plano horizõtali pro ſpeculis vel cilindricis, vel planis, eæ deformationes conſtructionem, vim, vſum, demonſtrationem habent ab hac 4. prop. Vide in Apiar. 5. Progym. 1. cap. 6. num. 2. & Progym. 2. cap. 1. Quinimmo deformationum geometricarum, & euerſionem imaginum perpendiculariter in planis erectarum & regulam vniuerſalem ſuppeditat hæc 4 Eucl. prop.*

In eodem Apiar. 5. Progym. 2. cap. 4. num. 9. ad medium. propoſitio hæc 4 dat duo triangula minora æqualia, quorum alterum eſt in Pictura illa Optica, & Geometrica exhibita per noſtrum ſcenographicum inſtrumentum, & concluditur ſimillima figura prototypo, quia prototypum eſt æquiangulũ parti opticæ pyramidis, cui æqualis eſt pictura ex vi 4 huius propoſitionis. &c.

§. IX.

Paradoxici vſus, & vniuerſales 4 propoſit. in Gnomonicis, & Aſtronomicis.

IN *Ap. 9. Progym. 5. propoſ. 3, 4, 5, & in corollarijs, & in Scholijs, vbi vtimur horarijs cartis Quadrantis, & cylindri ſine vſu vſitato ſtyli, triangula orthogonia erecta e ſtylo, &c. abijcimus in plana cartacea, vt ibi docetur, ac demonſtratur ex hac 4 propoſ. Eucl. A quibus exemplis vniuerſalis quædam regula deſumi poteſt ad plures vſus alios paradoxicos vtendi alijs verſiformibus horarijs, ſine ſtyli erectione, vt ibi habes in ijs exemplis à nobis.*

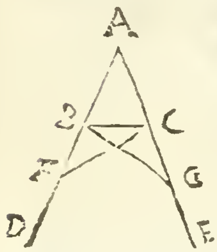
SCHOLION.

V*Ide & alios vſus propoſ. 4. in theorijs § 12 ad 12 propoſit. Eucl inferius.*

Pro-

Propof.V. Theor. II.

Iſoſcelium triangulorum anguli ad baſim ſunt æquales: &, productis æqualibus rectis, erunt & anguli infra baſim æquales.



SIt triangulum ABC habens latus AB lateri AC æquale. Producantur in directum AB, AC rectæ in D, & E. Dico angulum ABC angulo ACB, & CBD ipſi BCE æqualem eſſe. Accipiatur in BD quodvis punctum F; & [a] auferatur à maiori AE minori AF æqualis AG: [b] ducanturq; rectæ FC, GB, & cũ n AF ipſi AG, & AB æqualis ſit ipſi AC, erunt duæ FA, AC duabus GA, AB æquales, altera alteri, continentque angulum communem FAG: [c] erit igitur baſis FC baſi GB æqualis, & triangulum AFC triangulo AGB, & reliqui anguli reliquis, alter alteri, quibus ęqualia latera ſubtendũtur; nẽpe ACF ipſi ABG, & AFC ipſi AGB. Et quia tota AF toti AG æqualis eſt, quarum AB eſt æqualis ipſi AC, [d] erit & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Oſtenſa autem eſt & FC ęqualis ipſi GB. Cum ergo duæ BF, FC duabus CG, GB æquales ſint altera alteri, & angulus BFC angulo CGB æqualis, & baſis BC communis, [e] erit triangulum BFC triangulo CGB æquale, & reliqui anguli reliquis alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: ergo & angulus FBC angulo GCB, & BCF ipſi CBG æqualis erit. Et quia totus ABG toti ACF oſtenſus eſt æqnalis, & CBG ipſi BCF, erit ergo & reliquus ABC reliquo ACB ęqualis: & ſunt ad baſim trianguli ABC; oſtenſus eſt autem FBC angulus angulo GCB equalis, & ſunt ſub baſi; Iſoſcelium igitur triangulorum anguli ad baſim ęquales ſunt, &, productis æqualibus lateribus, etiam anguli infra baſim. Quod demonſtrare oportuit.

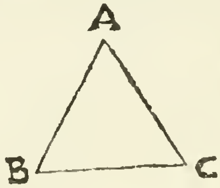
a prop. 3.1.
b poſt. 1.
c prop. 4.1.
d ax. 3.
e prop. 4.1.

§. I.

§. I.

Corollarium geometricum ex Clauio.

Omne triangulum æquilaterum eſt etiam æquiangulum; ſiue, tres anguli cuiuslibet trianguli æquilateri ſunt inter ſe æquales.



QVoniam duo latera AB, AC ſunt æqualia, erunt duo anguli B, & C æquales *(per hanc 5. Eucl.)* Item quia duo latera AB, BC, *ſupponuntur* ęqualia, erunt & anguli C, & A æquales. Quare omnes tres A, B, C æquales erunt. Quod oſtendendum erat.

§. II.

SCHOLION.

Vniuerſalior facta ab antiquis Philoſophis Geometris Eucl. prop. 5. Corollarium de triplici tantum genere linearum ſimilarium. Ariſtotelis de cælo locus propugnatus ex geometricis philoſophationibus circa ſpecies linearum.

1 *GEminus antiquorum Philoſophorum Geometrarum acutiſſimus, vt affirmat Proclus in comm. ad hanc 5 prop. Eucl. & alibi, demonſtrauit iſoſcelium triangulorum angulos æquales eſſe non ſolum ad baſim rectã, (quod Thales primus fecit, à quo Euclides hanc 5 prop. accepit) ſed etiam ad circularem, & ad helicam cilindricam. De circulari facile patebit inferius vbi nos Ariſtot. demonſtrationem afferemus. in §. 4. Ab hoc theoremate ita vniuerſali in iſoſcelibus etiam extra baſes rectas, deduxit Geminus corollarium egregium, nempe, vt ait Proclus :* Hoc Geminus theoremate vtens oſtendit quod tres ſolæ lineæ, & non plures ſimilium partium ſunt, Recta, Circularis, & quæ circa cilindrum deſcribitur Helix. *Quænam vero linea dicenda ſit partium ſimilium, idem Procl. ad Prop. 1.* ſimilium partium linea eſt quæ omnes partes omnibus congruentes habet.

Iſoſcelium anguli æquales ad baſim cũ circularẽ, & helicam cilindricã.

Tres tãtum lineæ ſimiliũ partiũ, Recta, circularis, helica cilindrica.

Rectè igitur Geminus cõcludit ex angulorũ æqualitate ad latera tres illas linearum ſpecies eſſe ſimilium partium. Nam ſi eſſent eæ tres linearum ſpecies partium diſſimilium, facerent cum duabus æqualibus rectis ab vno puncto deductis angulos ad baſim, & inclinationes inæquales, ac diſſimiles ob partes diſſimiliter inter ſe diſpoſitas. Recta verò, ſi recta verè ſit, habet partes ſimiliter inter ſe diſpoſitas in breuiſſimo interuallo inter duo pũcta extrema. Circularis etiam habet partes eiuſdem ſemper ſemidiametri diſtantià inter ſe diſpoſitas.

2 At

Descriptio helicis cilindricæ, & elisio partium in ea similium.

2 *At vero, vt ait Proclus ad Defin. 2. Eucl.* Dum recta linea circa cilindri voluitur superficiem, & signum in ipsa parili celeritate mouetur, fit Helix, hoc est implexa, circumuolutaq; linea, quæ omnes sui partes omnibus secundum partium similitudinem adaptat, vt ostendit Apollonius in libro de Cochlea. Quæ quidem passio ex omnibus helicibus ipsi soli competit. Planæ namq; Helicis partes inter se dissimiles sunt, nec non eius, quæ circa conum, & eius, quæ circa sphæram describitur. Sola autem cilindrica eodem sane modo similiũ partium est, quo etiam recta, circularisq; linea. *Quapropter etiam ipsa facit similes, & æquales angulos, quãdo facta est basis duarum æqualium ab vno puncto, & quasi centro progressarum. Quoniam vero non extat Apollonij liber de Cochleis, sed posthumus Quidubaldi, ex eo fortasse licebit aliquid venari, vnde demonstretur hæc helicis cilindricę proprietas. Tentent quibus librorum, & temporis maior copia est, quam nobis hic nunc.*

Sola helicũ cilindrica vniformis.

Apollonij solum liber de cochleà.

Duæ tantũ species linearũ simplicium. Tria motuũ genera.

3 *At enim Aristoteles lib. de cælo, tex. 5. affirmat duas tantum esse species simplicium linearum, rectam, & circularem, reliquas mixtas. Vnde & tria genera motuum concludit, rectum, circularẽ, mixtum. Igitur Geminus, dum 5 propos. Eucl. vniuersalem facit etiam ad bases non rectas, non rectè demonstrauit ex hac 5 propos. tres esse species linearum similarium, siue simplicium. Facilè tamen conciliantur hi duo Philosophi ex Proclo in cit. comm. ad definitionem 4. Euclid.* Non idem quod similium partium est & quod simplex. Siquidem eorum etiam quæ natura constant similium quidem partium sunt Aurum, & argentum, simplicia autem nequaquam. Cilindricæ vero Helicis mixtionẽ ex simplicibus ipsa quoque generatio manifestat. Oritur enim dum recta quidem linea circa cilindri axem circulariter mouetur, signum vero in ipsa rectà lineà fertur. Duo igitur motus simplices ipsam constituerunt. Quamobrem ex numero mixtarum est linearum, non autem simplicium. Quod enim ex dissimilibus est constitutum simplex nõ est, sed mixtum. Recteq; Geminus cum ex pluribus quidem motibus simplicium quoq; linearum aliquam produci concessisset, non equidem etiam omnem talem mixtam esse concessit; verùm illam, quæ ex dissimilibus oritur motibus. *Paulo post in exemplo de ortu circularis lineæ Proclus (siue qui Proclum vertit è græco) ita loquitur, vt Delio natatore (quod Socrates de Heracliti lib.) sit opus, habeantque etiam non tyrones vbi geometricam intelligentiam exerceant.*

Differentia inter simplicẽ, & inter similarem lineas. Cilindrica helix ex duplici motu; ideo non simplex.

Igitur ad rem nostram. Rectè Aristoteles simplicium linea-

rum

rum duas asserit species, rectam, & circularem: rectè Geminus tres species non simplicium, sed similarium linearum. Ac Helix cilindrica mixta est, quia fit è duobus motibus simplicibus specie distinctis, ex motu rectæ lineæ altero sui extremo, siue puncto, per axem cilindri recto motu progredientis, altero verò extremo per superficiem cilindricam orbicnlariter, & vniformiter oblique se mouentis. Ex recto igitur, & similiter orbiculari oritur, & constat &c.

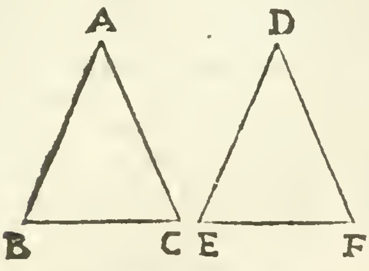
Aristoteles & Geminus conciliati.

§. III.

SCHOLION.

Aliter, ac breuius, & acutè Pappus demonstrat Propositionem 5. Eucl.

Affirmat Proclus à Pappo demonstratam hanc 5. propos. Eucl. ex antecedenti breuiter, & acutè. Ac miror esse eã demonstrationem ab aliquibus aut non animaduersam, aut neglectam. Nos à Proclo indicatam argumentatione apertiori complectemur eo libentius, quod confirmet exemplo magnorum, & antiquiorũ Philosophorum Geometrarum modum demonstrandi vsurpatum in 4. antec. propos. Eucl.



Sint duo triangula isoscelia sub lateribus æqualibus (altero alterius trianguli alteri alterius) comprehendentia angulos ad vertices inter se se æquales ABC, DEF. Dico & angulos ad basim vtriuslibet trianguli esse inter se se æquales. Nam per præcedentem 4 propos. cum angulus A sit angulo D æqualis, & latera AB, AC sint æqualia lateribus DE, DF alterum alteri, ergo & anguli, quibus æqualia latera subtenduntur, erunt æquales, verbi gratia angulus ABC angulo DEF; at eidem DEF est æqualis & angulus ACB (æqualia enim sunt subtensa la-

Acutissima demõstratio Pappi, quæ videtur simplicissima ex 4 propos.

tera AB,DF isoscelium inter se per cõstructionem æquilaterorum) ergo per 1 axioma, anguli ad basim ABC, ACB sunt æquales. &c. Acumen demonstrationis pendet ex ęqualium simul,& isoscelium, quasi alterutrum triãgulum sit duplicatum. Percipe, Tyro, acumen geometricum: plura latent, quam appàreant, contradictione proditura si quis temerè prouocarit ageometricus.

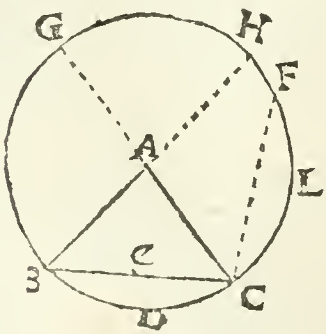
§. IV.

Tertia demonſtratio quintæ propoſ. Eucl. facillima ex primis principijs per ſe notis apud Ariſtotelem; & eius locus Logicus illuſtratus.

Anguli semicirculorũ eiusdem circuli omnes sunt inter se æquales.

1 *SVpponit Aristoteles lib. 1. prior. resolut. cap. 24, eiusdem circuli angulos omnes semicirculorum eiusdem circuli esse æquales. Vide nos ad definit. 17, vbi de diametro bifariante circulum. Si enim diameter est linea diuidens circulum in duas partes æquales, ergo & semiperipheria semiperipheriæ, & area semicircularis areæ semicirculari, & anguli angulis sunt æquales.*

Eiusdẽ segmenti anguli sunt æquales.



Supponit 2 eiusdem segmenti angulos esse ęquales. In figura segmenti CBD anguli EBD, ECD æquales sunt. Cuius rei euidentem ostensionem habere potes per modum, quo Pappus in anteced. probauit hanc 5 prop. Eucl. Si enim ipsi BC ęqualis altera CF subtendatur arcui FLC secto ad interuallum arcùs CDB, æquales rectæ BC, CF, & curuæ BDC, CLF congruent (per abstractionem mentalem superpositę, & quasi complicatæ ad commune punctum C) eritq; æqualis angulus BCD angulo

lo FCL, & angulus B angulo F. & permutatim si superpositi intelligantur BCD ipsi CFL, & B ipsi C, erit angulus BCD angulo CFL, & CBD angulus angulo FCL æqualis. cui FCL cùm, per priorem alteram superpositionem intellectualem, ostensus sit æqualis etiam angulus BCD, ergo eiusdem segmēti CDBE duo anguli EBD, ECD erunt inter se æquales, per 1 axioma. Vtriusque tamen hìc ab Aristotele suppositi demonstratio geometrica etiam ad abundantiā habetur apud Vitellionem lib. 1. prop. 43. Optic.

Vitellio demonstrat geometricē vtrūq; hìc suppositum.

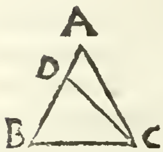
2 *Igitur Aristoteles breuiter sic: Accepto pro semidiametro interuallo vtriuslibet laterum æqualium dati isoscelis ABC, signetur circulus BCHG. Quoniam in eodem circulo semicirculorum anguli GCD, HBD sunt æquales, & segmenti anguli EBD, ECD sunt æquales, si ab æqualibus totalibus ACD, ABD auferantur æquales partiales ECD, EBD, relinquentur ABC, ACB inter se æquales duo anguli ad basim BC isoscelis ABC, per axioma 3. Hinc videas patere ex primis principiis id, quod Geminus ostendisse dicitur de isoscele habente etiam ad basim circularem angulos æquales. Sunt enim eiusdem circuli æquales semicirculorum anguli ACD, ABD, &c.*

Corollariū de angulis isoscelis ad basim circularem æqualibus.

3 *Aristotelis demonstratione sic expositā, docet Philosophus in hoc geometrico exemplo necesse esse vel poni, vel intelligi in recto syllogismo propositiones vniuersales, vt ab vniuersalibus particularia concludātur, & probentur. Si quis .n. assumeret, aut probare se putaret (explico nunc ipsissima verba Philosophi, quod hìc nemo fecit) angulos ABD, ACD esse æquales, & non assumeret vniuersalem propositionē, quod omnes anguli semicirculi (facti in eodē circulo) sunt æquales; itē si assumeret angulos EBD, ECD æquales, & non adderet vniuersalem: anguli eiusdem segmenti sunt æquales; ac præterea inferret ex ablatione angulorum segmenti ab angulis semicirculi relinqui æquales rectilineos ad basim isoscelis, nec adduceret vniuersale principium, & axiom. Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent sunt æqualia, non probaret, nec concluderet, quoniam rationes vniuersales non afferret eorum, quæ affirmat in particulari.*

Propos. VI. Theor. III.

Si trianguli duo anguli æquales fuerint, erunt & latera æquales angulos subtendentia æqualia.



SIt triangulum ABC habens angulum ABC angulo ACB æqualem.. dico & latera AB, AC æqualia esse. Si enim sunt inæqualia, erit alterum maius, sit maius AB.[a] Auferatur à maiore AB, minori AC æqualis DB, ducaturque DC. Cùm ergo DB, AC æquales sint, cōmunis verò BC; erūt duæ DB, BC duabus AC, CB æquales, altera alteri, & angulus DBC æqualis angulo ACB: [b] igitur & basis DC basi AB erit æqualis, & triangulum ABC triãgulo DBC, minus maiori æquale, [c] quod est absurdum; non igitur inæqualis est AB ipsi AC: ergo æqualis. Quare si triãguli duo anguli æquales fuerint, erunt & latera, æquales angulos subtendentia, æqualia. Quod demonstrare oportuit.

a prop. 4. 1.
b prop. 4. 1.
c ax. 9.

§. I.

SCHOLION.

HOc primum exemplum est Geometricæ conuersionis apud Euclidem in hisce elementis. Proclus copiosè, ac doctè, vt solet, hìc de conuersione Geometrica differit; quid sit, quæ vera, quæ falsa sit conuersio, quis eius modus, ac vsus. Nos hinc, vbi alia ad vsum huius 6 propositionis habemus, transferenda censemus aliqua de conuersione ad aliã propositionem conuersam Euclidis, vbi Tyrones minus habeant aliarum opum Geometricarum, vt æquior fiat distributio. Vide igitur inferius vtilia circa conuersiones Geometricas ad 14 propos. Eucl. & relege,

quæ

quæ ad propositionem primam adduximus ex Proclo de deductione ad impossibile, vbi de resolutionibus geometricis.

§. II.

Corollarium ex Clauio.

Omne triangulum æquiangulum, ideſt cuius omnes anguli ſunt æquales, eſt æquilaterum.

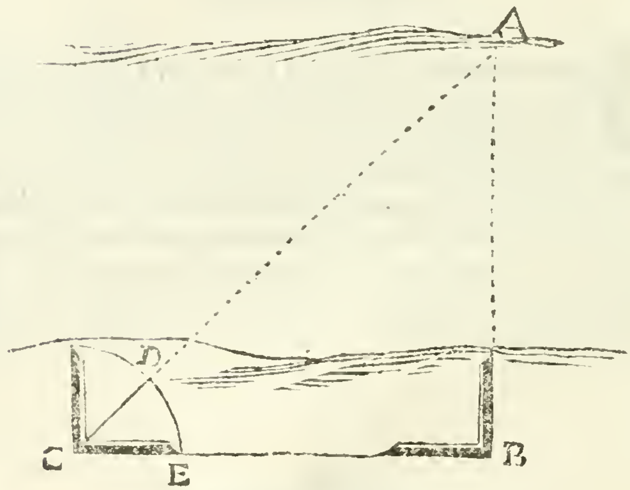
HOc conuerſum eſt corollarij geometrici ex quintà propoſitione Eucl. à Clauio. Inſpice figuram hîc propoſitionis 6 Euclidianæ ABC, & finge tres angulos A, B, C æquales inter ſe. Dico triangulum ABC eſſe æquilaterũ. Cum enim duo anguli B, & C ſint æquales, & latera AB, AC, per hanc 6 propoſ. Eucl. æqualia, & rurſus cum duo anguli A, & B ſupponantur æquales, erunt quoq; latera AC, BC æqualia, per hanc eandem 6, & idcirco omnia ſunt latera AB, BC, AC æqualia. Quod oſtendendum erat.

Ex Apiar. Philos. Math.

§. III.

PROBLEMA, &c.

Vsus 5, & 6 prop. in dimensione inaccessæ distantiæ.



VIde Apiar. 2, Prog. 1, Propos. 6. Inaccessa distantia sit (propter aquas, vel alia impedimenta intercedentia) AB. Secus normæ alterum latus ab angulo B spectato in A. Deinde secede à B donec secus angulum rectum C quadrantis directè spectes ad B, & per D (vbi clauiculus fixus ad dimidium arcus quadrantis) spectes ad A. Tum metire ipsam CB, & habebis dimensionem inaccessæ distantiæ AB. Sunt enim anguli BCA, CAB æquales, ac propterea (ex 5, & 6 prop. Eucl.) isosceles est triangulum ABC, & latera CB, BA æquales angulos subtendentia sunt æqualia.

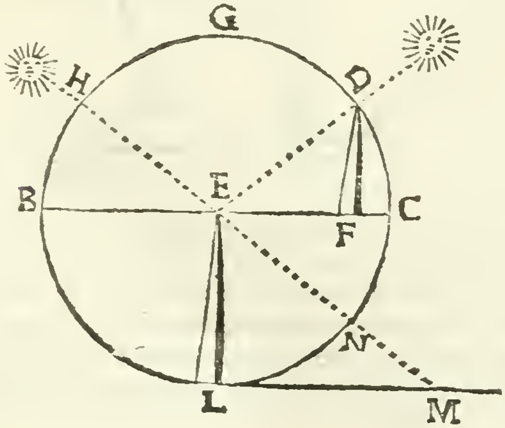
Nam

Nam ſuppoſito (quod ad 32 propoſ. expreſſius videbitur) quod tres anguli trianguli ſunt æquales duobus rectis, cùm angulus normalis B ſit rectus, & angulus DCE acceptus ſit ſemirectus, ex dimidio arcus ſubtendentis rectum in quadrante, igitur & angulus ad A eſt ſemirectus, ac proinde conſtat è 5, & 6. prop. iſoſcelitas trianguli, & æqualitas laterum AB, BC.

§. IV.

PROBLEMA.

Altitudines inacceſſas ex vmbris metiri.



Thales Pyramides Aegyptias ex vmbris metiebatur.

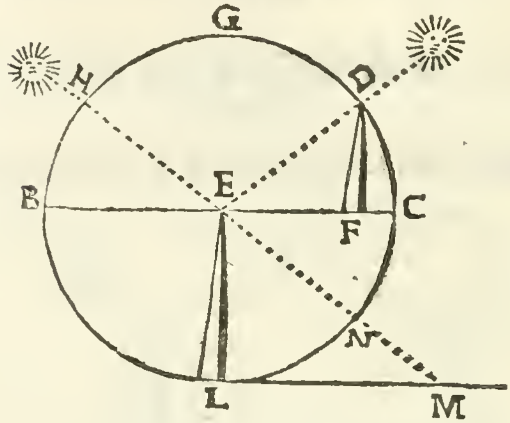
THaletem Philoſophum aiunt metiri ſolitum Aegyptias Pyramides ex earum vmbris. Nempe cum ſolis altitudo eſt grad. 45. Tunc enim vmbræ omnes ſuis gnomonibus ſunt æquales. Quod demonſtratur ex his 5, & 6. propoſ. Eucl. eàdem ratione, quà in antecedenti vſu pro diſtantijs inacceſſis. Cùm ſol ſupra horizontem BC eſt eleuatus ad grad. 45 in D, ideſt ad arcũ C D ſubtẽſum ſemirecto DEC, & ſtylus DF erectus eſt perpendiculariter in F, ergo & angulus EDF eſt ſemirectus æqualis ipſi E, ſuntque per 5, & 6 prop. Eucl. iſoſceles DFE æquales vmbra EF, & ſtylus FD. Vide plura in Ap. 8. Prog. 7. Propoſ. 9.

§. V.

§.V.

Corollarium Gnomonicum.

Ex vmbra altitudo poli in Æquinoctijs.



IN ijs scilicet regionibus, in quibus Aequator eleuatur supra horizontem grad. 45, Aequinoctiorum tempore vmbra styli à sole meridiano æqualis est ipsi stylo, per prædicta. Et complementum eleuationis Aequatoris tunc æquale est eleuationi solis meridianæ, nempe bini arcus semiquadrantis GD, & DC. Ipsi verò GD æqualis est eleuatio BH poli H, iuxta dicta in § 3. ad 4 propos. &c.

§.VI.

Corollarium alterum Gnomonicum.

Stylus in aliquibus horarijs æqualis trium horarum ſpatio pro conſtruendis horarijs vnicà circini diductione, & pro reponendo amiſſo ſtylo.

Vide in Apiar.9, Progym.1, c.3, & 4. & Progym.4, cap. 1. vbi horarium in vno multiplex vniuerſale, & particularia etiã horizontalia conſtruimus vnica circini diductione, quæ ſit ſtyli longitudo (in figurà) LE. Quoniam verò circulo ſolaris curſus DCLBG circa terram E diuiſo in 24 partes, ſiue horas æquales, ſingulis horis adueniunt 15 gradus, quorum 90 ſunt ſinguli quadrãtes prædicti circuli, ſiue curſus ſolaris; cũ ergo ſol aſcenderit in H ad ſpatium trium horarum, tunc eleuatus erit gr.45, & radius ex H incidẽs in ſtyli verticem E proijciet vmbram in Aequinoctialem lineã LM tangentem in L, ſecabitq; arcum LN trium item horarum, & æqualem ipſi BH. Quantum enim Sol in B eleuatur verſus H, tantundem radius proiectus ex E deprimitur verſus N; ac prætereà è ſemicirculis æqualibus BG, HDN ablato communi HDC, remanent æquales ſemiquadrantes BH, CN. &c. Igitur angulus LEN ſemirectus eſt ſubtẽſus arcu ſemiquadrantis LN. Angulus ad L, per conſtructionem ſtyli perpendicularis, & ad tangẽtem, ſupponitur rectus, ergo reliquus angulus LME eſt & ipſe ſemirectus, ergo triangulũ ELM iſoſceles, & æqualia latera EL, LM, per 5, & 6 prop. nempe ſtylus, & ſpatium trium horarum ex L in N proiectarum in planum ad punctum M.

Igitur ſi in linea Aequinoctiali LM vtrimq; productà inuenta fuerint pro horario vniuerſali puncta horarum per vnicam circini diductionem, ſiue per diuiſionẽ circuli DCLBGD factam à ſemidiametro, ſiue ſtylo EL, iuxta ea, quæ docemus in cit. Ap.9. &c. & caſu aliquo amiſſus ſit ſtylus erigendus in L, accipe ſpatium ex L ad

punctum tertiæ lineæ in M, & habebis amissi styli longitudinē geometricè, ac demonstratiuè repositam.

§.VII.

SCHOLION.

De fallacijs ab vmbrà in prædictis vsibus, & excusatæ veterum discrepantiæ.

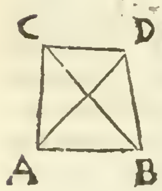
CAeterū caue, Tyro, ne te fallant vmbrarū varietates, quas nos à refractionibus prodire, ac modos eas corrigendi docuimus. Vide Apiarium nostrum 8, ac præsertim Progym. 5, propos 9, & 10, vbi veras vmbrarum æqualitates cum gnomonibus venamur.

Sine nostris ijs correctionibus fieri arbitror, vt inter veteres aliqua dissensio reperiatur, iuxta ea, quæ doctissimus Ioannes de Roias in suo Planisphærio, lib. 4, cap. 6 sic scribit. Strabo cap. 24, lib. 2 Geogr. in Æquinoctio apud Carthaginem gnomonem 11, vmbram verò 7 partium constituit. Contra Plinius lib. 6, cap. vlt. Gnomonem 7, vmbram 4, &c. Rursus Vitruuius lib. 9, cap. 8. cui etiam Plinij calculus suffragatur, gnomonem partium 9 Romæ 8 tantū vmbræ projcere affirmat: cùm tamen Strabo non id exactè Romæ, sed inter Romam, Neapolimq; accidere testetur. &c. *Vide ibi plura apud eundem Roiam in excusationem veterum Astronomorum. Nos tamen eas varietates conijcimus in vapores, quibus aliquando vel minus, vel magis aër inficitur, fiuntq; ex variâ per eos vapores solarium radiorum refractione varietates etiam in vmbris gnomonum, vt docuimus in cit. nostro Ap. 8.*

Pro-

Propos. VII. Theor. IV.

Super eadem recta linea duabus rectis lineis aliæ duæ rectæ æquales altera alteri non cõstituentur ad aliud, atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque cum primò ductis terminos habentes.



SI enim fieri potest constituantur super eadẽ recta linea AB duabus rectis AC, CB duę alię AD, DB æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum C, & D, ad easdem partes C, D, eosdem terminos habentes A, B, quos primæ: ita, vt CA ipsi DA, eundem cum ipsa terminum A habens, CB verò ipsi DB, eundem cum illa terminum B, sit æqualis, & ducatur CD. Cum ergo AC sit æqualis ipsi AD, [a] erit & angulus ACD æqualis angulo ADC: maior ergo est ADC angulus angulo DCB: multo ergo maior CDB. Rursus cum CB æqualis sit ipsi DB, erit & angulus CDB angulo DCB æqualis: ostensus autem est multo illo maior. [b] Quod fieri non potest. Nõ igitur super eadem recta linea duabus rectis lineis aliæ duæ rectæ æquales, altera alteri constituẽtur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem cum primò ductis terminos habentes. Quod demonstrare oportuit.

a prop. 5. 1.

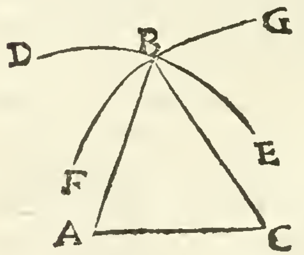
b ax. 9.

§. I.

SCHOLION.

Indicata facillima, & breuissima demonstratio propositionis septimæ Euclideæ, aliter quàm ab Euclide.

Solet hæc 7 Euclidis propositio negotium facessere Tyronibus nondum versatis in acutis abstractionibus, & illationibus Geometricis. Ex Petro Antonio Cattaldo Mathematicarum scientiarum olim Perusij, ac Bononiæ publico Lectore paucis expedio Demonstrationem facilem huius proposit. 7. Interuallis AB, CB ducantur circulorum arcus DE, FG. Semidiametri AB, CB non possunt concurrere ad mutuam sectionem circulorũ nisi in B, à quo pũcto interualla earum semidiametrorum sumpta sunt; ergo, &c. iuxta verba propositionis Eucl. &c. Satis est indicare quæ Doctor Geometricus pluribus deinde voce explicet, & cõfirmet Tyronibus auditoribus.



Vide inferius § 2, & Scholion ad 22 propos. vbi huius septimæ propositionis praxis est, qua confirmatur demõstratio hac Cataldi.

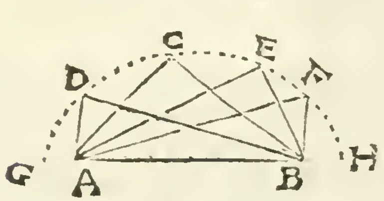
§. II.

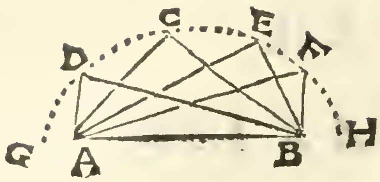
PRAXIS.

Ex fallacia 7 propoſ. Eucl. deſcribendi ellipſim ad vſus eximios.

V*Ide nos in Apiar.10, Progym.2.præſertim corollariũ 2. poſt propoſit.6. Vnde hic aliqua:* Cautè dixit Geometra: altera alteri: Nã duæ lineæ, ſiue duo triãguli latera ſimul ſumpta æqualia duobus lateribus ſimul ſumptis ſuper eàdem baſi conſtitui, ac deduci poſſunt ad eaſdẽ partes ad alia, atq; alia puncta; ſed hoc nõ quærit Geometra. Quærit enim vt non ſolum duæ duabus, ſed vtraq; vtrique linea, ſiue altera alteri, verb. gra. dextera dexteræ, ſiniſtra ſiniſtræ ſint æquales. Quales ſi fuerint, non poterunt ſuper eadem baſi ab ijſdem terminis adduci niſi ad vnum, & idem punctum.

Si quis ergo ſophiſta per cauillum, & fallaciam Tyroni Geometræ velit imponere, ac ſuper eadem baſi ab ijſdẽ terminis duas duabus lineis æquales, ſiue eàdem triãguli latera inæqualiter ſucceſſiuè ſecta deducat ad aliud, atq; aliud punctum, velit, nolit, docebit ex deprauato ſeptimæ propoſitionis vſu pulcherrimam conicam ſectionem, hoc eſt ellipſim deſcribere. *Nam ſi velis ad vſum organicum, & praxim traducere propoſitionem 32. lib.3. con. Apollonij, ſiue malis ex noſtro inuento abuti hac 7. Euclidis propoſitione, ſic age. Finge ipſam AB eſſe baſim, ſuper qua ſit excitatum triangulum ACB. Accipe filum iſoperimetrum, idest æqualis longitudinis ipſis lateribus AC, CB, cuius fili extrema figantur in A, & in B, deinde ſtylo, ſeu graphio interpoſito ita filum adducito in C, vt congruat duobus lateribus AC, CB. Mox eodem graphio idem filum*





filum circumducito in D, in E, in F supra, & infra basim AB. Quo facto veram ellipsim, siue vt vulgo vocant, ouiformem figuram descripseris iuxta ea, quæ demonstrãtur à cit. Apollonio, atq; etiam à nobis in cit. Ap. 10. corollar. 1, post proposit. 6, vbi ostendimus isoperimetrorum triangulorum communem basim habentium vertices, vt ipsorum ABD, ABC, ABE, ABF vertices D, C, E, F, &c. in diuersa deductos esse in ellipsi.

Sunt quidem iuxta Eucl. hanc 7. propos. super eàdem AB, & ab ijsdem terminis A, & B duæ AD, DB duabus AC, CB, &c. æquales, sed non altera alteri, &c. Quà conditione deficiente, fit paralogismus, & abusus 7 propos. qui tamen abusus in vsum singularem conicæ sectionis ellipticæ describẽdæ concedit; immò & in plures alios eximios ad vstiones, ad auditiones, &c. quos vide in cit. Ap. 10, Progym. 2. &c.

§. III.

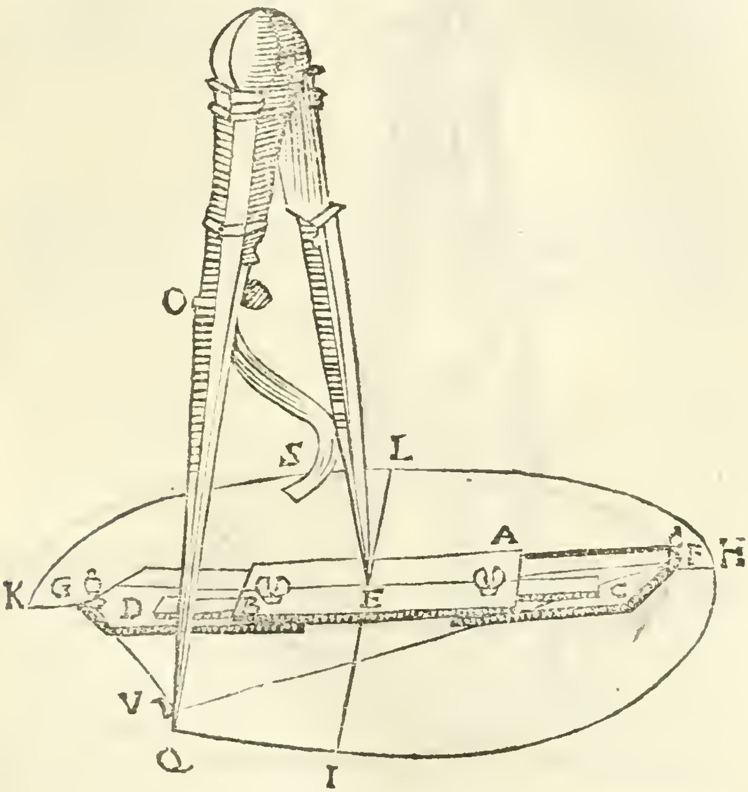
PRAXIS in

Circini constructione, & vsus, quo ellipsis describitur ex abusu 7 propos. Eucl.

QVemadmodum circino vsitato demonstrationem septimæ huiusce propositionis expediuimus in § 1, ita in hoc § 3 circino inusitato abusum eiusdem propositionis perutilem in ellipsis descriptione prodemus, ne desint geometricis tyronibus condimenta, quibus molestiam leniant, quam (vt eorum aliquibus accidere solet) patiãtur in demonstratione, & vsibus septimæ huiusce propositionis. Circini ergo hic apponendi inuentionem, descriptionem, & vsum accipe à nostro Aguillonio in Lemm. lib. 6 Opticorum, ipsius verbis: Nos circinum aliquando construximus, cuius vna circulatione ellipsis egregiè describebatur

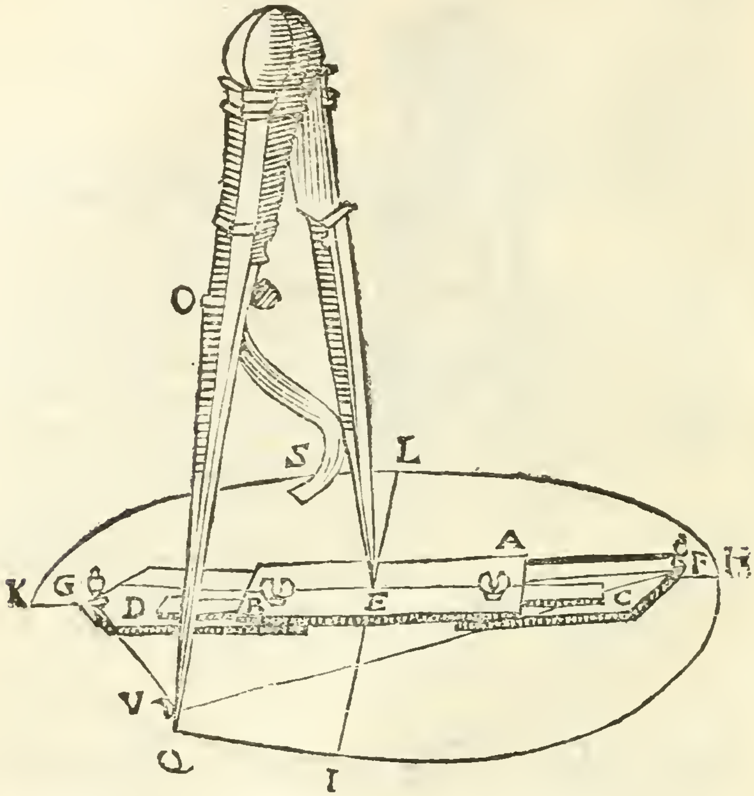
altero

altero crure quiescente, atq; in centro ellipsis defixo. Cuius schema hoc loco adiungere placuit, quod ex Apollonij demonstratione (a nobis cit. § 2.) pendeat. Fabricetur regula AB oblonga, atq;



rectangula ex orichalco, aut aliâ materiâ solidâ, in cuius medio signetur punctum E, quod centro respondeat futuræ ellipsis, secundum longitudinem vero canalem subtus habeat excauatum, per quem cursores duo C, & D liberè moueantur. Sitq; is in imo latior paululum, quàm in summo, vt cursores, vbi opus erit, cochleolis astringi possint. Habeant etiam dicti cursores in extremitatibus clauiculos F, & G aliquantulum incisos, vt circumiectum filum circini ductu à proprio loco non dimoueatur. Circinus quoque comparetur à vulgari haud multum distans, nisi his tantum: primo vt caput remissius sit, ac minus, quàm in alijs solet, firmiter astrictũ; deinde vt alteri cruri intus affixa sit tensilis lamina ex chalybe

lybe leuiter temperato, quæ circini compreſſione vltra ſtatum coa-
cta proprio reniſu alterum crus in aduerſam partem diuellat, cuius
modi hoc loco ſignatur literis OS, ad O quidem circino adhære-



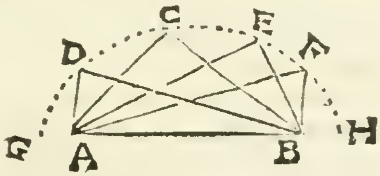
ſcens, parte vero S alterum crus premens. Deniq; idem circinus ad mobilis cruris extremitatem habeat extantem lunulam notatam litera V, quæ filum excipiat, contineatq; ne, quam par eſt, liberius euagetur.

Hoc organo ſi circum extremas diametros HK quidem maximam, IL verò minimam ellipſis vno ductu decircinanda ſit, inueniantur primum loca clauiculorum F, & G modo ſuperius explicato: deinde curſores pari interuallo ab E dimoueantur, donec ipſorum clauiculi diſtantiam capiant lineæ FG: tum filum his circũponatur, quod duplicatum infraſcriptis extremitatibus æquale ſit alteri linearum FK, vel GH, vnoq; circini pede in E defixo, altero autem

autem nonnihil compresso, filum intra lunulæ V sinum excipiatur. Hoc porro pes circumactus mucrone Q ellipsin describet, vt prius: nam lamina OS mobile quidem crus circini assiduè premens à centro propellit, at filum renitens intra ellipseos fines coercet, nec longius abire permittit. *Hæc ergo fabrica, & vsus sunt circini abutentis hac 7 propositione Euclidis ita, vt quasi potior in rem geometricam videatur abusus, quàm vsus huius 7 prop.*

SCHOLIA.

1 P*Otest hac 7 propos. traduci ad plura alia de isoperimetris triangulis, & ad eam plura ex isoperimetris. De quibus Theon antiquus Geometra. Ingeniosus doctor Geometra poterit inde aliqua condimenta tyronibus prælibare.*



2 *Quoniam excedunt elementarem institutionem geometricam ea, quæ demonstrat Apollonius cit. de ellipsi, propterea hic omittimus. Demonstrat enim in sectione conicâ ellipticâ lineas omnes AD, BD; AC, BC; AE, BE; AF, BF ductas à punctis ex comparatione A, & B in ellipsi esse æquales axi maiori, hoc est rectæ AB protractæ in G, & H.*

§. IV.

Theorema Astronomicum è 7 prop. Eucl.

Nempe: *tres eclypses fieri non possunt paribus temporis interuallis inter se distantes,* iuxta antiquorum placita, & loca indicata, & elustrata.

Septima Eucl. demonstratio vtilis Astronomiæ.

P*Roclus in Com. ad sequentem octauam propositionem Eucl. habet quæ pertineant ad hanc 7.* Septimum theorema Euclidis demomonstratum ijs, qui astronomicarum rerũ periti sunt, eo in loco vbi de solis, lunæq; defectibus habetur sermo, maximam affert vtilitatem. hoc enim aiũt vtentes ostendisse, quia tres consequenter defectus æquali spatio ab inuicem distantes nequaquã fient. Dico autem vt secundus tanto spatio distet à primo, quanto tertius à secundo. Exempli gratia, si post primum secundus sex mensibus, vigintiq; diebus elapsis factus fuit, tertium vtiq; post secundum tanto temporis spatio minimè factum esse, verum aut maiori, aut minori. Hoc autem sic se habere per septimum Theorema demonstrari. *Huius loci ex Proclo citati cum annis minimùm quindecim ante hunc, in quo hæc scribo, per literas elucidationem, atque applicationem ad 7 propositionem Euclidis clarissimo, & in omni genere Philosophiæ doctissimo viro, perillustri Equiti Scipioni Claremontio proposuissem, remisit ille vberem, & eruditam astronomicam geometricè confirmatam dissertationem, quam, quia & excedit intelligentiã tyronis Geometrici, & speramus ab Authore publicæ luci cum alijs elucubrationibus exponendam, ideo nos hìc tanquam alieni iuris intactam relinquimus. Interim quantum coniectari licet, arbitror antiquos ex hac 7 demonstraße id, quod asserit Proclus de ecclypsibus, deducendo ad absurdum contra hìc demonstrata ab Euclide.*

Ratio cur disparibus interuallis contingant eclypses lunares.

Martianus lib. 8. vbi de defectu Lunæ, rationem astronomicam affert à vago Lunæ cursu per Zodiaci latitudinem, &c. sic:

De-

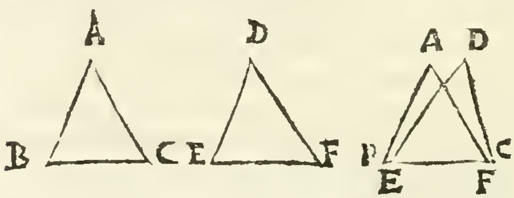
Deniq; ideo intra sex menses defectus non poterunt iterare, quia: aut decima quinta, aut prima in eàdem solis lineà per 12 partium latitudinem spatiatur. Deinde non poterit inueniri, &c. *Vide id caput. Hic tantum indicantur nunc Tyronibus condimenta alibi suo loco, ac tempore laxius, & lentius degustanda.*

SCHOLION.

QVi, iuxta indicata ex Antiquis Philosophis in anteced. § 4, in Astronomicis prædictionibus circa affectiones cælestium luminariũ geometricè, quà licet, versantur, solidè, ac syncerè de Astronomicis philosophantur. At qui è cælestibus luminaribus futura circa res humani arbitrij, & euentus arcanè à Deo pendentes pronuntiant, ij astrologantur, & publico malo nugantur. De quibus merito Valerius Maximus lib. 1. cap. 4. Caius Cornelius Hispalus Prætor peregrinus, M. Pompilio Lenate, L. Calpurnio COSS. edicto Chaldæos intra decimũ diem abire ex Vrbe, atq; Italia iussit: leuibus, & ineptis ingenijs fallaci syderum interpretatione quæstuosam mendacijs suis caliginem inijcientes.

Propos. VIII. Theor. V.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, habuerint verò & basim basi æqualem, habebunt quoque angulum æqualibus lateribus contentum angulo æqualem.



SInt duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duo latera AB, AC duobus DE, DF æqualia, alterum alteri, nẽpe AB ipsi DE, & AC ipsi DF; habeant quoque bases BC, EF æquales. Dico quod & angulus BAC angulo EDF sit æqualis. Congruente enim triãgulo ABC triangulo DEF, positoque B super E, & recta BC super EF;[a] congruet & C ipsi F, quod BC, EF æquales sint. Congruente igitur ipsa BC ipsi EF, congruent & BA, CA ipsis ED, DF. Quod si congruat quidem basis BC basi EF, at BA, AC latera ipsis ED, DF non congruant, sed aliò cadant, vt sunt ED, DF,[b] constituentur super eadem recta duabus rectis aliæ duæ rectæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem terminos habentes. At non constituuntur. Non ergo congruente basi BC basi EF, non congruent BA, AC latera ipsis ED, DF: congruent ergo. quare & angulus BAC angulo EDF congruet, eique æqualis erit. Si ergo duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habuerint verò & basim basi æqualem, habebunt quoque angulum æqualibus lateribus contentum angulo æqualem. Quod oportuit demonstrare.

a ax 8.

b prop. 7. 1.

§. I.

§. I.

Corollarium ex Clauio.

EX antecedente hac 8 proposit. non solum colligi potest angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiã reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumq; vtrique, vt *(in figura Eucl.)* angulum B angulo E, & angulum C angulo F, immo totum triangulũ toti triangulo, vt constat ex eãdem superpositione *(intellectuali &c.)* vnius trianguli super alterum. nam sibi mutuò congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est.

Omnes anguli, & totũ triangulũ toti æqualia sunt in 8. Eucl.

Quod etiam ex 4 propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoq; sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propositione 4 demonstratum est.

§. II.

SCHOLION.

Etiam sine geometrica demonstratione patere potest propositio 8 Eucl.

PRoclus *in fine com. ad hanc rectè sic philosophatur:* Videtur autem verticalium angulorum æqualitatem laterũ illos angulos comprehendentium, basiumq; equalitas efficere. Neq; enim basibus inæqualibus existentibus, iidem anguli manent comprehendentibus lateribus æqualibus suppositis, verum dum basis minor est, angulus simul diminuitur, & dum crescit illa angulus quoque vnà crescit. Neque iisdem basibus existentibus, lateribus autem inæqualibus euadentibus, angulus manet,

net, verum dum quidem imminuuntur, augetur, dum vero augentur, imminuitur. Contrariam enim pasſionem anguli, lateraq; illos comprehendentia patiuntur. Etenim ſi in eàdem baſi latera in inferiorem partem deſcendere intelligas, ipſa quidem diminuis, angulum autem ab ipſis comprehenſum auges, maioremq; ipſorũ ab inuicem diſtantiam efficis. Si autem in altum ferri, additamentumq; ſuſcipere, angulum quem continent, diminuis. Coincidunt ſiquidem remotius, vertice ipſorum magis remoto à baſi facto. Certum igitur eſt dicere, quod & baſis eadem exiſtens, & latera æqualia exiſtentia ipſius anguli æqualitatem determinant. *Confirmantur hìc dicta à Proclo ex 21 propoſitione, de qua inferius.*

§. III.

Vſus optici, & Geometrici octauæ, ac etiam quartæ propoſitionum indicati.

VIde nos in Apiar. 5, Progym. 1, cap. 7, num. 2, & Progym. 2, cap. 1, num. 5, & 7. vbi docemus, ac demonſtramus ex 8 prop. Eucl. modum, quo imagines ignotæ, ac deformatæ videri poſſint, tum aſpectu directo per feneſtellas, tum reflexo per ſpecula ſub eodem angulo optico, ſub quo viderentur ſi non eſſent deformatæ, ob triangula æqualium inter ſe laterum, & æqualium angulorum, &c. Ibi plura cum ſuis figuris, & demonſtrationibus ad vſus iucundos, & arcanos in Opticis. Videbis mox etiam ad propoſitiones 9, 10, 11, 12, & ad alias quam crebri vſus ſint 8 hæc, & 4 e præcedentibus propoſitiones, vt diſcas axioma geometricum de æqualium cõgruentia & magnifaciendum, & omni ope firmandum tamquam vnum è præcipuis fundamentis Geometricæ Philoſophiæ.

§. IV.

§. IV.

SCHOLION.

De affirmatiua demonstratione 8 propos.

HAbes eam apud Proclum in comm. ad hoc Eucl. theorema. Quam Clauius exponit in Schol. ad hanc 8. Ab eo præuenti sumus: vide eam apud eum. Nostrum institutum est non tam persequi varios modos (quæ tamen res vtilissima est ad habitum comparandum geometricè demonstrãdi) demonstrandi eamdem Eucl. propositionem, quàm vsibus applicãdi, atq; ornandi.

Propos. IX. Probl. IV.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.



SIt datus angulus rectilineus BAC, quem oporteat bifariam secare. Accipiatur quoduis punctum D. Atque ex AC ipsi AD æqualis auferatur AE: & super ductã DE,[a] cõstituatur triãgulum æquilaterum DEF, & iungatur AF. Dico angulum BAC recta AF bifariã secari. Cum enim AD, AE æquales sint, communis AF; erunt duę DA, AF duabus EA, AF æquales, altera alteri, est verò & basis DF basi EF æqualis, ergo & angulus DAF angulo EAF æqualis erit. Datus ergo angulus rectilineus BAC à recta AF bifariam secatur. quod facere oportuit.

a prop. 3. 1.
b prop. 1. 1.
c prop. 8. 1.

§. I.

§. I.

SCHOLION.

Eruditiones Geometricæ, quibus ad hanc 9 propoſ. oſtenditur aliqua in Philoſophia Geometricà videri extra vires humani ingenij.

Non omnes angulos bifariam elementa.

Angulum cornicularē quis bifariet?

Rectus angulus in tres partes æquales diuiditur, ex coroll. prop. 32.

Rectilineū angulū trifariarunt aliqui olim per mixtas lineas.

P*Roclus (ex quo etiam Commandinus, omiſſis aliquibus:)* Angulus hoc loco ſpecie datur, quippe qui rectilineus ſit, & non quilibet. Namque angulum omnem bifariam ſecare ex elementari inſtitutione non licet; quandoquidem ambiguum etiam eſt num omnis angulus bifariam ſecari poſſit. Fortaſſe enim dubites vtrum poſſibile ſit cornicularem angulum bifariam ſecare. Sectionis autem ratio non ab re diſtincta fuit, in quamlibet enim proportionem ſecare præſentem conſtructionem tranſgreditur, verbi gratia, in tres, vel quatuor, vel quinque partes æquales. Nam rectum quidem angulum trifariam ſecare poſſumus paucis eorum, quæ poſterius tradentur, vtentes: (*vide nos ad 32 propoſ. ex Vitellione*) acutum verò minimè, niſi ad alias lineas, quæ mixtæ ſunt, tranſcendamus. Datum enim angulum rectilineum trifariam ſecare docuit Nicomedes ex conchoidibus, alij vero ex alijs lineis idem fecerunt, nimirum ijs, quæ à Græcis τετραγωνίζουσαι dicuntur, nos quadrantes *(ſiue quadratrices)* appellare poſſumus. Alij ex lineis conicis, vt Pappus tradit in 4 lib. collectionum Mathematicarum. Alij deniq; ex lineis ſpiralibus, de quibus Archimedes, incitati in datam proportionem datum angulum rectilineum ſecuerunt. Quorum cõtemplationes cùm difficiles ſint, præſertim ijs, qui inſtituuntur, in præſentia omittuntur. *Ad praxim aliquam geometricam diuidendi datum angulum in datam proportionem (præter neotericos commentatores Archimedis poſt propoſ. 29 de ſpiralibus) vide ex Antiquis Pappum lib. 4 prop. 35 dupliciter, & prop. 32.*

Sunt

Sunt in Geometricà Philoſophià, præter indicata à Proclo ex occaſione huius 9 propoſ. aliqua alia problemata, quibus geometricè demonſtrandis, ac ſoluendis adhuc per tot ſæcula pares nondum fuerunt ingeniorum Phœnices, licet ea ſoluere tentarint (ſed non perfectè) ope difficiliorum aliquarum mixtarum linearum. Eiuſmodi problematum aliqua ſunt: In circulo heptagonum regulare, atq; alias omnes figuras regulares inſcribere: Circulari peripheriæ rectam æqualem deſignare: circulum quadrare: cubum duplicare: duas medias proportionales demonſtratiuè geometricè inuenire: & ſi quæ alia. En hìc habent qui Geometricam Philoſophiã, & Mathematicas ſcientias quaſi pueriles, aut pueris aptas, & virilibus ingenijs inferiores exiſtimant, vbi vires ingeniorum ſuorum exerceant. ἰδοὺ ῥόδος ἰδοὺ καὶ τὸ πήδημα: en Rodus, en ſaltus, *iuxta paræmiam ab Aeſopico Apologo de eo qui ſe iactabat Rhodi ſaltum ſaltaſſe, quem nemo alius. Ex occaſione 9 huius propoſitionis diuidant, ac geometricè demonſtrent Geometricæ Philoſophiæ vituatores datum quemlibet angulum rectilineum in tres, in ſeptem, in quotlibet æquales partes. At enim tanti non eſt. Immo verò tanti eſt vt ageometrici Thraſones faſces ſubmittant, ac ſuſpiciant apicem tam ſubtilis, ac miræ Philoſophiæ.*

Exempla aliqua problematum indemonſtratorum in Geometria.

Nolent ageometrici contemptores vbi faſtum atterant.

In tenui labor, at tenuis non gloria, ſi quem
Numina læua ſinunt, auditq; vocatus Apollo.

vt cecinit in Georg. Virgilius.

SCHOLION.

QVòd affirmat Proclus à Nicomede tripartitum angulum rectilineum ex conchoidibus, apud veteres non extat. Nos ad prop. 32, § 11 apud neotericum oſtendemus facillimum modum ex conchili Nicomedis. Atque hìc etiam inferius è circino proportionum § 8, non ſolum in tres, ſed in quotlibet partes æquales datum angulum diuidimus.

§. II.

PRAXES

Facile diuidendi angulum rectum, siue lineæ circularis quadrantem in partes æquales ad vsus Gnomonicos.

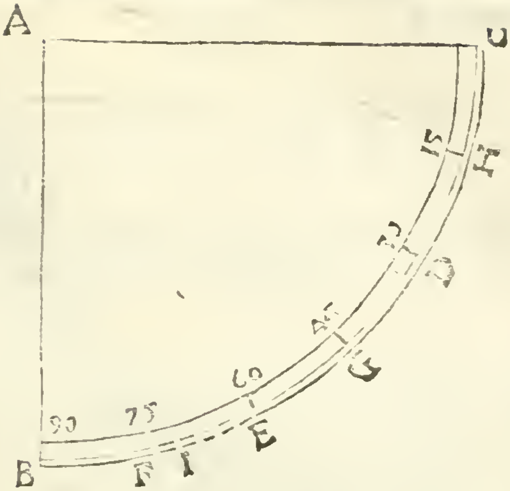
QVemadmodum Euclides in sequēti propositione diuidit, ac bifariat lineam rectam, ita in hac sub āguli bifariatione diuisio fit arcus, siue lineæ circularis angulū subtendētis. Inferius videbis in corollar. è 15 prop. lib. 1, & in schol. ad prop. 27 lib. 3, ad vnum punctum fieri quatuor rectis æquales angulos, & diametris se se per cētrū ad rectos angulos decussantibus, rectum angulū subtendi à quarta parte peripheriæ. &c.

1 Igitur pro Gnomonicis vsibus quadrantem, siue angulū rectū diuisuri facile id, ac demōstratiue faciemus per vnicam trifariationem, & per duas, vel tres bifariationes. Nam cùm Philosophi Gnomonici totum circulum solaris motùs diurni, ac nocturni circa terram diuidant in 24 partes æquales, quas horas appellant, erit quadrantis angulus rectus diuidēdus primò in tres partes (siue horas) æquales, iuxta ea, quæ inferius demōstrata habebis in vltimo scholio ad 32; vel aliter etiam hìc nunc, arcus quadrantis subtensus angulo recto erit in tres partes diuidendus in modum sequentem.

2 Interuallo semidiametri AB quadrātis BC, arcus ex B secetur in D, ex C in E, ac erunt BE, ED, DC tres partes æquales. Nam, vt videbis in coroll. è prop. 15. lib. 4, semidiameter subtēdit sextam partē peripheriæ, hoc est spatium 4 horarum apud Gnomonicos. Ergo cùm BD sit spatiū 4 horarū, erit reliqua pars DC ad cōplementum quadrantis spatium duarum horarum, eodemque modo, sumpto spatio CE 4 hor. erit EB duarum horarum. &c.

Deinde ex hac 9 propos. ac per praxes, quas hìc inferius trademus, bifarientur eàdem circini diductione, ac signentur singula-

tria



triæ spatia BE in F, ED in G, DC in H, eruntq; horæ binæ diuisæ in singulas. Quarum spatia si rursus eàdem circini diductione bifarientur, habebis semisses horarum, & his bifariatis, quadrantes, &c.

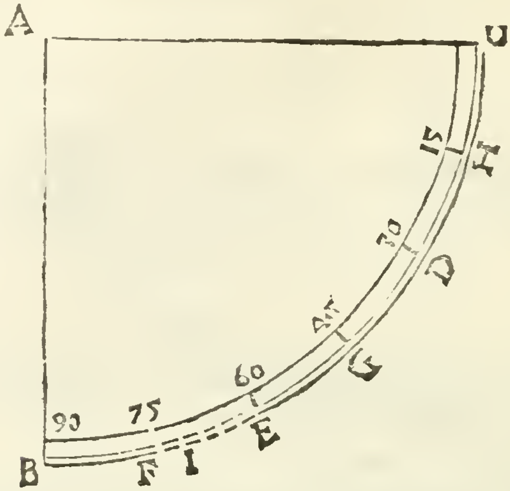
Huius gnomonicæ diuisionis factæ in angulo recto vsus est ad signanda puncta in æquinoctiali lineà pro horis, semissibus, quadrantibus, &c. iuxta indicata superius in § 6 ad 6 prop. & iuxta ea, quę docemus in Ap. 5. ibi citato.

§. III.
PRAXIS

Diuidendi angulum rectum, siue quadrantem in partes æquales ad vsus Astronomicos.

Astronomi quemadmodum diuidunt totam circuli peripheriã in gradus, siue partes æquales 360, ita quadrantem, siue angulum rectum diuidunt in 90 gradus. Singuli verò gradus subdiuiduntur in 60 minuta prima, & hæc rursus in 60 min. secunda, ac deinceps per diuisionem tertiorũ,

quartorum,&c. vsq; ad diuisionem noni minuti in 60 decima,&c. Vide inferius § 6.



Ingeniosa geometrica diuisio in circulo per inscriptionem pentagoni facillimam ex Ptolomæo.

1 *Igitur vt diuidatur facilè,ac demõstratiuè quãtũ licet,angulus rectus in 90 partes æquales, sit iã diuisus ex praxi anteccdẽti gnomonicâ in sex arcus æquales, quorum singuli continent 15 gradus. Deinde facienda est diuisio singulorum arcuum BF, FE, &c. in 5 partes æquales ita, vt, diuiso, verbi gratia, arcu FE in quinq; arcellos minores æquales, arcellus vnus, verb. gr. FI contineat 3 gradus. Quæ diuisio ingeniosè,ac geometricè fit per inscriptionem pẽtagoni regularis in circulo, vel iuxta modũ Euclidis ĩn lib. 4, propos. 10, & 11, vel iuxta breuiorem, ac faciliorem Ptolomæi lib. 1. magnæ constructionis. Cuius praxim, & demonstrationem habebis à nobis in fine lib. 6 Eucl. in vsibus propos. 10 ex lib. 13.*

2 *Hic interim, ne tyrones implicemus, vtantur praxi physicà, quam affert Clauius in schol. ad hanc 9, dum docet angulum rectilineum diuidere tentando in 5 partes æquales, sitq; diuisus verb. gr. arcus FE, ac sit FI vna quinta, quæ continebit tres gradus. Deniq; FI diuidatur in 3, & totus angulus rectus A erit diuisus in 90 partes æquales, siue quadrantis arcus BC, quod idem est. Expeditiores diuisiones anguli recti, siue quadrantis vide paullo post è circino proportionum.*

§. IV.

§. IV.

SCHOLION,

In quo demonstratio præcedentis diuisionis astronomicæ indicata.

DVctis enim rectis lineis à singulis 90 diuisionibus ad A, quoniam eæ omnes sunt inter se æquales semidiametri eiusdem circuli, & bases singulæ (rectæ scilicet subtensæ singulis arcellis graduum æqualium) sunt æquales, ergo erunt totidem triangula inter se æqualia, per 8 propos. ac proinde anguli omnes ad A æquales. &c.

Vide ad seq. propos. 10 Eucl. diuisionem quadrantis, seu lineæ circularis paradoxicam vnà cum paradoxica diuisione lineæ rectæ, ac in vsum diuisionum valde minutarum.

§.V.

SCHOLION.

De quantitate astronomicà, & gnomonicà angulorum.

IGitur apud Astronomos, & Gnomonicos angulorum quantitas desumitur à numero graduum, ac minutorum in arcu subtēso. Ac tres anguli trianguli, qui æquales sunt 2 rectis, continēt gradus 180. velut rectus 90, semirectus 45, &c. Angulus vnius horæ est grad. [illegible]. &c. Vtunturq; Astronomi, & Gnomonici ijs gradibus, & angulorum quantitatibus in suis demonstrationibus circa præclarissima theoremata, & problemata, vt videbis cum earum scientiarum adyta penetrabis.

§.VI.

§. VI.
SCHOLION.

Cur Astronomi circulum, siue circuli ad centrum quatuor angulos rectos in grad 360, & gradus ipsos in minuta 60 potius, quàm in alium numerum diuiserint.

Diuisiones circuli variæ olim.

Numeri 360 & 60 habẽt plurimas partes aliquotas, sine fractionib.

VIde cap. 10, & 11. lib. 1 Almagesti Ptolomæi. A quo arbitrantur aliqui primo circulum, atq; adeo circuli quatuor ad centrum angulos rectos (vt videbis ad prop. 15 infer.) diuisos fuisse in partes æquales, siue gradus 360. Ante Ptolomæũ Eratosthenes, & Hipparchus visi sunt contenti diuisione circuli in partes 83. Porro Astronomi posteriores in minutiore circuli, & graduum diuisione vsi sunt libenter numero 360, & 60 propter cõmoditatem diuisionũ, & numerationum per integros numeros, sine implicationibus numerorum fractorum. Habẽt enim numeri 360, & 60 plurimas partes aliquotas, in quas diuiduntur. Nam 60 bifariatur per 30, trifariatur per 20, quadrifariatur per 15, quintam habet partem 12, sextam 10. Numerus verò 360 habet bifariationem à 180, trifariationem à 120, quadrifariationem a 90 (qui numerus angulum rectum ad centrum quadrante subtendit) habet quintam partem 72, sextam 60, octauam 45, nonam 40, decimam 36, duodecimam 30, decimam quintam 24, decimamoctauam 20.

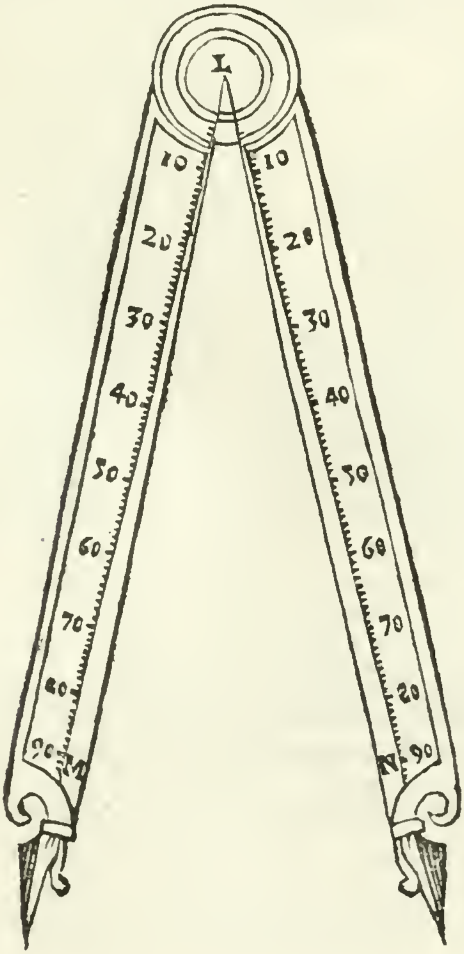
§ VII.
SCHOLION,

in quo supposita, & indicata apud nos constructio circini proportionum ad vsum diuisionis angulorum.

SI gradus 90 alicuius quadrantis in rectã lineam semel transtuleris, erit, vt videbis paullo post, paratum instrumentum ad diuisionem cuiuscumq; anguli rectilinei in quotlibet

bet

bet partes æquales. Fit autem ea graduum translatio eo modo, quem habes apud nos in initio Apiar. 12. Illuc vise quod hic supponimus, & tantum indicamus, ne factum faciamus hic. Demonstrationē vniuersalem pro omnibus operationibus circini proportionū videbis suo loco in applicatione ad 4 propos. lib. 6. Euclid. Hic interim eius circini altera facies hæc est, quā hic tibi, mi Tyro, exhibemus, in qua facie diuisio vtriusq; lineæ MLN facta est ex translatione arcuum 90 æqualium vnius quadrantis in totidē 90 rectas partes (quas chordas appellāt, & quæ in hoc circino nō sunt inter se æquales propter ea quæ habes in initio cit. Ap 12.) vtriuslibet rectæ LM, LN.

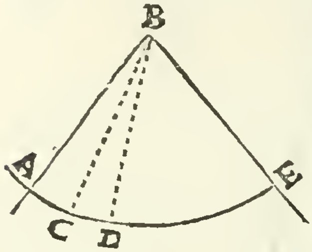


§. VIII.

PRAXIS, & problema, nempe —

Datum angulum rectilineum, vel arcum in quotlibet partes expeditissime diuidere organicè per circinum proportionum.

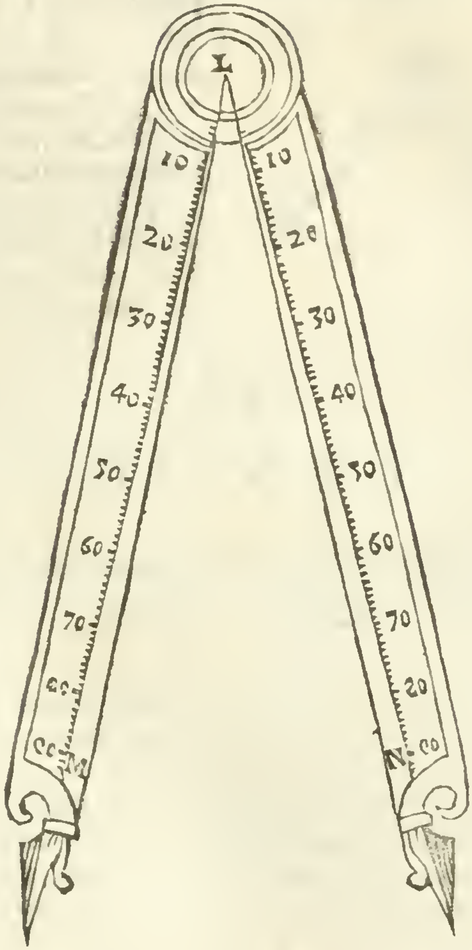
AVdax planè Propositio, & hactenus expetita. Nos hìc eius saltem praxim organicam docemus quatenus vsui potest esse operationibus aliquibus Astronom. Gnomon. Geometr. & aliquarum artium praxib. tamen etiam non sine geometricà demonstratione suo loco in circino proportionum exponendà. Igitur sit angulus quicunq; rectilineus etiam recto minor ABE, non modo bifariandus, vt docet hìc Eucl. sed & in quotlibet alias partes diuidendus, v. g. in 5 æquales. Facto cētro B, & interuallo quolibet minore linearum angulum continentium fiant sectiones in A, & E, & ducatur arcus AE. Mox acceptū interuallum sem. diam.



AB transferatur inter 60, & 60 in circino partium, diductis eius cruribus M, N. Deinde diducto sic manente circino, accipiatur interuallum AE, ac videatur inter quos numeros similes aptetur in circino, puta pro exemplo, inter 50, & 50. Accipe in eodē circino interuallū inter 10, & 10 & eo interuallo fiat sectio ex A in C, iuncta enim CB, erit angulus ABC 5 pars totius ABE. Nā, vt videbis in lib. 6, quemadmodum in circino proportionum ab L ad 10 est quinta pars totius 50, ita interuallum inter 10, & 10 est chorda subtendens quintam partem arcus ACE, cuius chorda est interuallum inter 50, & 50.

Habes in eodem circino inter singulos quinarios interualla maiora, ac maiora gradatim, quæ per integros numeros diuidi possunt in quinq; partes ab interuallis minoribus. v. g. interualli inter 90 quinta pars est interuallum inter 18; sic interuallorum inter 85, 80, 75, 70, 65, 60, &c. quintæ sunt 17, 16, 15, 14, 13, 12 &c. Si sint in circino, præter gradus, etiam minuta, vsui erunt interuallis etiam inter numeros habentes fractiones, præter integros. In quibus fractionibus aliquando vtendum erit æstimatione, vbi non fuerit præcisa diuisio, .f. ad praxes, &c. vt diximus. Pariter interuallum inter 15, & 15 erit tertia pars interualli inter 45, & 45 ab A in D. &c. Vide ad 32 hu. § 11, 12, &c.

.9.

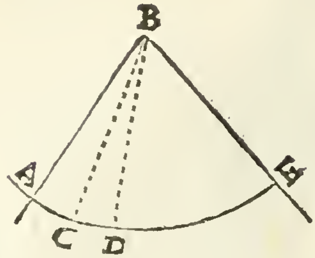


§. IX.

PRAXIS altera,

In eodem circino partium, cuius ope facillima, & expeditissima diuisio fit anguli recti, seu quadrantis in 90 partes æquales, ac totius circuli in 360.

TRansfer dati quadrantis, siue anguli recti ABE chordam, siue interuallum BE inter 90, & 90 circini LMN, & accepto in-



teruallo inter I, & I proximè ipsi L, secetur ex A, vel E arcellus in linea quadrantis AE, eritq; sectus arcellus nonagesima pars. Atq; ea cõtinenter replicata diuidet angulũ rectum, & quadrantem vnum in 90, quatuor verò quadrantes, idest totam circuli peripheriam, in 360 gradus æquales.

§. X.

SCHOLION.

Quantus in Astronomicis instrumentis vsus ex hac 9 propos.

PRædicta diuisione diuisa sunt, eaq; vtuntur penè omnia, ac præcipua Astronomica instrumenta, scaphia, siue vasa hemisphæricè incauata, in quibus Aequinoctialis, & aliqui alij circuli diuisi sunt, sphæræ armillares, annuli Astronomici, astrolabia, quadrantes, & alia, quorum formæ partim vulgatæ, partim nouis inuentis auctæ visuntur, præ alijs, apud Tychonem Astronomiæ restauratorem in eius libro de Astronomicis instrumentis, quibus vsus est ad eam astronomicam reformationem. Ad venustandam tyronibus hanc proposit. Eucl. Geometricus Doctor aliqua ex ijs instrumentis ostentet, & vsum aliquem faciliorem ex ijs diuisionibus saltem indicet, vt gustum tyronibus acuat ex his ad altiora. Vide inferius in § 5 ad 10 propos. Eucl. vsum aliquem, & aliqua de radio Geometrico, & Astronomico.

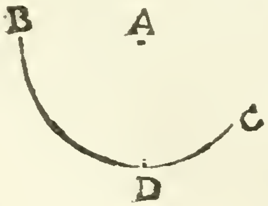
§. XI.

§. XI.

PRAXIS, &

Examen normæ, siue anguli recti.

LVbito circini interuallo AB duc arcum propè semicircularem BC. Deinde immotum id circini interuallum aptato in circino proportionum ad, & inter numeros 90, & 60. Mox accipe interuallum in eodem circino proportionum inter 90, & 90, quo signabis ex B in D. Post hæc normam accipe, & anguli in ea recti cuspidem appone ad centrum A. si normæ latera præcisè secuerint in punctis B, & D arcū BC, erit ritè formata norma. Nam spatium, quod sub eius angulo est, est numeri 90 partium æqualium, qualium est tota peripheria 360, ergo arcus BD est quadrantis, idest anguli recti, &c.



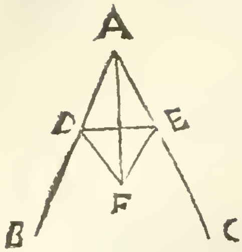
§. XII.

PRAXES ALIÆ

geometricæ bisecādi angulum rectilineum, etiam extra casus Euclidis, & per 13 propositionem, sine anticipatione, demonstratæ.

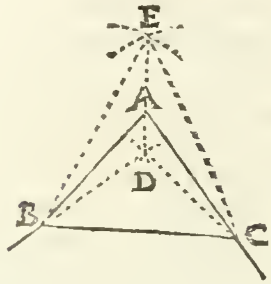
CIrca praxes geometricas vulgatas ex Euclidis propos. hac 9. notanda sunt aliqua non sine paradoxo aliquo.

PROPOSITIO IX.



1 *Vnicâ circini diductione exerceri potest hoc problema Euclidis, si nempe (inspice figuram Euclidis) eodem interuallo, quo ex A factæ sūt sectiones in D, & E, fiat ex D, & E mutua sectio in F.*

2 *Quando non est locus infra basim BC construendo isosceli, vel æquilatero, poterit construi supra BC, vel infra A ad mutuam sectionem in D, vel supra A ad E. Ac facile quidem est demonstrare in triangulis infra A (nempe BAD, DAC, qui fiunt si à D ducatur recta ad A) angulos BAD, DAC esse æquales ex 8 antec. propos. Sunt enim æqualia per constructionem latera BA, CA, BD, CD, & basis DA communis, ergo & anguli, &c. At verò cùm isosceles construitur, cuius vertex E est supra A, non demonstrari potest è sola eadem 8 propos.*



antecedenti, sed vtemur nos (ac rectè) 13 propos. Eucl. quod est paradoxum.

Propos. 13 demōstrari potest e pri. princi. pijs.

3 *Rectè igitur Cataldus monet eam 13 propos. posse demonstrari e solis primis principijs, ac proinde posse, nō labefactatâ geometricâ firmitate, vsurpari etiam ad antecedentes. Nam quod Euclides in ea demonstratione duci iubet perpendicularem (quam nos hìc hactenus ab eo demonstratiuè excitare non didicimus) accipi potest pro data, &c. Vide ibi nostrum scholion.*

Quibus lemmatis loco præpositis, ducatur ex E recta per, & vltra A secans angulum BAC. Quoniam, propter latera æqualia BE, EC, CA, AB, & commune AE, anguli BAE, EAC sunt æquales, &, consistentibus BA, CA supra rectam ductam per A, verbi gratia ED, fiunt duo anguli DAB, BAE duobus rectis æquales, item duo DAC, CAE duobus rectis æquales, ac proindè bini DAB, BAE binis DAC, CAE æquales, si ergo demantur æquales BAE, EAC, remanent æquales BAD, DAC, ac proindè angulus BAC diuisus est in duos æquales ex ductu rectæ ab E per A.

§. XIII.

§. XIII.

PROBLEMA, & Paradoxum.

Isoscelis angulum verticalem datâ qualibet, ac vnicâ circini diductione ad partes verticis applicatâ bifariare.

Habes ex antefactis, ac demonstratis modum bisecandi angulum (ac verticalem, verb. gr. A, dati isoscelis BAC) vnicâ qualibet datâ circini diductione applicatâ ad partes verticis, siue anguli A, non solùm cùm ea diductio maior est lateribus æqualibus BA, AC, qualis est diductio BE, vel EC, vt vulgatum est; sed etiam cùm ea data diductio minor est, qualis BD, vel DC, & cògeris eà vti ad easdem partes versus A.

Quid si diductio sit minor dimidià BC? Hìc latet paradoxum. Vtere ingenio. Cui allucebit inferius in paradoxicà lineæ diuisione.

§. XIV.

SCHOLION,

In quo indicata firmamenta contra dubitationes circa praxes in, & è circino proportionũ, præsertim in diuisione anguli arbitrariâ.

Si quis nimis geometricè anxius putet diuisionem anguli rectilinei factam ope circini proportionum in quotlibet partes æquales, esse planè mechanicam, & non admittendam in demonstrationem tam celebris problematis, is non habet maiorem rationem admittendi cæteras praxes factas per regulam, normam, & circinum vsita-

vsitatum, quã hanc diuisionem anguli (vt & alias praxes ex eo circino) per circinum proportionum. In quo, & ex quo factæ sunt diuisiones angulorum æqualibus arcubus insistentium, vel æqualibus rectis subtensorum. Nec in eo, vel ex eo instrumento designantur lineæ vllæ mixtæ incerti ductus, vel per puncta non continuata. Atq; idẽ est, ac si geometrice per circinũ vsitatũ diuisisses per arcus quadrãtis (vide modum initio Apiarij 12 apud nos) rectã lineam, & ex ea operareris in papyro id, quod fit in solidiore materia circini proportionum. Quod si affirmes posse diductiones illas eius circini aberrare (licet non ad sensum) à firmitudine, ac præcisione operationis geometricæ, idem & ego affirmabo de diductionibus vsitati circini dum per eum fiunt pene omnes operationes geometricorum problematum, atq; etiam theorematum in cõstructionibus. Quare si vsitati circini operationes non arbitraris officere geometricis demonstrationibus, non video cur arbitreris de circino proportionum.

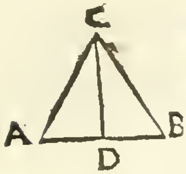
Qui geometrico demonstratiuo fundamento nititur. Nam demonstratiuè geometricè diuisus est quadrans circuli in 90 gradus æquales, & translatus in hunc circinum proportionum. Diuisio vero geometricè demonstrata quadrantis constat ex antecedentibus § 2, & 3. Bifariationes habent demonstrationem ab hac 9 prop. Eucl. Diuisio in quinq; partes æquales peragitur geometricè demonstratiuè per inscriptionem pentagoni in circulo. Nam in fig. § 2, vel 3, pentagoni latus CI est 72, arcus quinque horarum CF est 75, ergo arcus inter FI est quinta pars arcus FE, idest vnius horæ, ac 15 graduum. Continet ergo FI 3 gradus. Trisariatio deniq; arcus, & anguli sub FI demõstratiuè habetur per modum ex Nichomede, § 11 ad 32 huius, eaq; trifariatio fit ex ductu continuato conchilis per instrumentum non minus certum, quam cum ducitur peripheria circino; vt & in Ap. 3, progym. 1 diximus. Translatio graduum in circinum est vsus prop. 2. hu. &c.

Vsus 'in' 9nis prop. 2.

Atq; ex prædictis etiam habetur in circino proportionum inscriptio cuiuslibet figuræ regularis in circulo. v. g. latus heptagoni grad. 51, &c. Videbis ad lib. 4 apud nos.

Propos. X. Probl. V.

Datam rectam finitam bifariam secare.



SIt data recta finita AB, quam oporteat bifariam secare. Constituatur super illa triangulum æquilaterum ABC,[a] & secetur angulus ACB bifariam recta CD. Dico rectam AB in D bifariam esse sectam. Cum enim AC, CB æquales sint, communis CD, erũt duæ AC, CD duabus BC, CD æquales, altera alteri, & angulus ACD angulo BCD æqualis:[b] igitur & basis AD æqualis est basi BD. data ergo recta finita AB in D secta est bifariam, quod faciendum erat.

a prop. 1. 1.

b prop. 4. 1.

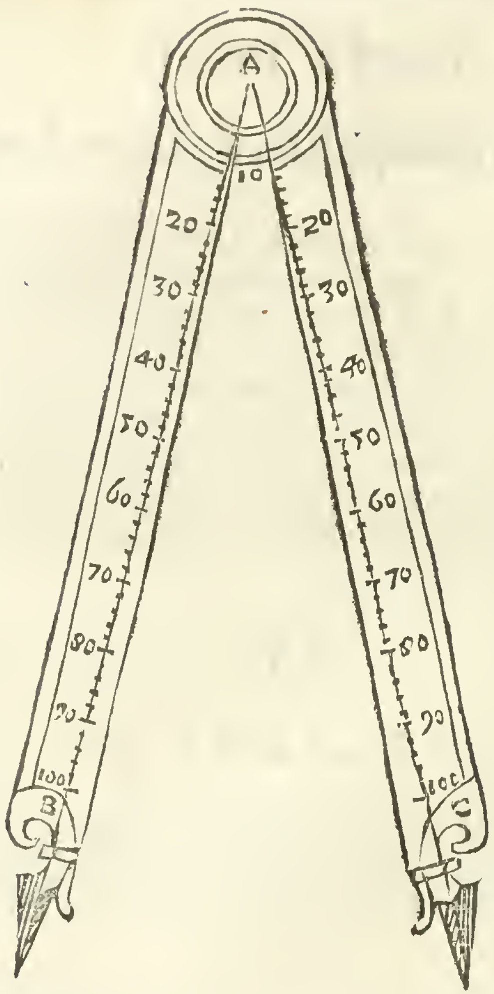
§. I.

PRAXIS, &

Constructio circini partium æqualium ex 10 prop. Eucl. ad vsus plures etiam extra decimam.

EX hac 10 propos. Eucl. habes modum, quo diuidas datam rectam non modo in duas, sed etiam in plures partes æquales, & numeri paris, semper singulas bifariando, & imparis replicando scilicet vnam e partibus, vel semel, vel ter, &c. vltra diuisas. Atq; hinc potes è data recta indefinita per replicationem vnius particulæ ad lubitum numerum detrahere rectam diuisam in quotlibet partes æquales, verbi gratia in 100; quales vides hic geminas diuisas in lateribus, circini appositi (cuius hic facies altera est, & diuersa, ab ea, quam habes ad antec. propos. 9, § 7) habentes

com-



commune punctum in A, à quo quaſi centro incipit diuiſio duarum quaſi ſemidiametrorum AB, AC. Quæ diuiſio ſemel facta erit plurimorum vſuum in Geometricis problematibus, vt videbis in hoc 1 libro, & ſeq. Eucl. Ac quod attinet ad vſum pro hac 10 propoſitione, vide mox ſequentia.

§. II.

§. II.

PRAXIS

Datam rectam non ſolum in duas, ſed & in quotlibet partes æquales expeditiſſimè, & facillimè diuidendi ex circino partium æqualium.



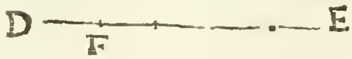
Sit recta DE diuidenda, verb. gr. in 5 partes æquales. Transferatur, alterius circini beneficio rectæ DE longitudo, inter numeros 100, & 100 vtriuſq; lateris diducti circini æqualium partium. Deinde immota manenti diductione circini ABC, in alterutro latere accipiatur interuallum inter 20, & 20, eoq; interuallo ſecetur DE à D in F, eritq; DF quinta pars totius DE, quam replicata exhauriet. Eſt enim vt 20 quinta pars ipſius 100, ſic interuallum inter 20, & 20 quinta pars interualli inter 100, & 100, vt apertius demõſtrabitur ſuo loco in lib. 6. Simili modo operabere circa alias lineas diuidendas in alias quotlibet partes. Erũt enim tot in linea diuidenda partes quot indicabũt numeri laterales, inter quos fuerit interpoſitum interuallum lineæ diuidendæ. Hìc interim ad praxes habes organicum hocce compendium. Ad firmamẽtum huius operationis, ac praxis relege dicta in § 14 ad antecedentemq; propoſ. huius lib. 1.

§. III.

SCHOLION.

Ex diuisionibus anguli, & lineæ in circino proportionum soluta sunt & alia problemata pro vsibus varijs.

D*Vm te docui, mi Tyro, ex circino proportionum diuidere vel angulum, vel arcum, vel lineam in quotlibet partes æquales didicisti etiam eadē opera expedire sequentes propositiones, siue problemata, nempe:* A data recta imperatam partem auferre, *quæ est propositio 9 lib. 6 elem. pariq; modo :* A dato angulo, vel arcu circuli partem lubitam abscindere, *in ea circini proportionum facie, in quam translati sunt gradus quadrantis. Item :* Datis duabus rectis, vel angulis duobus, vel arcubus, cognoscere quota sit pars minor maioris, *vel*: Cognoscere quot partes alterius altera minor cōtineat. *Quæ omnia problemata inseruiunt mirificè varijs operationibus in Geometria practica, Astronomia, Gnomonica, &c. vt videbis suis locis in hoc 1, & 6 libro, pro facili distātiarum inaccessarum, & superficierum dimensione, pro earundem proportionibus, diuisionibus, augmentis, &c. Vides igitur hic saltem indicatum quot, ac quanti momenti corollaria prodeant ex vnà operatione per eum circinum proportionū. Hic interim indico exempla*



problematum indicatorum in hoc § 3. Nā à data recta DE ablata est quinta pars ex interuallo inter 20, & 20. Item finge datas DE, DF: interpositā DE inter 100, & 100, & interuallo DF cadente inter 20, & 20, habes ipsam DF & esse quintā ipsius DE, & continere in se 20 partes æquales qualium est 100 ipsa DE. Eademq; intellige in altera circini facie pro angulis, & arcubus. Et quod dictum est de DE translata inter 100, & 100 intellige similiter si eam transferas inter quotlibet alios numeros. v. g. si eius interuallum interponas inter

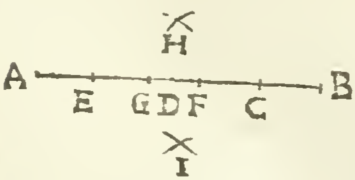
50, & 50, quinta eius pars erit recta inter 10, & 10, ceu 10 est quinta pars numeri 50. &c.

§. IV.

PARADOXVM, & praxis —

— Datam rectam bifariandi vnicà datà circini diductione, quæ sit etiam minor dimidià parte lineæ bifariandæ.

HIc vsus est paradoxicus. Nam Euclides, ac quicumq; alij geometricè soluunt problema propositionis 10, cum super data triangulum excitant, profectò supponunt circini interuallum esse maius saltem dimidia parte datæ lineæ, vt fieri possit mutua sectio ad constituendum verticem trianguli. Nihilominus necessarium id suppositum non est, vt rectè docet Cataldus. Nã, data sit AB bifarianda, & circini diductio data sit, ver. gr. BC pars minor dimidià BD; eodem interuallo BC fiat sectio secunda ex A in E, tertia ex C in F, quarta ex E in G, &c. totidem hinc inde ab A, & B versus medium D, donec perueniatur ad interuallum, verb. gr. GF, cuius dimidio sit maior data circini diductio, fiatq; mutua sectio inferius, ac superius ex G, & F in H, & I; recta enim per H, & I secabit in D datam AB bifariam.



Ac si interuallum GF sit precisè duplum datæ circini diductionis ita, vt in D arcus ex G, & F contingant se, erit in ipso contactu ad D facta bifariatio. Ratio, ac demonstratio patet è 2 axiomate. Aequalibus enim AE; EG, FC, CB, quoniam adduntur æqualia GD, DF, ideo AD, DB sunt æqualia, &c.

SCHOLION.

PAradoxica proximè præcedentis lineæ bifariatio eodem modo vsurpanda est etiam in arcu quolibet circuli bifariando.

§. V.

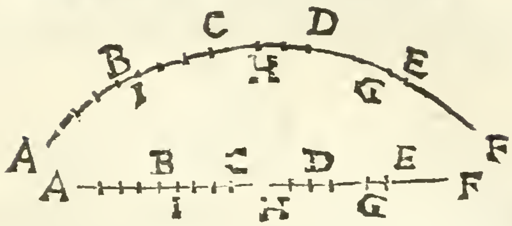
PARADOXVM, & praxis–

– Datam vel rectam, vel circularem, licet minimam, in quotlibet partes etiam minutissimas diuidendi circini diductione, quę maior sit totà lineà diuidendà.

1 *SI circini interuallum maius est tota linea diuidenda, profectò paradoxum est, vt eo diuidi possit linea præsertim in partes minutissimas. Nihilominus, mi Tyro, ideo paradoxum hoc vsurpatur, vt facilior fiat diuisio lineæ vel minimæ in partes minutissimas, quarum vna non facile continuari, & replicari multoties potest sine errore. Est hoc paradoxum contrarium proximè antecedenti, & vniuersalius. Ibi enim per interuallum minus, hìc per maius fit diuisio, ibi in duas tantùm, hìc in quotlibet partes æquales.*

2 *Quoniam autem pertinet ad lib. 6. docere lineam diuidere vniuersaliter in quamlibet proportionem, & in partes etiam æquales imparis numeri, & hìc tantum in binas æquales, siue in alias æquales numeri paris, quæ fieri possunt per replicatas bifariationes minores, ac minores; ideo exemplum apponam in paris, & exigui numeri partibus æqualibus. Ac licet ex antedictis ope circini partium facilè fiat diuisio in quotlibet, atq; accipiatur pars qualibet aliquota, quæ replicata aliquoties totam lineam datam exhauriat, tamen etiã difficile est in diuisionibus minimæ lineolæ vti eo circino. Huic etiã incommodo remedium affert propositum paradoxum.*

3 *Itaq; sit lineola tam recta, quã circularis AB diuidenda in quatuor*



tuor (facilioris exēpli gratià) particulas minutissimas æquales: producatur, & interuallo AB accipiantur à B quatuor partes æquales BC, CD, DE, EF. Deinde tota AF diuidatur in quot partes quærimus diuidere ipsam AB, nempe in quatuor partes æquales, ac fiet facilè si accipiatur totius AF vna quarta vel per bifariationem totius AF in H, & partium AH, HF in I, & G; vel per modum antedoctū è circino partium, ac proportionum, quod fieri potest sine incommodo in linea iam hìc longiore AF. Diuisiones igitur in quartas æquales sint in G, H, I. Quælibet harum quartarum, verbi gratia AI, continebit ipsam AB, & vnam quartam partem eiusdem AB, qualis est particula BI. Sicut ergo quarta AI, siue FG, hoc est circini interuallum ad vnam quartam maiorem ex puncto F in G, dat, præter FG, vnam etiam quartam minorem, hoc est particulam EG; sic idem quartæ maioris interuallum ex duobus pūctis E, G dabit duas particulas inter DH; ex tribus punctis inter DH dabit tres particulas inter CI, ex quatuor denique punctis inter CI dabit quatuor particulas inter B A; hoc est lineola AB erit diuisa hac arte in quatuor particulas æquales interuallo circini maiore nō solùm quæsitis particulis, sed & totà diuidendà, &c. vt erat propositum.

4 Ingeniosæ huius paradoxicæ, ac vtilissimæ diuisionis plures casus videto apud Clauium in 1 lemmate ante Astrolabium. Ratio pendet ex 16 propos. lib. 5 Eucl. vbi demonstratur perturbatæ proportionis argumentatio. Hìc Tyroni sat esto vt sciat quod quemadmodum duarum maiorum linearum altera AF continet totam alteram AE semel, ac præterea vnam eius quartam partem EF, ita & duarum minorum linearum altera AI continet totam AB semel, ac præterea vnam eius quartam particulam BI, siue totam FE, & particulam EG. ex G deinde excedit vltra D ad duas particulas vsq; ad H, ex H vltra C ad tres vsq; ad I, ex I vltra B ad quatuor æquales particulas; semper enim per translationem eiusdem interualli FG ad signata iam puncta fit accessus particulæ vnius: ergo

per

per quatuor translationes ad quatuor signata pũcta fit quatuor particularum signatio in ipsa AB pari interuallo inter se distantium.

§. VI.

Vsus organici 9, & 10 Propos. in Geometria practica, & Astronomia indicati.

De radio Astronomico, & Geometrico.

ORganicum dixi vsum, quia in instrumentum transfertur diuisio & angulorum, & linearum in partes æquales. Instrumentum autem id est famosissimus etiam apud Antiquissimos radius Geometricus, & Astronomicus, de quo vide insignem librum Gemmafrisij. Id Instrumentum in formam crucis (hæc dum scribo festum S. Crucis celebratur hoc mense Maio ann. 1640) compactum totum constat ex diuisionibus tum quadrantis, siue anguli recti in gradus, & eorum translatione in regulam alteram ipsius Radij, tum lineæ rectæ in partes æquales, quarum diuisionum prima semina hìc habes, ò Tyro, in duabus propos. 9, & 10 Eucl. E quibus conflatur ille radius, de quo Gemmafrisius in epist. nuncupatoria sic, ac verè: Hoc vno (*sic diuiso*) totum & cælum, & terræ globum metiri licet miro compendio: quo stellarum distantiæ, planetarumq; motus exactissimè explorantur, atq; vt ille dixit.

Eiusdē radij commendatio.

Descripsit Radio totum qui gentibus orbem.

Ita verè hoc Radio Mathematici totius orbis situs, magnitudinem, cæliq; meatus describent, &

—— *surgentia sydera dicent,*

vt idem Virgilius prædixit.

Baculus mensorius Geometricus dictus baculus Iacob.

Vide etiã in Apiarijs nostris Philosophiæ Mathematicæ, Apiar. 2. Progym. 3. Prop. 1, & seq. baculum, quem vocant Iacob, diuisum tamquam geminam lineam in partes æquales ad dimẽsiones inaccessarum latitudinum, etiam ex vna statione, vbi & demonstrationem ab alijs omissam exhibemus. Ex hisce indicatis prospicere potes, mi Tyro, ad quam eximia ducant hæc, quæ in Euclide ageometricis ingenijs videntur vel exilia, vel inutilia.

§. VII.

SCHOLION.

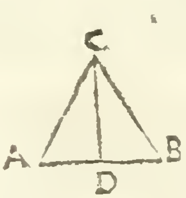
Indicata vniuersalitas prop. 9, & 10.

IN prop. 9, & 10 sunt in eadem proportione æqualitatis & angulus, & bases diuisæ in æqualia, & latera etiam æquilaterorum æqualia. At in lib. 6 propos. 3 videbis in bifariatione anguli cuiuscumq; triãguli diuisæ basis partes esse in eadem proportione cum reliquis trianguli lateribus, non verò solum in proportione bifariationis, & æqualitatis, vt hic.

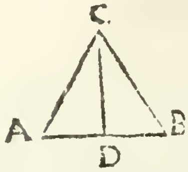
§. VIII.

Vsus eximij propositionis 10 indicati in machinaria, & in nouo vsu centri grauitatis pro Geometrià rotundorum.

PRæter vsus alios iam indicatos propositionis 10, habes etiam vt eàdem operatione bifariatæ lineæ centrum grauitatis inueneris in pũcto bifariationis alicuius lineę in materià aliqua physica vndiq; æquabili. est verò id centrum grauitatis, à quo partes omnes rei grauis æqualiter ponderant. estq; in lineis etiã medium. Eius puncti bifariantis & lineam, & lineæ pondus plurimi, ac iucundi sunt vsus in machinarià philosophià, & expediet tyronum oculis aliquem subijcere. Verbi gratia in figurà propos. 10 Eucl. si lineam AB à reliquis lateribus trianguli abstractam suspendas ex D medio, fiet recta AB horizonti parallela, & minime ponderabit in comparatione aliorum punctorum extra D, si abiq; suspendatur, in quibus non manebit



horizonti parallela. Quin immo vide, & huc appone ex Apiar. 4. Progym. 1 propositiones 2, 3, 4, &c. vbi docemus grauitatem lineam suspensam è centro grauitatis, siue bifariationis, quiescere in situ etiam ad horizontem inclinato propter rationes, & experimenta ibi allata. Si experimentum feceris, ne te fallat, in lineæ physicæ medio nō solū longitudinis, sed & latitudinis foramen exiguum facito, & ingesta tereti cuspide, circa quam in foramine libere possit moueri suspensa linea, experieris eam perstare in quocumq; situ volueris. Vide figuras in cit. Apiar.

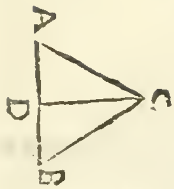


Tyrunculis ludieri gratia, & ad eleuādam molestiam geometricæ abstractionis, nō erit ab re ostēdere quemadmodū, protenso filo, & imposita ipsius etiā AD centro D super filum, sustētari possit sine lapsu; aut etiam, inclinato ex altera parte filo, labetur AD puncto bifariationis D per filum, nec cadet ad vtrumlibet latus A, vel B, præsertim, ac multo minus si ad A, & B æqualia pondera addantur.

Sed maximè serium, nouum, ac mirabile est, quòd punctum illud bifariationis, & æquigrauitationis D thesaurus latens est, vnde ditari potest vniuersa geometria, & stereometria, præsertim ea, quæ pertinet ad superficies, & corpora curuata, siue, vt generico nomine appellant, rotunda. Quem thesaurum ex centro grauitatis protulit primus noster Guldinus in doctissimis suis libris de centro grauitatis. Qua de re nos iterum, ac tertio aliqua inferius indicabimus, vbi geodetica exercebimus, atq; etiam ad postremas huius lib. 1. propositiones, vbi & regulam vniuersalem in Guldino quasi clauem auream geometricæ Philosophiæ promemus. Hìc interim (quod inferius etiam probabitur) tyronibus quantum sat erit, indico aliquid.

Si igitur in figura Euclidis fingas rectā AB, (sine CA, CD, CB) posito alterutro extremo, ver. gratia B, pro cētro gyrari parallelos horizonti, ea geminum planum circulare describet, alterum sub maiori peripheria descripta à puncto A, alterum concentricum maiori sub minori peripheria descripta à puncto D bifariationis, eritque dimensio areæ cicularis, cuius semidiameter AB, æqualis rectangulo sub AB, & sub peripheria (siue sub recta illi æquali) signata à puncto D.

Pariter si fingas (sine CA, CB) centro C gyrari ipsam CD, & secū circūuoluere ipsam AB perpēdiculariter ad horizōtē, describet ipsa AB superficiem rotundam cilindricam, cuius quantitas, & mensura habebitur ex ductu eiusdē gyratæ AB in rectam æqualē peripheriæ de-



descriptæ à pũcto bifariationis D. Parco huc plura nunc, ne tyronibus adhuc quasi in vestibulo tenebras pro luce afferam, quæ clarior in hoc lib. I. à nobis expandetur. Interim vides quid D punctum bifariationis prodat.

§. IX:

Vſus eiuſdem prop. 10 machinarius, & inuſitatè coſmographicus.

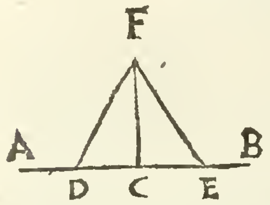
F*Errea quælibet virga, vel hasta æquabilium vbiq; partiũ quasi recta linea bifariata, & è puncto bifariationis suspensa liberum habet, ac facillimum tardæ cuiusdam gyrationis motum, in cuius fine, pari prorsus modo, quo acus magnete illita, consistit altero sui extremo ad arcticum polum, altero ad antarcticum directè collocato. Quæ res plurimum Cosmographis, & Astronomicis operationibus inseruit, vt norunt qui versati sunt in ijs scientijs. Est hic vsus ferri oblongi liberi suspensi nõ passim omnibus vulgatus. Sì virga ferrea non suspendatur in puncto bifariationis, ac sit ea inæqualis molis, modo è partibus centro grauitatis proximis appendatur, facilè, ac liberè ad polos vtroq; se diriget extremo.*

Propof. XI. Probl. VI.

Datæ rectæ lineæ ex puncto in illa dato lineam rectam ad angulos rectos ducere.

SIt data recta AB, datum in illa punctum C, oporteatq; ex C ipsi AB rectam lineã ad angulos rectos ducere. Accipiatur in AC quoduis punctum D, & [a] ponatur ipsi CD æqualis CE, [b] cõstituaturq; super ED triangulum æquilaterum FDE, & ducatur FC. Dico ad punctũ C datæ rectæ AB ad angulos rectos esse ductam FC. Cum enim DC, CE sint æquales, FC communis; erunt duæ DC, CF duabus EC, CF æquales, altera alteri: sed & basis DF æqualis est basi EF: erit [c] ergo & angulus DCF æqualis angulo ECF; & sunt deinceps. [d] Quãdo autem recta super rectam cõsistens, eos qui deinceps sunt angulos æquales fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum: recti igitur sunt anguli DCF, FCE. Quare datæ rectæ, ex puncto in illa dato, ducta est ad angulos rectos recta FC. quod facere oportuit.

a prop. 2. 1.
b prop. 1. 1.
c prop. 8. 1.
d def. 10.



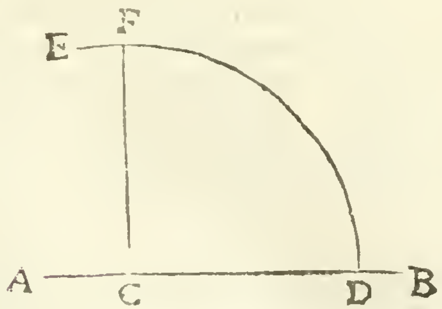
§. I.

PRAXIS

Circino arcuum quadrantis perpendicularem excitandi, etiam ad examen normæ.

Ircini partium faciem inspice, quam exhibemus in § 7 ad 9 Prop. Eucl.

Sit super AB à puncto C excitanda perpendicularis. Centro C ad vtramlibet partem lubito interuallo CD signetur arcus paullo minor semicirculo, sitq; DE. Interuallum semidiametri CD trãsferatur inter 60, & 60 in vtraque diuisâ circini lineà LM, LN. Deinde accipiatur interuallum inter 90, & 90, & eo fiat ex D sectio in F. Recta ex C per F erit perpendicularis. Est enim interuallum DF chorda quadrantis (hoc est subtendens angulum rectum in C) cuius quadrantis semidiameter est CD. Et in circino LMN vt 60 ad 90, ita interuallum inter 60, & 60, hoc est CD, ad interuallum inter 90, & 90, hoc est ad DF; ceu patebit in lib. 6. Hic praxis suo est in loco, ac suo ibi erit demonstratio.

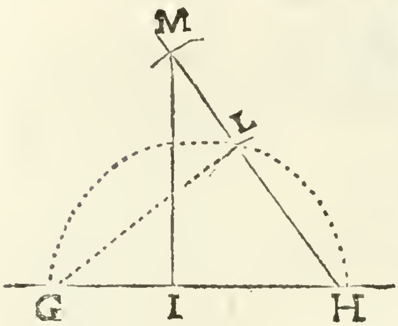


Hinc patet & ratio examinandi rectum normæ angulum, scilicet vt factum est etiam ad 9 propos. § 11.

§.II.

PRAXIS altera

Geometrica, & non vulgata perpendicularem è datæ puncto excitandi.



EX I excitanda sit perpendicularis. Signetur semicirculus super datâ rectâ vel totâ, vel super eius parte, ac diametro G H, ita tamen vt I cadat intra semicirculum, interuallo H I fiat sectio in L. ex H per L ducatur recta LM infinita. Interuallo H G fiat sectio in M. IM erit perpendicularis. Ac quod factum est ex termino H fieri etiã potest ex termino G, atq; interuallo G I secari peripheria, & ex G adduci per sectionẽ recta, quæ interuallo GH secabitur & ipsa in eodem pũcto M.

SCHOLION.

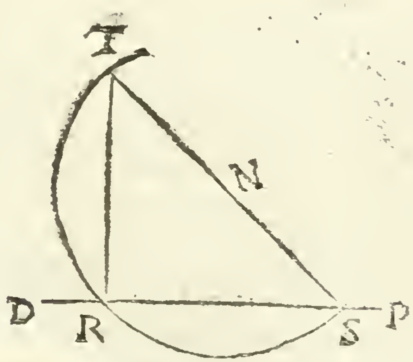
NOster Villalpandus tom. 3 in Ezechielem Prophetam, parte 2, lib. 1, cap. 2, propos. 30, theorema facit quod hic nos ad problema redegimus, omissa posteriori parte theorematis, quæ problemati minus apta visa est. Ad problema item redegimus eiusdem Villalpandi theorema, cuius constructionem dabimus ad sequentem 12 propos. Euclidis.

Quod attinet ad demonstrationem præcedentis hic praxis, ea pendet partim ex 4 prop. partim ex 32 huius lib. 11, vbi eam perfectam à nobis habebis in loco.

§. III.

SCHOLION ad praxes.

Vnica circini diductione casus omnes 11 propositionis expedire.



Punctum, verbi gratia R, in recta siue ab extremis absit, siue prope extrema, siue in altero extremo lineæ sit, vt ex eo perpendicularem educas vtere praxi probandâ ex 32 huius, scilicet sic. Factâ, & immota circini diductione, ac alterâ circini cuspide positâ in R, alterâ in puncto arbitrario N extra rectam DP; (dummodo N non sit in directum ipsi rectæ DP) centro N per R punctum, vnde perpendicularis educenda est, describatur arcus circuli secans rectam (etiam productam si sit opus) DP in R, & S: ex S per N ducatur diameter ST; ex R ducta ad T erit perpendicularis. &c.

§. IV.

§. IV.

SCHOLION.

Circa alias praxes, & de licita ſuppoſitione poſteriorum demonſtrationum in praxibus.

Alias praxes omiſimus, quia vel nihil noui addunt praxi Euclidianæ, vel prolixiores sũt. Vide apud Proclum, præter aliam prolixiorem ad hanc 11, praxes, & demonſtrationes alias duas, quibus Apollonius & datam rectam bifariat, & perpendicularem excitat in data. Quas Proclus tanquam minus ſimplices, quam ſint Euclidis problemata 1-, & 11, quaſi reprehendit. Aperte vero reijcit praxim excitandi perpendicularem per ſemicirculum, quam alij vſurparunt non malè, quia in purà praxi, quæ hic quæritur, licet ſupponere aliqua demonſtranda in propoſitionibus, & libris poſterioribus, velut in 3, vbi probatur angulus in ſemicirculo rectus. Nos ex parte incommodo huic ibimus obuiam, dum ex 32 huius eam praxim demonſtrabimus. Verba tamen Procli ſunt: Demonſtrationem autem, quæ per ſemicirculum fit nec cõmemorare dignum eſt. Multa ſiquidem præſuponit eorum, quæ poſterius oſtendenda ſunt, ab elementariſq; inſtitutionis ordine omnino decidit. *Ipſe tamen Proclus ad prop. 24 aliqua demonſtrat, quæ egent propoſitionibus 27, 32, & 37. Vide inferius etiam ad hanc rem nos in § 1 ad prop. 23.*

Proclus aliquando anticipatione geometrica vſus eſt.

§. V.

Vsus 11 propos. indicatus pro stylis erigendis ad Astronomicas, & Gnomonicas operationes.

1 QVod Proclus affirmat ad sequentem 12 propositionem: Hoc problema Oenipodes primus indagauit, vt se ipsum ad Astrologiam existimans, *licet hic nobis affirmare de hac 11 propos. est enim ea, vnde demõstratiuè stylus in dato plano erigatur ad plurima problemata Astronomica ex vmbris, in primis pro stylis, siue gnomonibus perpendiculariter erigendis in planis horizontalibus, & in muralibus, siue obliquis, siue perpendiculariter erectis &c. ad horas rite indicãdas in horarijs descriptas. &c.*

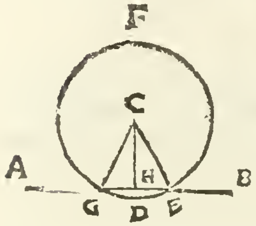
2 Esto exemplũ in figura Euclidis: ex C in plano, verbi gratia horizõtali AB, erecturus stylum CF perpendiculariter, finge ductam imaginariam, siue occultam decussantem per C ipsam AB. ex C acceptis duobus æqualibus interuallis CD, CE, ac tertio ex C item æquali in imaginariâ, siue occultâ, circinum diducito magis, vel minus donec idem interuallum à vertice F styli ad terminos D, E, & ad æquidistantem terminum tertiæ occultæ pertingat. Siue etiam aliter malis, fac fili tensi eadem longitudo ex F pertingat ad puncta D, E, ac ad tertium occultæ lineæ per C ductæ, utroque enim hoc organico modo erexeris perpẽdiculariter stylum iuxta demonstrationem huius 11 propos. Recole, & huc refer ex Proclo quæ attulimus ad definit. 10 de polo circuli, &c. Inferius, post vsum libellæ ad 12 propos sequentem, videbis ad theoricen expressiora, vt scientificè noris stylum esse perpendicularem non solum ad vnam rectam AB, vel alteram, iuxta hanc 11 prop Eucl. sed etiam ad totum planum, siue ad omnes alias rectas, quæ in plano dato deduci possent per C.

3 Quod hic factum est in plano horizontali, idem intellige de inclinato, vel perpendiculari plano ad horizontem. Infertus tamen post praxes pro 12 sequenti propositione Euclidis, habebis expeditissimas organicas operationes pro hisce vsibus Astronomicis, & Gnomonicis, atque etiam ad Architecturam.

Pro-

Propos. XII. Probl. VII.

Ad datam infinitam à puncto dato extra illam perpendicularem rectam ducere.



SIt data recta infinita AB, punctũ extra illam C, & oporteat ad rectam datam AB ex puncto C, quod in illa non eſt, perpendicularem rectam ducere. Accipiatur ad alteras partes rectæ AB quoduis punctum D, & [a] centro C interuallo CD circulus EFG deſcribatur, [b] diuidaturq; EG in H bifariam, ductis rectis CG, CH, CE. Dico quod ad datam infinitam AB à pũcto extra illam dato C perpendicularis ducta ſit CH. Cum enim GH, HE ſint æquales, HC communis: erunt duæ GH, HC duabus EH, HC æquales, altera alteri; [c] ſed & baſi CG baſis CE eſt æqualis; erit [d] ergo & angulus CHG angulo EHC æqualis, & ſunt deinceps. [e] quando autem recta ſuper rectam conſiſtens, eos qui deinceps ſunt angulos, æquales fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum, & inſiſtens linea perpendicularis dicitur eius, cui inſiſtit. Quare ad datam rectam infinitam AB à puncto extra illam dato C perpendicularis ducta eſt CH. quod facere oportebat.

a poſt. 3.
b prop. 10. 1.
c def. 15.
d prop. 8. 1.
e def. 10.

§. I.

SCHOLION.

Ad quæstionem, & ad Aristotelem de Infinito lib. 3 Physic.

1 AD datam infinitam? *Cur Geometra in hoc problemate infinitam requirit lineam? & quomodo infinitam? Implicat, vt diximus ad definitionem de figura, & figuram, & lineam esse infinitam. Vt enim in definitione figuræ inuoluitur terminatio quantitatis, ita & in definitione lineæ, præsertim rectæ (quam hic vult Euclides efficere rectos angulos ad perpendicularem demissam) includuntur termini secundum longitudinem. Est enim recta,* quæ ex æquo sua interiacet puncta, *idest vtrimq; habet terminos. Propterea rectè Proclus ad hanc 12 propos.* Quod in sensibilibus nulla magnitudo iuxta vllam distantiam infinita existit tum diuinus Aristoteles *(audi Platonicum Proclum vere Mathematicum Philosophum, idest abstractum animo ab omni liuore erga alios Philosophos, dum diuinum appellat Peripateticorum Principem)* tum qui ab ipso Philosophiam acceperunt affatim ostendunt. *Siquidem cum in loco sint,* vniuscuiusque locus terminatus est. *Vide alias rationes apud Aristotilem sub finem lib. 3. Physic.* Præterea *(item ex Proclo)* Infinitum omnino scientia perceptibile non est. *Quomodo ergo id Euclides in linea subycit scientiæ Geometricæ?*

Implicat lineam infinitā dari

Aristotelis honorificētissima mētio apud antiquos Philosophos.

Aristotelis sententia contra infinitum esse possibile.

Ratio vna eius sententia.

Ratio altera.

2 *Omnia facilè dissoluentur ex vnica responsione ad primum quæsitum, cur infinitam hic lineam velit Euclides. Ratio est, quia fieri poterat vt aliquando datum punctum, à quo in datam finitam lineam deducenda esset perpendicularis, esset ibi, vnde perpendicularis non incideret in datam. Quid tunc agendum? Finita data linea producatur donec in ipsam è dato puncto perpendicularis possit incidere. Ideo inquit infinitam, idest indefinitam, producibilem indefinitè, siue finitè in infinitum accipio datam. Acutè Proclus:* Cogitatio, apud quā rationes, demonstrationesq; sunt, non ad scien-

Cur Euclides lineam infinitam requirat in hac 12 propos.

Infinita linea quomodo intelligenda.

Cogitatio non vtitur infinito ad structuram, sed finito, supposito infinito.

tiam infinito vtitur. *Mox:* Sed ex suppositione ipsum accipiens, finito solo ad demonstrationem vtitur, & non infiniti gratia, sed finiti infinitum assumit. Quoniam si concesseris ipsi datum signum neq; in directum finitæ datæ rectæ lineæ iacere, neq; sic ab ipsa distare, vt nulla eius pars signo subijciatur, nihil amplius infinito indigebit. *Finitam actu, infinitam potentia accipit datam lineam.*

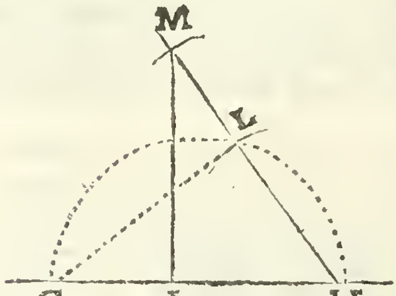
Infiniti potentia geometrici vsus.

3 Ex hisce habes vnde satisfacias oppositionibus antepositis. Mathematici Philosophi sumus, id est à disceptationibus alieni, & Philosophis disceptatorijs aliqua, vt hìc, aliquando apponimus, sed paucis, ita tamẽ vt qui Philosophus sit ex nostris appositis habeat quãtum satis est propositæ controuersiæ dirimendæ. Ac ne hìc etiam à Geometrici problematis vsu discedamus, adde hanc conditionem infiniti, siue indefiniti, quam propter prædicta requirit Euclides, esse vsui praxibus, de quibus mox, vt eæ ritè, ac facilius exerceri possint.

§. II.

PRAXIS

Non vulgata demittendi perpendicularem à dato puncto in subiectam rectam lineam.

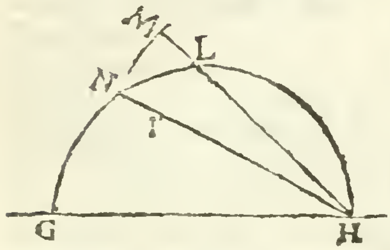


Data sit recta GH, & punctum extra eam, à quo demittẽda perpẽdicularis sit M: ex alterutro extremo, ex H, interuallo HM secetur recta HG (etiã protracta, si sit minor interuallo HM) in G: super diametro HG signetur semicirculus GLH, iungatur HM. Interuallo HL (vbi recta HM secat peripheriã) fiat sectio in I. Iuncta IM est quæsita perpendicularis ab M in rectam GH. Demonstrationem habebis ad prop. 32 Eucl. inferius.

§. III.

§. III.
PRAXIS altera

Non vulgata à puncto perpendicularem demittendi.

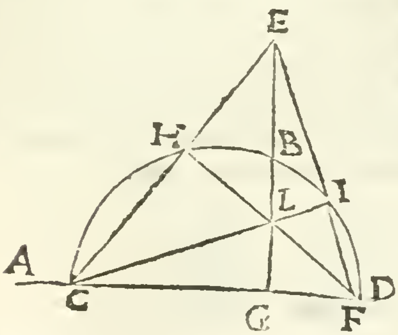


EX H internallo maiori, quã ab H ad datum punctum M, sit diameter accepta HG in data recta, & descriptus sit semicirculus GLH. Iungatur HM, & internallo HM fiat sectio in N; & iuncta HN, interuallo ab H ad L, vbi HM secat semicirculum, fiat sectio in I. Recta deducta ex M per I ad rectam GH erit perpendicularis.

Demonstrationem huius praxis habebis in loco ad 4 sexti.

§. IV.
PRAXIS Tertia

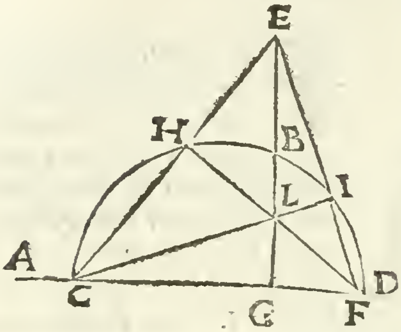
Non vulgata ex puncto demittendi perpendicularem in datam rectam lineam.



DAta sit recta AD, & punctũ E: descripto semicirculo CBF quouis interuallo ex quouis puncto rectæ AD, iunctisq; CE, FE secantibus circumferentiam in H, & I; si iterũ nectantur FH, CI, illæ se mutuò secabunt in puncto L, per quod ducta recta ex puncto E est perpen dicularis in G ad rectam AD.

SCHOLION I.

Pro vſu proximè antecedentis praxis.



ANimaduertat tyro ideo dictum: quouis interuallo, quia etiam ſi accidat punctum, vnde perpendicularis demittẽda eſt, cadere intra ſemicirculum, vt L, iungantur per L rectæ CI, FH, & ductæ FE, CE per H, & I, facient ſectionem, velut in E; nam non ſunt tangentes, ſed ſecãtes, & facientes angulos ad F, & C cum tertia AD minores duobus rectis, iuxta axiom. 11. Itaq; recta per EL erit perpendicularis. Sin accidat ſemicirculum ire per punctum datum, fiat alter ſemicirculus maior, vel minor, vt haberi poſſint ex praxi duo puncta, per quæ deducenda ſit perpendicularis.

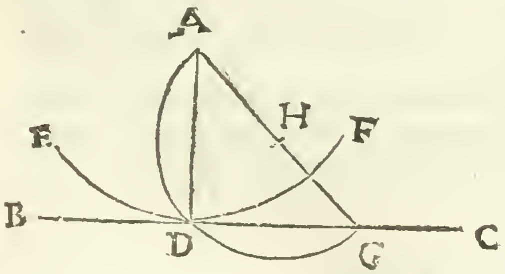
SCHOLION II.

PRaxis in antec. § 4 demittendi è puncto perpendicularem eſt corollarium prop. 18, cap. 2 citati Villalpandi. Quæ praxis pro demonſtratione ſupponit alias aliquas antecedẽtes prop. eiuſdem Villalpandi, quæ nitũtur aliquibus propoſitionibus lib. 3, & 6 Eucl. Quos libros vbi tyro à nobis inferius intellexerit, etiam facile intelligere poterit demonſtrationem in ipſo Villalpando. Nos hìc tantum praxim interim apponimus in vſum.

§. V.
PRAXES

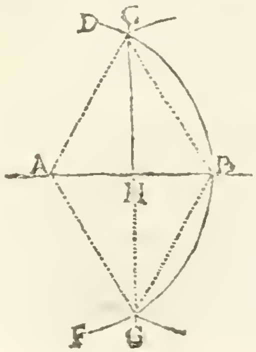
Quarta, quinta, & ſexta demittendi perpendicularem,&c.per arcus vel tangentem,vel ſecantes,etiam vnica circini diductione.

1 *Sit A, vnde demittenda perpendicularis in ipſam BC. Centro A, ac interuallo tali, vt (quantũ ſatis eſt praxi) ad ſenſum tangatur, non ſecetur in D recta BC, ducatur arcus EDF. Demiſſa ex A ad contactũ in D ipſa AD erit perpendicularis.*

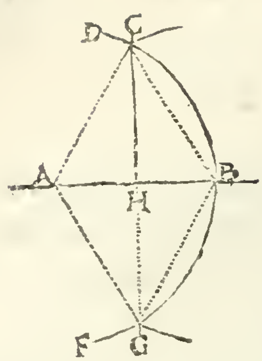


Demõſtrationem, & geometricè preciſiorem operationem habebis inferius, vbi nos ad 32 huius.

2 Sin autem per circulum ſiue arcum ſecantem lubeat praxim exequi conuerſo modo applicationis, ſiue praxis à nobis in § 2 appoſitæ ad vndecimam prop. Eucl. antecedentem, operationem expedies ductà ex A tranſuerſà AG ad ipſam BC, & biſariatà in H; vbi facto centro ad interuallum alterutrum HA, vel HG, ſemicirculum ADG ſignabis, & ad punctum ſectionis D demittes quæſitam perpendicularem AD. &c.



3 Si lubeat per ſecantes arcus, & vnica circini diductione, en tibi ex quolibet puncto A rectæ AB productæ vtrinq; , ſi ſit opus, etiam vltra B, & A, interuallo AC ad datum punctum C, deſcribatur arcus DBG, & immota circini diductione ad interuallum AC ex B ſecetur BG æqualis ipſi BC, iuncta CG ſecabit ipſum



ſum AB perpendiculariter in H. Si enim rectis iungantur A, C, B, G, erunt quatuor vel ductæ, vel imaginariæ AC, CB, BG, GA æquales. Ex centro enim A ſunt æquales ſemidiametri AC, AG; ſic ex cẽtro B æquales CB, BG eiuſdem, ſiue duorum æqualium circulorum, quorum communis ſemidiameter eſt AB. Igitur in triangulis ACG, GCB æqualia ſunt latera AC, CB, & æquales baſes AG, GB, & commune latus CG. ergo, per 8, anguli ACG, GCB ſunt æquales. Rurſus in triangulis ACH, HCB æqualia ſunt latera AC, CB, commune CH, anguli ad C æquales; ergo, per 4, & baſes AH, HB, & anguli ſunt æquales non ſolum CAH, HBC, ſed & ipſi AHC, CHB inter ſe ſunt æquales, qui ſunt deinceps ad ipſam CH, hoc eſt recti, hoc eſt ipſa CH eſt perpendicularis ad ipſam AB.

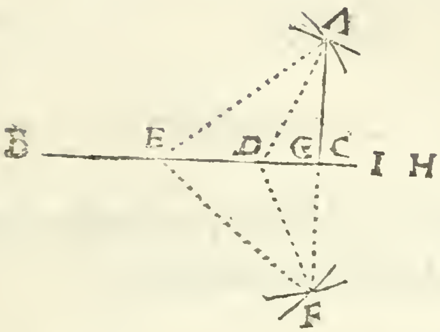
Hanc praxim alij demonſtrant cũ vſu 27 propoſitionis libri tertij, qua nos nõ egemus in prædicta à nobis poſita demonſtratione pro Tyronibus nondum imbutis cognitione libri 3.

§. VI.

SCHOLION.

Circa reliquas praxes vulgatas, ac earum demonſtratio indicata, & confirmata.

1 DVo tantum genera praxeωn indico, quæ aliquid paradoxi, vel inuſitati videntur habere. Alterum cum ad eaſdem partes ſupra lineam datam fiunt ad inæqualia interualla geminæ ſectiones, alterum cum inæqualibus etiam arcubus fiunt ſectiones infra, & ſupra datam. In hoc genere poſteriori exemplum, & demonſtrationem indicabo, quæ applicari etiam facilius poterit alteri generi.*



Sit punctum A, à quo demittenda est perpendicularis vergens ad alterum extremum C lineæ BC. Sumptis arbitrarijs centris D, E inter se distãtibus, & interuallis ad A signentur arcus AHF, AIF. Recta ad directionem intersectionum A, F demissa ex A in G est perpendicularis.

2 Demõstratio huius praxis apud alios vulgatæ fieri potest modo persimili antecedentis in § 5. Tyronibus indico. Ductis enim GF, FD, DA, EF, EA, quoniam in triangulis DEA, DEF latera DA, AE sunt ad interualla æqualia lateribus DF, FE, & ED est commune, ergo, per 8 prop. anguli FED, DEA, &c. sunt æquales. Rursus in triangulis GAE, EFG latera FE, EA sunt æqualia, & commune EG, & anguli FEG, GEA, per 8, in antecedẽtibus probati æquales, ergo, per 4 prop. Eucl. & bases FG, GA, & anguli FGE, EGA æquales; ergo, ex 10 definit. recti sunt, & recta AG perpẽdicularis.

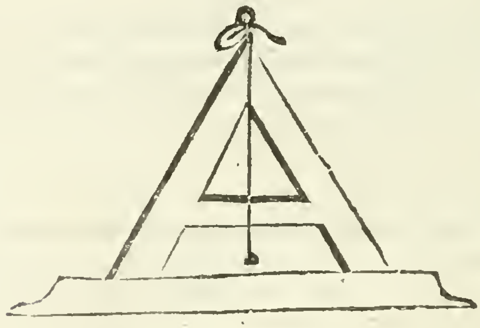
Additio Doctoris Roffeni. At enim non præstas, obijcit quispiã, quod quæritur, quod est demonstrare æquales deinceps G, & C, vt sit AG perpendicularis; tu vero ostendis ipsam EG esse perpendicularem ad AF propter æquales deinceps in G, & infra G. Respondeo, consultò factum non solum varietatis gratia, sed etiam quia vel per anticipationem (vt exemplo aliorũ à nobis iam nõ semel ostensum est licere in praxibus) ex prop. 13, & 15; vel etiam sine anticipatione, si in alteram partem trãsferas ipsas vel FEA, vel FDA, patebit ex 4, & 8 propos. demõstratio modo eodem, quo in antec. § 5. Hæc satis, vt appareat non temerè statim carpenda aliena; & in exẽplum pro alijs occasionibus, vt benignè accipiantur lucubrationes eorum, qui publicæ vtilitati laborant.

§. VII.

§.VII.

VSVS 12 propositionis

Pro praxi, & theoricà libellæ, ac libellationis planorum horizontalium.



Libellæ forma, & vsus.

L*ibellæ, quam vides in apposita figura, formam, & vsum Maurolycus lib. 1 de lineis horarijs cap. 7 breuiter sic describit:* Triangulare æquilaterum (*etiam isosceles*) a cuius vertice perpendiculum trianguli cathetū percutiens semel, atq; iterum basi congruente ad planum, arguit, per quartam vndecimi elementorum, plani libramentum. *En tibi à lynceo Maurolycano mētis oculo thesaurum habes indicatum pro demonstratione theoricæ libellationis planorum ad æquidistantiam ab horizonte. Quarta vndecimi libri Euclidis sic habet:* Si recta linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat, illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. *Atque huc nos respeximus in § 5 ad precedentem 11 propositionē. Memento in § 4 ad antec. 11 propos. Eucl. à nobis dictum (exemplo aliorum, qui doctè, atq; copiosè scripserunt in Euclidem) pro praxibus ferri posse aliquam suppositionem saltem indicatam, &c. vt hic à Maurolyci citata 4 propos. vndecimi. Quasi ergo filum perpendiculi esset*

In praxibus licita geometrica anticipatio.

linea

linea perpendicularis excitata à base trianguli æquilateri in libellà, si ea perpendicularis in iteratà illa libellæ applicatione ad plani duo loca insistit ad rectos angulos, indicat totius plani æquidistantiam ab horizonte. Tamen animaduerte vt quasi circa axem coni gyretur libella circa perpendiculum, ne discrepet praxis à scientià. Debet enim perpendicularis insistere ad punctum communis sectionis duarum rectarum in eo plano, iuxta propositionem, & demõstrationem Euclidis. In eà vero libellæ gyratione ad plures lineas fiet exactior exploratio plani, &c. Ac licet Maurolycus vtatur libellà quasi triangulo simulante figuram vndecimæ propositionis Eucl. tamen nos hunc vsum traduximus ad hanc potius 12 propositionem, quia verè libella, perpendiculo ab angulo dependente, potius demittit à puncto anguli perpendicularem versus basim, iuxta 12 propos. quàm à basi erigat, iuxta 11 propositionem.

Animaduertēda in vsu libellæ.

Libella theorice, ac vsus potius ad 12, quā ad 11. pp. Eucl. pertinet.

§ VIII.

PRAXIS, & vsus

In organicà exploratione perpendicularis erectionis murorum per canonem.



Est etiam hic vsus, & praxis corollarium e 12 hàc prop. Maurolycus citatus: Ad rectificandas murales planities ad horizontem perpendiculares fabricandus est canon æqualis latitudinis, & filum perpendiculare secundùm longitudinem suscipiens: hic enim parieti applicatus, filo iam medium canonem peruerberante, arguet emendatam fabricæ perpendicularitatem. *Theorice huius praxis patet ex vtraq; 11, & 12 propositione Eucl.*

Canonis murorum exploratorij forma, & vsus.

§. IX.

VSVS 11, & 12 prop. à Naturà in grauium liberis delationibus, & reflexionibus. Ariſtotiles explicatus.

Natura per breuiſſima operatur non impedita.

Linea directionis quænam.

Perpẽdiculum cur ſit iuſtũ examen planorum horizontaliũm.

Grauia perpẽdiculariter vel deſcendentia, vel reflexa vtuntur 11, & 12 propoſ. Eucl.

Acuta ratio Philoſophi cur grauia perpendiculariter incidentia perpendiculariter reflectantur.

1 *INferius videbis e coroll. 17. prop. Eucl. perpendicularem lineam eſſe breuiſſimam. Natura ſemper affectat compendia in motibus rerum ad ſuos fines. Fruſtra enim per plura fit (cæteris paribus) quod per pauciora licet. Linea ad centrum vniuerſi breuiſſima, quæq; ad horizontem perpendicularis, ſiue ad rectos angulos deduci fingitur, directionis linea dicitur. Per hanc ergo grauia vel libera deferuntur, vel ſuſpenſa in ea conſiſtunt. Perpendiculi pondus è chordula ſuſpẽſum, cùm in ea directionis perpendiculari conſiſtat, eſt iuſta lex, & examen horizontalium planorum, quorum etiam fit axis axi horizontis congruens. Grauium etiam liberæ delationes, quæ per lineã directionis fiunt, nihil aliud ſunt, quã vſus eiuſdem huius 12 propoſ. Eucl. Quòd ſi ea grauia in ſuis delationibus perpendicularibus ad plana horizontalia impediantur, tunc ex vſu 12 propoſ. Eucl. quo demittebant à puncto perpendicularem, cõuertuntur ad vſum 11 antecedentis, & à linea horizontali erigunt ad rectos angulos lineam breuiſſimam, nempe perpẽdicularem; ſic appellatam à perpendiculo, propter prædicta.*

Philoſophus in ſect. 16, probl. 13 de reflexionibus perpendicularibus proiectorum ad rectos angulos, affert rationem acutam eius reflexionis per lineam perpendicularem ſimilem, immo eandem cùm linea delationis. Diuiditur, ait Philoſophus, quaſi bifariam ponderoſitas, centro grauitatis demeante, ac remeante per eandem perpendicularem; ergo cùm hinc inde æquilibret, non eſt ratio cur perpendiculariter delatum reflectatur graue in alterutram partem; ergo reflectitur etiam perpendiculariter cum eodem æquilibrio. Vt ergo ad æquales angulos delatum eſt, ſic & ad æquales reſultat. Finge tibi prædicta in figurà aliquà, vt facilius intelligas, mi Tyro.

3 *Circa vero has grauium reſultantias non modo perpẽdiculares,*

ſed

sed & obliquas paullo post videbis erudita alia ex Arist. & Philosophis Mathematicis ad 15 propos. Eucl. Natura ergo in grauibus, Euclidis, hoc est Geometricæ philosophiæ, legibus paret, ac nos docet praxes pro 11, & 12 propos.

Natura Geometricæ philosophiæ legibus paret.

§. X.

PRAXIS, & vsus

In constructione, & examine normæ. Ab eâ facillimum compendium pro praxibus, & vsibus omnibus 11, & 12 propositionum Euclidis.

1 *Satis est sequentia tantum indicare, quæ facilè possint figuris applicari. Igitur angulo recto, siue perpendiculari linea geometricè ad alterā erectà iuxta aliquam è praxibus geometricis antecedētibus ad 11 propos. Eucl. poteris constructam normam examinare, ac exigere ad duas eas lineas geometricè in angulos rectos coniunctas. Normà deinde constructà, & sic emendatà vti poteris ad facillimè, ac breuissimè erigendas, vel demittendas perpendiculares lineas.*

Normæ cōstructio, & examen.

2 *Ac pro praxi quidem huius 11 propositionis normà eriges perpendicularem, si vel normalem angulum applices ad punctum datæ rectæ lineæ, congruatq; cum data rectà lineà alterum normæ latus, ducta enim altera recta secus alterum latus normæ (quod perpendiculariter insistit datæ rectæ) erit & ipsa perpendicularis ad datum punctum.*

Normæ vsus ad erectionē perpendicularis lineæ.

3 *Pro praxi verò 12 propos. vt ope normæ demittatur linea perpendicularis, applicetur acies alterius lateris normalis ad datum punctum extra rectam datam, alterum verò latus congruat cum datà rectà, si sit opus, productà &c.*

Vsus normæ ad demittendā perpendicularem.

4 *Norma etiam erit pro libella, & libellationibus planorum horizontalium si habeat (vt in canone vidisti ex Maurolyco) in altero latere perpendiculum. &c. & alterum latus in tribus, vel pluribus lineis ritè congruat horizontali plano.*

Normæ vsus pro libellationibus planorū horizontalium.

Norma v-sus pro gnomone.

Pro gnomonibus verò ipsa norma est, vtrolibet latere perpendiculariter erecto, verè gnomō in planis quibuslibet. Sed vide inferius plura huc spectantia in § 13.

§. XI.

PARADOXVM, & Corollarium 1.

Vnicà circini diductione absolui pleraq; problemata Euclidis.

H*Abes in praxibus aliquibus quattuor antecedentium problematum 9, 10, 11, 12, ea omnia absolui posse vnicà circini diductione, sicut & 1 problema, & aliqua alia inferius, velut vbi de parallelis ducendis, &c. Quæ res venustatem habet paradoxicam, & illicium, vt tyrones iucundius geometrica discant.*

§. XII.

PARADOXVM, & Corollarium 2.

Circulo absolui omnia problemata libri primi Euclidis, sequentium etiam sex librorum, &c. An & omnia alia problemata elementaria Philosophiæ Geometricæ?

Circulo fere omnia problemata elementaria 1. à soluuntur?

E*Nim vero plane mirum hoc geometricum compendium sit, vt, quemadmodum ex Aristotele diximus ad circuli definitionem omnia machinaria miracula prodire à circularis figuræ (quæ circini filia est) miris paradoxis; ita & in vniuersâ (saltem elementaria)*

ria) Geometricà Philosophià prodamus omnia problemata solo circulo absolui. Tu, amice lector, si per otium liceat, experire saltem per omnia problemata 6 priorum librorum Euclidis. Nos vnico quasi intuitu prouidimus —

I. Omnia libri primi problemata circulo, & circino absolui, siue lineæ diuidendæ, siue parallelæ ducendæ sint, siue anguli diuidendi, & constituendi, siue triangula, quadrangula, &c. formanda. Tu reuise singula huius libri problemata, & praxes videbis exerceri circulo. A quibus deinde pendent & alia.

II. In libro 2. prop. 14, & problema secundum de quadrato constituendo æquali dato rectilineo. atq; etiam propos. 11, vbi problema de sectione lineæ secundum mediam, & extremam rationem, nõ sine circulo fit ex 9 prop. libri 13.

III. In 3 libro centrum inuenire, segmento reliquum addere, &c. in 4. lib. regularium in circulo, & circa regulares figuras circuli descriptiones, &c.

IV. In 6. libro mediæ, tertiæ proportionaliũ inuentiones, similiũ, & datis æqualium figurarum descriptiones, &c. Ac nos in Apiar. 3. Progym. 3. per circulum lineas omnes proportionales e lib. 3 inuenimus.

Habes ex antedictis campum apertum ad circini, ac circuli admirationem, & vsus compendiarios in geometricà philosophia ex occasione praxeon, quæ hic per circulum expediuntur circa 4 antecedentia problemata Euclidis.

Circini, & circuli cõmendationes, vsus, compendia in Geometrica philosophia.

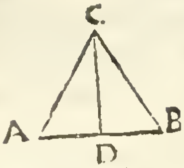
§. XIII.

COROLLARIVM 3, & Vsus —

— Aliquot geometrici lineæ rectæ in triangulis demissæ ab angulo verticali ad basim.

EX Euclidis demonstrationibus in propos. 9, 10, 11, 12 antecedentibus habes vsus etiam geometricè theoricos, præter indicatos in praxibus eorundem Euclideorum problematum.

1 Recta ab angulo ad basim demissa, si sit perpendicularis, & basim diuidat bifariam, indicat triangulum esse vel æquilaterum, vel isosceles. *Quoniam enim (inspice figurã prop. 10. Eucl.) CD est* per-



perpendicularis, hoc est anguli ADC, CDB sunt æquales, & basis AB diuisa est in æqualia AD, DB, estq; CD latus commune, ergo per 4 prop. sunt triangula CDA, CDB æqualia, & bases CA, CB æquales, hoc est isosceles ACB.

2 In isoscele, vel æquilatero recta ab angulo verticali demissa diuidens angulum bifariam, diuidit & basim bifariam, & est perpendicularis. *Ex eadem enim 4 propos. duo latera CA, CB in isoscele sunt æqualia, & CD commune, & angulus ACB bifariatus est in æquales ACD, DCB, ergo & basis totalis AB sunt æquales partiales bases AD, DB, & æqualia triangula CAD, CDB, & æquales anguli CDA, CDB, hoc est recta CD, iuxta definitionē 10, est perpendicularis.*

3 Recta in æquilatero, vel isoscele ab angulo verticali demissa, & basim in æqualia diuidens, diuidit & angulum verticalem bifariam, & est perpendicularis. *Demonstratio est non à 4. prop. vt in antecedentibus, sed ab 8. Nam, si AD, DB sunt æquales, per suppositionem, & CA, CB æquales in isoscele ACB, & CD communis, ergo æqualia sunt triangula, & anguli æquales ACD, DCB, ADC, CDB &c. Sunt hæc theoremata crebri vsus in Geometricis, vt & reliqua huius generis, quæ inferius habebis ad prop. 26, à qua pendent.*

§. XIV.

PROBLEMA GNOMONICVM.

Compendiosè, ac scientificè stylum perpendiculariter erigere in dato quocunq; plano vel horizontali, vel murali.

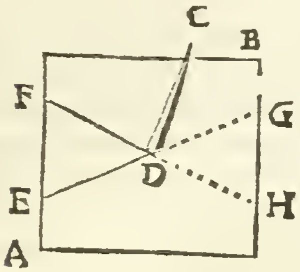
E*Xpedit ad praxes, & theoricen hunc normæ vsum hic reponere. Atq; hic præstabimus quod promisimus in vsu libellæ ad prop. 11. anteced. scilicet vt expressiora habeat lector præsertim circa theoricen geometricam in praxi vel erigendi, vel examinandi erectionem perpendicularem gnomonis, siue styli in dato plano. Igitur—*

1 Su-

1 *Suppono primo definitionem 7.* Plana superficies est, quæ ex æquali inter suas lineas iacet. *Suppono secundo, ex tertia definitione libri* 11, *tunc* dici lineam perpendiculariter in plana superficie erectam cùm rectos efficit angulos cum omnibus lineis rectis ductis per planam. *His positis,*---

Plana superficies quanam.

Linea in plana superficie quenam perpendicularis dicatur.



In plano AB vt scias vel erigere, vel erectum esse perpendiculariter stylum CD, applica normæ angulũ ad D, & alteri normæ lateri erecto perpendiculariter fac congruat stylus DC ad vnam aliquam partem, vel etiam ad duas non indirectum positas, eritque perpendiculariter erectus stylus ad planum. Scio communiter ab alijs fieri applicationes normæ minimùm ternas, at nobis vna, vel altera tantũ sufficit. Ratio etiam huiusce praxis non vna est.

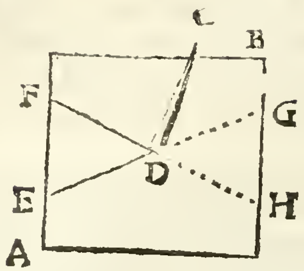
Praxis scientifica erigendi styli perpendiculariter.

2 *Ac quidem pro vnica normæ applicatione, atq; congruentia cum stylo, ratio est, quòd cùm superficies AB supponatur (saltem sine sensibili differẽtia) perfectè plana iuxta 7 defin. & supponatur etiam exactus normæ rectus angulus, vbicumq; ponatur in plano AB normæ alterum latus erectum, semper faciet angulum rectum ad quascunq; lineas imaginariè ductas per planum, ac proinde stylus etiam DC congruens cum normæ latere perpẽdiculariter erecto, erit & ipse ad planum non minus exactè perpẽdiculariter erectus, quã normæ latus, facietq; angulos rectos æque, ac normæ latus perpendiculare cum omnibus lineis, velut cum duabus EG, FH, atq; alijs omnibus se decussantibus in D, posita tamen erectione normæ, vt dixi, perpendiculari per artem, quam in antecedentibus tradidimus de perpendiculo, cuius filum congruat vel cum normæ latere, vel cum media aliqua linea recta in normæ latere &c.*

3 *Atq; in hoc modo per vnicam applicationem lateris normalis, & perpendicularis non erit opus ea cautione, quam communiter ponunt, vt secunda exploratio styli non fiat ad latus quod sit in directum oppositum primæ explorationi: Verbi gratia, si prior normalis lateris applicatio ad DC facta sit altero normæ latere supra verbi gr. lineam FD, & secunda applicatio fiat supra DH, quę in directum posita conficiat vnam totalem rectam FH; licet enim stylus DC sit perpendicularis, hoc est faciat vtrimq; rectos angulos ad rectam FH, non est tamen necessaria illatio: ergo conficit rectos*

Compendium nostrum in praxi, &c.

Fallacia in praxi &c.



ctos angulos vtrimq; etiam cum omnibus alijs rectis per D ductis. Potest enim inclinari stylus DC verbi gratia in alterutram partẽ vel versus E, vel versus G in lineà EG, ac proinde non facere cum eà in D vtrimq; angulos rectos, licet rectos vtrimq; faciat cum recta FH. Hæc fallacia non potest contingere in applicatione vnicà lateris normalis habentis perpendiculũ, & cũ eo congruentis; neq; enim congrueret perpendiculum, cum latere normæ, si latus applicatum ipsi DC inclinaret vel ad G, vel ad E. Igitur modò normæ latus congruat cum suo perpendiculo, in quamcumq; partem applicetur vel semel circa, & ad DC, euidens indicium est ipsius CD vndiq; perpendiculariter erecti.

Ratio, & firmamentum nostri compendij.

4 Neq; vero necesse est explorare vtrum stylus cum omnibus planè lineis faciat angulos rectos, sed satis est vt saltem cũ duabus per D traiectis, per 4. propos. lib. 11. Ac nobis per artem prædictam perpendiculi congruentis cum normæ latere, &c. satis est, ex antedictis, vt cum vnicà linea vnicum rectum angulum efficiat. Sin autem norma sit sine perpendiculo, tunc opus erit saltem duplici ad DC applicatione non in directum posità, quàm alij triplicem volunt, sed vt videbis, apud nos non necessariam.

Geometrica erectio styli perpẽdicularis.

5 Etiã sine norma geometricè sic operari licebit. A pũcto D, vnde erigendus est stylus educ duas nõ in directũ DF, DE, mox effice vti stylus DC erectus angulos duos rectos efficiat FDC, CDE, eritq; demonstratiuè stylus DC perpendicularis toti plano AB. Nam si FDC est rectus, ergo productà FD in H, erit & qui deinceps EDH rectus, iuxta 10 definit. Item recto EDC erit & æqualis alter CDG in producta EG. Ergo, per 4 propos. lib. 11, erit èadem DC perpendicularis ad reliquas omnes ductas in plano AB per punctum D. Quæ quidem illatio è 4. prop. lib. 11, supponit cum Euclide planum AB esse verè planum (iuxta defin. 7, suppositam è lib. 1) & exactum ad libellam in omnibus sui partibus, iuxta praxim antedoctam ad prop. 11. anteced. vbi de libellatione planorum.

Eàdem operà explorare muri, & in muro styli perpendicularitatem.

6 Notandum alteram duarum hic positarum rationem erigendi, vel examinandi perpendicularitatem stylorum in planis, nempe per normam cum perpendiculo futuram vsui pro erectionibus perpendicularibus in planis horizontalibus, & in muris perpendiculariter erectis. Sed in muris latus normæ, cui annexum est

per-

perpendiculum, applicandum erit non stylo, sed muro, eàdemque operà examinabitur & muri perpendicularitas, & styli etiam orthogonia altero normæ latere sine perpendiculo. In planis verò inclinatis vsus erit alterius erectionis, vel examinis circa stylorum perpendicularitatem per normam sine perpendiculo, vel per operationem geometricam, erigendo in D stylum ad geminos angulos rectos cum duabus FD, ED, &c.

Philosophi Geometrici est in praxibus theoricen potius spectare, quam ipsas praxes.

Atq; hæc est geometrica philosophatio circa praxes erectionum perpendicularium, &c. vt Philosopho Geometrico constet quid agatur in materià, circa quam venari debet potius theorias è causis, quàm praxes, quæ sine causis prostant etiam apud rudiores.

§. XV.

SCHOLION.

Infiniti vsus 11, & 12 propos. ac normæ indigitati.

Deniq; infinitæ, atq; eximiæ operationes in vniuersà Mathematicà Philosophià, & in artibus humanis, & quæcunq; opera supponunt, vel egent erectione, vel demissione lineæ perpendicularis, si scientificè, ac ritè confecta sint, gratias habent 11, & 12 propositionibus Euclidis, & ex ijs ipsi normæ; vt videas, mi Tyro, quàm inexhausti thesauri lateant in elementaribus hisce propositionibus, quæ ijs inuisæ sunt, qui oculum animæ non habent illuminatũ à clarissimo lumine Philosophiæ Mathematicæ.

Thesauri infiniti in propositionibus elemẽtaribus ignoti agecmetricis.

§.XVI.

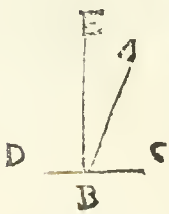
SCHOLION

Indicata apud alios moralia ex 12 prop.

Moralia Platonica vide apud Proclum ad finem com. in 12 propos. Eucl. Inde ornamenta, & vtilia extra figuras deducito pro tuis Auditoribus, ò quicumq; elementa hæc geometrica ab Euclide concinnata publicè doces; sin autem priuatim ea discis, lege etiam pro te indicata moralia.

Propos. XIII. Theor. VI.

Quando linea recta super rectam consistens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.



Recta .n. quædam AB super rectam CD cōsistens angulos faciat CBA, ABD. dico illos aut duos rectos, aut duobus rectis æquales esse. Si .n. CBA ipsi ABD est æqualis, duo [a] recti sunt. Si non: ducatur à pũcto B ipsi CD ad angulos rectos BE. [b] ergo CBE, EBD duo recti sunt. Et quia CBE duobus CBA, ABE æqualis est, si apponatur cōmunis EBD erunt duo CBE, EBD tribus CBA, ABE, EBD æquales. Rursus cum angulus DBA duobus DBE, EBA æqualis sit, si addatur communis ABC, erunt duo DBA, ABC tribus

a def. 10.

b def. 10.

bus DBE, EBA, ABC æquales. Oſtenſum eſt autem & duos CBE, EBD iiſdem tribus æquales eſſe. c Quæ autem eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia: duo igitur CBE, EBD æquales ſunt duobus DBA, ABC: ſed CBE, EBD recti ſunt: igitur DBA, ABC duobus rectis æquales. Si igitur recta ſuper rectam cõſiſtens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales facit. Quod oportuit demonſtrare.

c ax. 1.

§. I.

SCHOLION.

E ſolis primis principijs conſtare poteſt 13 propoſ. Eucl.

Sine neceſſitate propoſ. 11, qua vtitur Euclides in excitandà perpendiculari BE à puncto B, ſi BA non ſit perpendicularis, poteſt demonſtrari hæc propoſ. 13 è ſolis primis geometricis principijs. Nam poteſt accipi ipſa perpendicularis BE pro datà, ſicut & obliqua BA, ita vt dicatur, ac ſupponatur vtraq; linea altera perpendicularis, altera non perpendicularis, & perpendicularis quidem ex def. 10 faciet æquales vtrimq;, ideſt duos rectos, obliqua verò probabitur, non ſine ope datæ perpendicularis, facere & ipſa duobus rectis æquales.

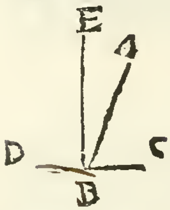
Ex his habes rectè demonſtratam partem poſteriorem caſus 2 in § 12, vbi docetur diuiſio anguli, ad propoſ. 9 antecedentium Euclidis, ex hac 13. &c. relege ibi.

§.II.

SCHOLION

Aliter, etiam non geometricè oſtenditur è communibus notionibus veritas 13 propoſ. Eucl.

Rectè *Proclus:* Linea ſuper recta conſiſtens quantum ab vno recto per declinationem in alteram partem aufert, tantum reliqua per diſtantiam addit. *In figurà Euclidis dū perpēdicularis EB inclinatur ad A, quantū rectus EBC imminuitur in acutum ABC, tantumdē rectus alter DBE augetur in obtuſum DBA, eſtq; idē ſpatium DBE, EBC, quod in æqualia diuiditur à duobus rectis, diuiſum in duo inæqualia ab obtuſo DBA, & acuto ABC.*

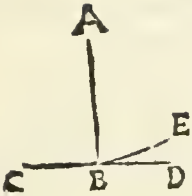


Propoſitio XIV. Theor. VII.

Si ad rectam aliquam lineam, atq; ad punctum in illa datum duæ rectæ non ad eaſdem partes ductæ angulos, qui deinceps ſunt, duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt illæ lineæ.

Ad rectam AB, & ad punctum in illa datum B duæ rectæ BC, BD non ad eaſdē partes poſitæ faciant angulos deinceps ABC, ABD duobus rectis æquales. Dico BD ipſi CB in directum eſſe. Quod ſi BD ipſi BC non ſit in directum, ſit BE. Cum igitur recta AB rectæ

CBE



CBE insistat, [a] erunt anguli ABC, ABE duobus rectis æquales: Sunt verò & ABC, ABD duob. rectis æquales: anguli igitur CBA, ABE sunt angulis CBA, ABD, æquales. Cõmunis ABC auferatur, [b] reliquus ergo ABE reliquo ABD est æqualis, minor maiori, [c] quod fieri nequit. Non ergo BE in directum est ipsi BC. Similiter ostendemus nullam aliam esse, præter BD, in directum ergo est BD ipsi CB. Si ergo ad rectam, & ad punctum in ea datum duæ rectæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt illæ duæ lineæ. quod demonstrare oportuit.

a prop. 13.

b ax. 3.

c ax. 3.

§. I.

SCHOLION

Ad vsum Geometricæ Conuersionis.

1 *Hoc theorema conuersum est præcedentis. De conuersionibus Geometricis Proclus egregia habet in com. ad sextam propos. & ad hanc 14, & ad propos. 19. ex eo nos hìc aliqua quæ vsui magis futura sunt. Conuersio Geometrica est quadam quasi inuersio dati in quæsitum, & quæsite in datum, idest cum in antecedenti alterà propositione aliquid datum est, & quæsiti facta est, ac demonstrata conclusio, in consequenti verò altera propositione id, quod in præcedenti fuerat quęsitum, accipitur pro dato, & id quod erat datum fit quæsitum, ac demonstratur. In hoc exemplo: Antecedens propositio habebat pro supposito, siue dato rectam lineam consistentem super rectam, pro quæsito demonstrando, ac demonstrato habuit ab eà lineà effici angulos duobus rectis æquales. Hoc vero conuersum theorema antecedentis accipit pro dato fieri angulos duobus rectis æquales ad idem punctum à lineis, &c. & concludit pro quæsito datum antecedentis, nempe: ergo (ac demonstrat) quæ ad eos angulos ex opposito*

Quid sit conuersio Geometrica.

posito conueniunt, sunt in directum, siue quod idem est, non sunt duæ rectæ lineæ, &c. Hæc ex com. ad 6 propos. hic applicata.

Conuersiones Geometricæ fiunt per deductionem ad impossibile.

2 *Iam vero hic ad praxim affert Proclus documentum:* Quod igitur in antecedenti datum fuit, in hoc quæritur, per deductionemq; ad impossibile ostenditur. hoc modo enim conuersa theorematum ostendi debent; in Problematibus vero præcipuas quoq; demõstrationes suscipere. *Rationem affert huius præcepti, ac vsus in com. ad Propos.* 19. Elemẽtorum institutor varietatem demonstrationis deuitans (*in conuersionibus*) ab hoc demonstrandi modo se abstinuit (*nempe à demonstrationibus affirmatiuis per noua media*) ostensioneq; vsus fuit, quæ ex diuisione ad impossibile ducit, quippe qui conuersum præcedenti, nullo interiecto medio, facere voluit. Siquidem octauum etiam, quod quarto conuertitur, magnam attulit perturbationem, quippe quod conuersionem cognitu difficilem fecit. Præstantius enim est, continuationem seruando, per impossibile Theoremata, quæ conuertuntur, ostendere, quàm præcipua demonstratione continuitatem discerpere. Propterea sanè conuersa ferè omnia Theoremata per impossibile ostendit. *Satis prædicta sunto ad cognitionem, & vsum Conuersionis Geometricæ. Relege ad hæc ea, quæ notauimus ex Proclo ad 1 propos. vbi de deductione ad impossibile.*

Ratio eius deductionis &c. in conuers.

§. II.

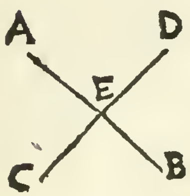
Vsus geometrici, & aliæ demonstrationes propos. 14.

M*Emori animo recolenda est hæc propos. 14. Nam eius vsus & creber, & magni momenti est in Geometricis demonstrationibus, præsertim vbi demonstrandum est rectæ alicuius partes esse in vnà eàdemq; linea; quod est opus plerumq; ostendere, ac quod non solum hic ab Euclide, sed & aliter demonstratur etiam à Proclo, & Peletario, vt videre est apud Commandinum, & Clauium ad propos. 15. Eucl. Videbis vsum mox apud nos in demonstratione rei magni momenti circa angulos incidentiæ, ac reflexionis ex 15 prop. Eucl.*

Prop.

Propoſitio XV. Theor. VIII.

Si duæ rectæ ſe inuicem ſecuerint, angulos ad verticem æquales facient.



RECtæ AB, CD ſecent ſe in E puncto. Dico quod tam angulus AEC angulo DEB, quàm CEB angulo AED æqualis ſit. Cum enim recta AE rectæ CD inſiſtat faciens angulos CEA, AED, a erunt ipſi duobus rectis æquales. Rurſus cùm recta DE rectæ AB inſiſtat, faciens angulos AED, DEB, b erunt & ipſi duobus rectis æquales. Oſtenſi autem ſunt & CEA, AED duobus rectis æquales: Quare duo CEA, AED duob s AED, DEB equales ſunt. auferatur communis AED, ergo reliquus CEA reliquo BED æqualis eſt. Pariter oſtendetur CEB, DEA æquales eſſe. Si ergo duæ rectæ ſe inuicem ſecuerint, facient angulos, qui ad verticem ſunt æquales. Quod demonſtrare oportuit.

a *prop.*13.1

b *prop.*13.1

§.I.

SCHOLION

Veritas 15 propoſitionis quî pateat, etiam ſine prolixiore geometricâ demonſtratione.

T*Ota vis, & fundamentum huius propoſitionis eſt in protenſione linearum rectarum ſe mutuò ſecantium. Nam (vt rectè Proclus)* hoc theorema partium ſimilitudini rectarum linearum, in extremitatibusq; ſitui confidit.

Quo-

Quoniam sic se habentes lineas, & se inuicem secantes, similes ad inuicem vtrimq; inclinationes, ad ipsasq; habere necesse est. *Affert deinde exemplum in sectionibus curuarum, quæ aliquando faciunt angulos ad verticem inter se inæquales. Quod exemplum intelliges in figurà inferius, atq; in primo paradoxorum, quæ afferemus ex Apiarijs nostris Philosophiæ Mathematicæ. Ergo Proclus*: Circumferentiæ siquidem, omninoq; non rectæ lineæ se inuicem secantes, angulos ad verticē haud necessario æquales faciunt, sed interdū quidē equales, interdū verò inæquales. Si.n. duo æquales circuli per centra se inuicem secuerint, aut etiam non per centra, lunulares angulos ad verticem existentes æquales efficiunt; verum non etiam reliquos, vtrimq; cauum scilicet, atq; vtrinque conuexorum, sed alterum maiorem. *Concludit contrarium de angulis rectarum ad verticem, quia rectæ carent causà, quà curuæ faciunt inæquales angulos ad verticem.*

Curuæ lineæ mutuò se secantes, non necessario, vt rectæ, faciūt angulos ad verticem æquales.

In rectis autem lineis situs (*scilicet idem omnium partium in directum &c.*) in extremitatibus æqualem alterius segmentorum ad alterius segmenta distantiam efficit.

Paradoxa de angulis ad verticem, ex Apiàrijs Philosophiæ Mathematicæ.

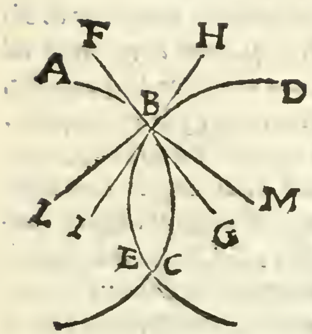
Vide Apiar. 2, Progym. 2, Propos. 4, 5, 6, & coroll. Omissis angulorum aliquorum curuilineorum, & mixtorum nominibus, & definitionibus, quas ibi habes, hìc breuiter accipe aliqua, quæ ibi pluribus &c.

§. II.
PARADOXVM

Anguli ad verticem partim æquales, partim inæquales.

Circuli æquales ABC, DBE secent se in B. Fiunt quatuor anguli ad B, nempe ABD è conuexis AB, BD, & illi ad verticem è concauis CBE, tertius, & quartus ad eundem verticem B oppositi è concauis, & conuexis ABE, DBC.

Pri-



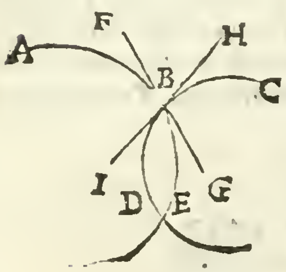
1 *Dico duos ABD, EBC esse inequales, nempe maiorem esse A B D ipso EBC. Positis enim ad B tangentibus FG, HI, quoniam rectilineus FBH est æqualis rectilineo ad verticem IBG, per hanc 15 prop. & curuilineus EBC est pars rectilinei IBG, erit & pars, siue minor etiam rectilineo FBH, at FBH est pars ipsius ABD, ergo multo erit minor eodem ABD ipse EBC.*

2 *Dico duos ABE, DBC esse æquales. Nam ductis ex B per centra L, M semidiametris, quoniam æqualium circulorũ æquales sunt semicirculi, & æqualium semicirculorum æquales anguli DBM, LBC, si apponatur commune CBM, erit curuilineus DBC æqualis rectilineo LBM. Eodẽq; modo quoniam æquales sunt ABL, EBM, apposito communi LBE, erit curuilineus ABE æqualis eidem rectilineo LBM; ergo erunt, per 1 ax. inter se æquales curuilinei ABE, DBE. Quod erat dem.*

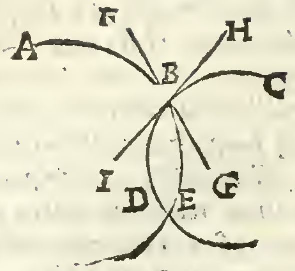
§. III.

PARADOXVM.

Anguli ad verticem omnes inæquales.



S*Ecent se inæquales circuli ABE maior, & minor CBD, & sint tangentes in B puncto cõmunis sectionis rectæ HI, GF; duo quidem anguli ABC, DBE sunt inequales, vt nuper ostẽsum est ex 15 prop. Eucl. Dico prꝗterea duos etiam ABD, CBE ad verticem oppositos esse inæquales. Hic erit & paradoxum vt demonstremus propositum paradoxum contra 15 proposit. Euclid. ex eadem 15 proposit. non solum de duobus, vt iam factum est,*



sed etiam de reliquis duobus, ac de binis oppositis quatuor angulorum ad verticem, eos esse inter se inæquales.

Minoris circuli angulus cōtactus est maior angulo contactus maioris circuli.

Ratio indicata.

Quoniam enim, per 15 proposit. Eucl. sunt æquales FBI, HBG, & minoris circuli CBD anguli contactus HBC, IBD sunt maiores angulis contactus FBA, GBE maioris circuli ABE (augentur n. minoris circuli anguli contactus propter peripheriã curuatiorem recedentem magis à rectà tangente, quam peripheria maioris circuli. Vide & Clau. ad 16 pr. lib. 3. & Cardan. ibid.) Si ab æqualibus FBI, HBG auferãtur HBC maior, FBA minor, remanet ABI angulus maioris semicirculi maior angulo CBG minoris semicirculi. Ac si ipsi ABI apponatur IBD maior, ipsi vero CBG apponatur GBE minor, erit totus ABD maior toto CBE. Quod erat dem.

§. IV.

SCHOLION.

Anguli ad verticem etiam curuilinei sunt æquales.

NE contradictorium arbitrere hocce scholion præcedentibus nostris paradoxis, ac demonstrationibus, intellige de angulis sphæricis, iuxta Clauij 1 defin. in lib. de triang. sphær. quos in sphæræ superficie duo arcus circulorum maximorum se se mutuò secantes continent. Vide ibi Clauij propos. & demonstr. 6.

§. V.

§.V.

THEOREMA.

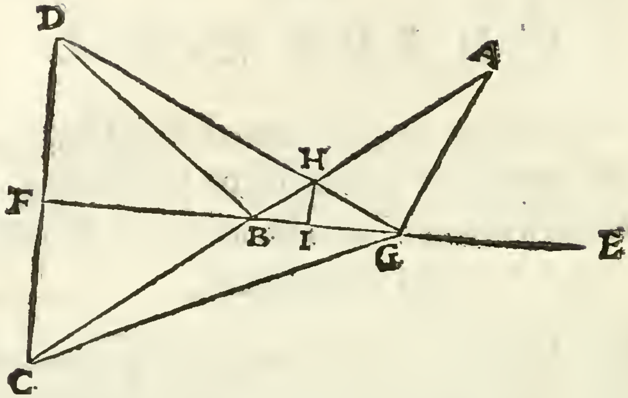
Ab æqualitate angulorum ad verticem prodit æqualitas angulorum incidentię, ac reflexionis, iuxta Aristotelis, & Vitellionis sententiam.

1 V*Ide Aristot. lib. 2. de anima, tex. 80. & sect. 11. Problematum, vbi de ijs, quæ ad sonos, &c. problemate 23. & sect. 16. probl. 4, & 13. Verba ex 13 probl. quæ, ni fallor, reconditum habent sensum, ac dignum ingenio tanti Philosophi, quæq; à nobis explicanda sunt ex hac 15 prop. Euclidis, ea sunt:* Omnia autem in angulos resiliunt similes, quoniam eodem ferri cogantur, quò motus ducat, quem ijs dedit qui miserit. Eo autem vt angulo vel acuto, vel recto ferantur omniuo incidit. Cum ergo quod retorserit vetet quò minus directè motus agatur, pariter & rem, quæ fertur, & eius impetum nimirum prohibere potest. Vt igitur in speculis extremum lineæ rectæ, quò se aspectus coniecerit, idem refrangitur; ita in ijs quæ feruntur fieri ex aduerso solet, quippe cùm angulo tanto retorqueantur, quanto vertex cōstiterit. Ita enim intelligendum est, vt transferri simul & angulus, & delatio debeat: quo facto in angulos resultare similes esse necesse palam est. *Quasi dicat: Quid mirum angulum reflexionis esse æqualem angulo incidentiæ, cum ipsa reflexio nihil aliud esse videatur, quam flexio lineæ, quæ in directum iret, ac secaret planum, à quo impedita flexionem etiam facit anguli inferioris ad verticem, & replicationem in angulum reflexionis? Cum autem anguli ad verticem æquales sint ex 15 pr. Eucl. nil mirum est angulum reflexionis æqualem esse incidentiæ angulo, cui erat futurus ad verticem &c.*

Reflexio est ex Aristotele quasi replicatio anguli, qui fieret ad verticem æqualis angulo incidentiæ.

Confirmat expressius Aristotelem Vitellio.

2 *Vitellio lib. 5. optic. propos. 20 mutatis tantum literis, & applicatis nostræ figuræ:* Si linea incidētiæ, quæ, sit exempli caussa, AB, lineam rectam FBE, protractam in superficie plani speculi, vel contingentem superficiem conuexam, vel concauam ali-



cuius speculi sine reflexione penetraret in puncto B vsq; ad punctum C, palam, per 15 propos. lib. 1. Eucl. quòd angulus incidentiæ ABE fieret æqualis angulo FBC. si ergo fiat reflexio secundum lineam BD, conuenientius est vt fiat secundum angulum æqualem illi contraposito, quam secundum aliquem alium angulum, ita vt angulus FBD fiat æqualis angulo FBC, & angulo ABE. Si enim punctis F, & E existentibus immotis, linea FE imaginetur reuolui, tunc linea CB, propter æqualitatem angulorum CBF, & FBD, cadet super lineam BD, & hoc videtur importare nomen reflexionis. *Igitur hi Philosophi nobiscum conspirant, & adsentiuntur æqualitatem angulorum incidentiæ, ac reflexionis siue in sonis, siue in proiectis, siue in illuminationibus, siue in visionibus prodire ab hac 15 propos. Eucl. vt videas quàm copiosi thesauri lateant in hisce propositionibus.*

Æqualitas angulorum incidentiæ, & reflexionis ab hac 15 propos.

§.VI.

§. VI.

SCHOLION,

In quo demonstratio geometrica prædictorum ex Aristotele, ac Vitellione.

1 LIcet, posito quod angulus incidentiæ sit æqualis angulo reflexionis, consequatur ex hac 15 Eucl. angulum reflexionis esse æqualem et angulo, qui est ad verticē ipsi angulo incidentiæ, quippe ad verticem ęqualibus; tamen vt Tyronibus occasio præbeatur consequendi habitum geometricè demonstrandi, lubet ab Aristotele, & Vitellione asserta demonstrare geometricè etiam in mox sequentem modum.

Iuxta vero ea quæ docuimus ad 1 propos. huius lib. Euclidis, duo distinguenda hic sunt, scilicet datum, & quæsitum, siue effectus, & causa effectùs. Datum igitur, & effectus, quæ supponũtur, hic sunt anguli incidentiæ, & reflexionis æquales, quæsitum vero, & causa eius effectùs dicuntur esse ab Aristotile, & Vitellione æqualitas anguli reflexionis cum angulo, qui est ad verticē angulo incidentiæ. Quod quæsitum mox geometricè demonstro.

Distinguitur implicat

Causa cur angulus reflexionis sit æqualis angulo incidẽtiæ.

Sit angulus ABG incidentiæ æqualis angulo DBF reflexionis, & à termino reflexionis D demittatur perpendicularis DF ad rectã FE, & protrahatur, ac secetur FC ipsi FD æqualis, iũgaturq; recta CB. Dico angulum reflexionis DBF æqualem esse angulo FBC, & ipsum FBC esse ad verticem angulo incidentiæ ABG, ac proinde æqualitatem anguli reflexionis DBF cũ angulo incidẽtiæ ABG prodire ex æqualitate, & quasi replicatione anguli ad verticem facta in angulum reflexionis. Quoniam enim in triãgulis DBF, BFC duo latera DF, FC secta sunt æqualia, & latus FB est commune, & anguli ęqualibus lateribus comprehensi DFB, BFC sunt recti, ac æquales, ergo, per 4 propos. huius, sunt & reliqua latera DB, BC, & reliqui anguli DBF, FBC, &c. æquales.

Demõstratio Geometrica eius causa.

2 Iam verò ipsum FBC esse ad verticē ipsi ABG demonstrauero, si probauero ipsas CB, BA esse in directum, ac vnam rectam, quæ secat in B rectam FE. Quoniam igitur angulus CBF probatus

est

est æqualis ipsi FBD, & FBD datus est, ac suppositus æqualis ipsi ABG, erit ergo CBF equalis eidem ABG. Recta verò CB facit ad B angulos FBC, CBG duobus rectis equales, per 13 prop huius; apposito igitur communi CBG ad equales FBC, ABG, erunt æquales FBC, CBG duobus CBG, GBA; ergo & duo CBG, GBA sunt equales duobus rectis; ergo, per 14 prop. huius, in directum sunt CB, AB, ac proinde angulus FBC est ad verticem angulo incidentiæ ABG. Rectè igitur Arist. & Vitell. affirmant angulum reflexionis esse replicationem anguli, qui est ad verticem angulo incidentię.

Aristoteles, & Vitellio à nostra demonstratione cõfirmati.

3 Demonstrationem alteram geometricam, qua quod hic datum est, ibi tanquam quæsitum probetur, nimirum angulos incidentiæ, & reflexionis necessariò esse debere equales, videbis inferius suo loco ad 20 propos. Eucl. qua nititur ea demonstratio, supposito naturali principio ibi exemplis ostenso, quòd natura sẽper etiam impedita (vt in reflexionibus) operatur per breuissima. Quod principium hìc etiam in re nostra vide mox ex hac nostra demonstratione vnà cum alijs corollarijs.

§. VII.

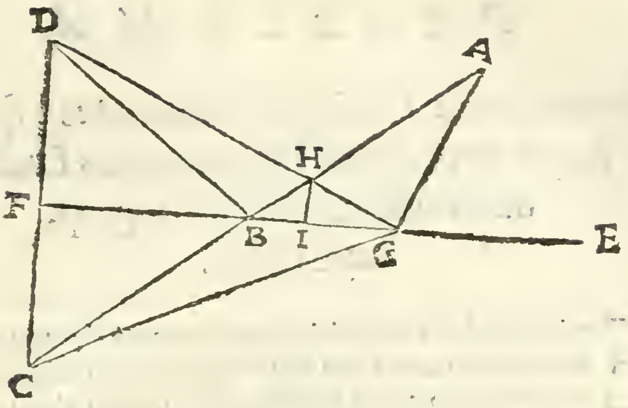
Corollaria Catoptrica eximia ex nostra demonstratione, immo ex 15 Eucl.

1 INcidentia, & reflexio fiunt per lineas breuissimas. Nam ipsæ AB, BD ostensę sunt æquales vnicæ rectę AC. Hinc etiam habes vnde confirmes ideo fieri reflexiones ad angulos æquales, &c. quia per eam angulorum æqualitatẽ fit operatio naturę per breuissima, etiam cum impeditur, ac repellitur à suo cursu. Quemadmodum per angulos ad verticem equales FBC, ABE per vnicam rectam, ac breuissimam inter AC, fieret operatio, sic, translato per reflexionem angulo inferiori ad verticem FBC in superiorem FBD reflexionis, breuissima fit etiã in reflexione operatio. Sed expressius inferius de hoc ad 20 propos. Euclidis.

Per breuissimas lineas fieri incidentiã, & reflexionẽ geometricè, ac breuissimè demonstratum.

Hic item habes per modum corollarij breuissimè demonstratum id, quod Optici aliqui Philosophi seorsim demõstrant. A speculo, ac planis reflectuntur eædem lineæ, quæ irent rectà per planum

A speculo reflectitur eadem linea, quæ recta trãsiret per planum speculi perforatum.



num perforatum. *Eadem enim ABC, quæ secaret, & transiret per B probata est resultare, ac transferre partem BC in æqualem BD, dum angulum FBC æqualem ipsi ABE transfert in FBD.*

3 *Quemadmodum in nostris Catoptricis Ap. 7 ostendimus rectas directas ad punctum ex cōparatione hyperboles, atq; impeditas à conuexo hyperbolico, per angulos equales resultare in alterū punctum ex comparatione contrapositę; sic & in speculo plano FE, posità perpendiculari DC terminante tam directam, quam reflexam radij proiecturam, dum impeditur directa ne eat ex B in C, per anguli ad verticem æqualis replicationem ex B reflectitur in punctum D quasi oppositum, & contrapositum ipsi C in distantia FD equali distantię FC. Pares anguli, paria latera demonstrata, &c. Vide, amabo, eam miram proprietatem contrapositarum hyperbolarum apud nos in Apiar. 7, Progym. 1, corollar. 4.*

Parallelismus reflexionis à plano cum hyperbolico speculo, &c.

4 *Vides rectè ab Opticis Philosophis, vt probent reflexionem terminaturam ad D, probari tantum reflexionem fieri ad angulos æquales in B; sic enim breuissimis lineis itur ad D, omnemq; breuitatem per angulorum ęqualitatem semper affectat natura. Vide nos Apiar. 7, progym. 2, Schol. 2, post proposit. 4.*

Cur optici probent reflexiones p lineas breuissimas ab angulorum incidentia, & reflexionis æqualitate.

§.VIII.

§. VIII.
PROBLEMA.

Inaccessarum Turrium dimensiones è speculis, per hypothesin in Catoptricis Euclidis confirmatam ex 15. prop. huius lib. 1.

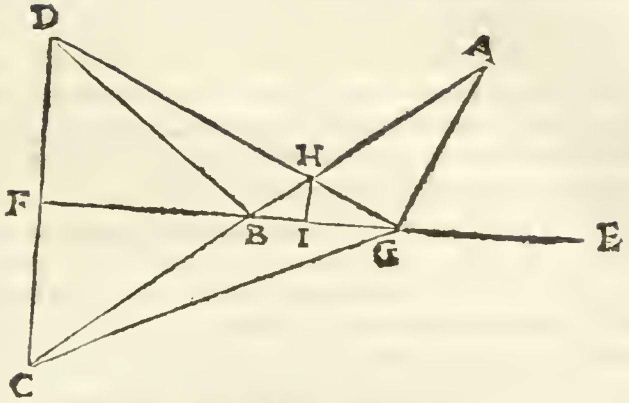
EVclides in suis catoptricis suppositionem habet tertiã, quę in versione Ioannis Penæ est huiusmodi: Si speculũ collocetur in plano, cui ad rectos angulos altitudo aliqua erecta sit, quã rationem habet linea interiecta inter spectatorem, & speculum ad lineam interiectam inter speculum, & erectam altitudinem, eandem rationem habere spectatoris altitudinem ad altitudinem insistentem ad rectos angulos plano, in quo est speculum: *Explico in exemplo nostrę figuræ. Speculum sit in* B, *altitudo, ceu turris sit FD, spectator sit IH spectans ex H in B reflexum verticem D, vt BI (supponit Euclid.) distantia inter speculum & spectatorem se habet ad BF distantiam inter speculũ & turrim, ita spectatoris altitudo IH ad turris altitudinem FD. Quã Euclidis suppositionem si quis forte sine aliqua probatione non facilè concesserit, habet ex hac 15 propos. vnde eam probet, positâ Aristotelis, & Vitellionis doctrinâ à nobis geometricè demonstratâ, nempe angulum reflexionis esse angulum, qui esset ad verticem lineæ visuali, & lineæ ductæ per planum speculi, &c. Sic enim fiunt duo triangula æquiangula HIB, BFD. Nam Anguli ad F, & I sunt recti, & angulus incidentiæ, & reflexionis vtrimq; ad B sunt, per prædicta, æquales, & tertius ad H ęqualis tertio ad D; ergo, per 4 propos. lib. 6. (vt ibi expressius videbis: hic tantum praxim ex 15. propos. proponimus) vt* BI *ad IH, ita* BF *ad FD.*

Euclidis suppositio catoptrica demonstrata ex hac 15 prop.

Sit igitur inuenta, exempli gr. distantia BF à speculo ad turrim quadrupla distantię BI à speculo ad spectatorem, erit ergo & altitudo turris FD quadrupla altitudinis spectatoris IH; siue in alia proportione, iuxta inuentam proportionem inter ipsas IB, BF.

Sed vsum ampliorem dimensionum per specula vide apud nos in Apiar. 2, Progym. 3, propos. 12. &c.

§. IX.



§.IX.

PARADOXVM GNOMONICVM è 15. Propoſ.

Theorice, atq; animaduerſio circa horas catoptricè indicandas.

1 SI fingas murum eſſe DG, & ſtylum FB, à cuius vertice B ſol, qui ſit in A, iaciat BC radium in lineas horarias deſcriptas infrà, & citra F, ſi loco verticis ſtyli in B colloces ſpecillum, reflectetur, ſiue abibit linea radioſa BC in radium BD ad angulos pares, nempe tranſlato angulo FBC in FBD, iuxta a nobis demonſtrata, ac in D indicabitur hora, tranſlato, & inuerſo horario in partem ſuperiorem ſupra, & vltra F.

Horas inuerſe, & catopiricè indicare.

2 Circa quem vſum animus aduertendus eſt ad 3 corollarium ex theor. 28. optic. acutiſſimi Maurolyci. Quoniam enim à nobis etiam paullo ſuperius ad hanc 15 propoſ. Eucl. demonſtratum eſt, eoſdem radios reflecti è ſpeculo, qui irēt trans ſpeculum ſi perforatū eſſet vbi ſit reflexio, ideo infert Maurolycus: Hinc etiam ſequitur illud ſcitu iucundū, vt lux ſolis à ſpeculo reddita paulatim teres fiat, atq; ad radiantis circuli rotunditatem propius accedat. Et cætera, quæ ibi. Vbi docet radios e ſpecillo reflexos ire in formam

coni, cuius vertex sit in puncto reflexionis, basis in termino, verbi gratia in muro, in quo delineatæ sint horæ. Quemadmodum ijdem radij si, vbi est punctum reflexionis, esset foramen, transirent, ac diffunderētur in conū, &c. Itaq; indicatio illa horarum per radios eos reflexos fit non à mucrone, & styli vertice, sed à circello luminoso. Vnde illud incommodi accidit, vt particulæ horarum, siue puncta spatij inter horarias lineas intercepti non bona fide indicētur, neq; in puncto, sed in latitudine luminosæ areolæ.

Incommodum in indicatione catoptricā horarum.

Modus alter sine incommodo prædicto indicādi horas catoptrice.

3 *Nos in fine Apiarij nostri 9 Gnomonici propterea vsum catoptricum habemus in mobilibus horarijs, qui vsus nō est obnoxius prædictę fallacię. Radio enim solis reflexo vtimur, qui vel per vmbrā è styli mucrone indicet in puncto, vel dirigat tantùm latus quadrantis ad horas e perpendiculo indicandas. Illuc reuise.*

Theorice vsus illius nostri catoptrici patet ex dictis ad hanc 15 *propos. Eucl. Radius enim reflexus eleuatur ad eamdem altitudinem solis, (ac ritè regit quadrantis latus, &c.) secundum quam descendebat ad incidentiam, &c. ob æqualem vtrinq; angulum, circa punctum in aqua, vel speculo, in quod radius incidit, &c.*

§. X.

COROLLARIA

In Apiarijs Philosophię Mathematicæ indicata e 15 propos. pro reflexionibus lucis ad vstoria puncta, & vstorias lineas: pro reflexionibus vocis ad musicam, & sonimetriā reflexam; pro descriptionibus conicarum sectionum &c.

QVæcunq; mira vel apud alios, vel apud nos habes ex reflexionibus lucis, ac vocis, quæ omnes reflexiones demonstrantur, vt vidisti, tamquam e supremo principio, ex

hac

hac 15 Euclidis, ea omnia accepta sunt referenda huic eidem elementari propositioni 15. Huc ergo pertinent demonstrationes, & praxes, quas apud nos habes per sequentes propositiones, ac paradoxa.

1 Vstoria puncta eiaculari è speculo concauo sphærico, è zonâ sphæricâ, &c. *Apiar. 7. Progym. 2. Proposit. 1. & 2.*

2 E speculis hyperbolicis concauis, & conuexis puncta, & lanceam, siue cylindricam vstoriam virgam, &c. *Apiar. eod. Progym. 1, per omnes eius progymnasmatis propositiones, corollaria, scholia, &c.*

Puncta, & lancea vstoria catoptrica, è speculo hyperbolico.

3. Hyperbolen describere, &c. *ibid.*

4 Demonstratio, & vsus admirandæ proprietatis in parabolico speculo, in quod cadentes radij paralleli axi, &c. omnes vnum ad punctum vstorium reflectuntur. *Ap. eodem, Progym. 2. coroll. 3. post prop. 4.*

5 Vstoria suppellex catoptrica varia. *Apiar. eodem Progym. 3. propos. 5.*

6 Lineas, siue cylindros graciles vstorios è speculis parabolicis concauis, & conuexis eiaculari, & earum eiaculationum demõstrationes. *Apiar. eod. Progym. 2. coroll. 4, & 5, post propositionem 4. & Progym. 3. Proposit. 7, 8, & scholijs ad eas propositiones.*

è speculo parabolico lineæ vstoriæ.

At verò circa sonos, ac voces quæ ad hanc 15 prop. Eucl spectant, & ab ea pendent in reflexionibus aliqua sunt, velut sequẽtia.

7 Ellipseos descriptiones geometricæ, ac demõstratæ, cõstructiones tuborum, theatrorũ, fornicum ellipticorum ad auditiones, harmonias, *&c. quæ pendent à reflexionibus per breuissimas lineas, & angulos æquales iuxta demonstrata ad hanc 15 prop. Eucl. In Apiar. eodem 10. progym. 2. propositione 6. ad finem Apiarij.*

Musica, & sonometrica problemata, instrumenta, theoremata ex hac 15 prop.

COROLLARIVM EVCLIDIS post 15 prop. ex Proclo.

P*Roclus*: ex his manifeſtum eſt quod, ſi duæ rectæ lineæ ſe inuicem ſecuerint, quatuor angulos quatuor rectis æquales faciunt. ***Ex Proclo etiam Commandinus, Orontius, Clauius &c.***

§. I.

SCHOLION I.

Corollarium hoc Euclidis eſſe. De Corollarijs, & Poriſmatibus Geometricis. Ac non ſine morali ſtrenula, & eruditione.

Cur hoc corollariũ nõ in vulgatis exemplaribus.

Poriſma quid ſignificet.

Poriſma geometricũ quodnã genus propoſitionum ſit.

Interpretis nonnemini incuriã gentia.

1 H*Oc primum, atq; vnicum extat corollarium Euclidis in hoc lib.1. In 2, & 3, & 6. libris nonnulla ſunt alia. Euclidis verò corollarium hoc eſſe patet ex Proclo. Quod verò in vulgatis exemplaribus deſideretur, id factum puto errore eorum, qui olim Euclidem ediderunt, abſtractis commentationibus Theonis, atq; hoc etiam corollario, dum id putarunt eſſe Theonis. Vide nos inferius ad propoſ. 23. vbi plura huc ſpectantia.*

2 Πορίζω, πορίζομαι, πορισθῆναι, πορίζεσθαι *Græcis ſignificãt quærere, comparare, comminiſci, excogitare, ac præterea lucrum fieri, quæſitum facere. Inde* πόρισμα *ſignificat Geometris non ſolum lucrum, additamentum, ac latinè corollarium, vt vulgo interpretantur, ſed etiam ſignificat genus quoddam propoſitionum, in quibus fit inquiſitio, comparatio, comminiſcẽtia, excogitatio ignorati alicuius propoſiti geometrici. Itaq; aliqui parum diſtinctè Proclum interpretati ſunt dùm eodem nomine corollarij abuſi ſunt etiam vbi Proclus aliqua de Euclidis Poriſmatibus (quæ non extant)*

tant) *affirmat. Nos igitur distinctè, ac apertè ad tollendas tyronibus Geometricis hallucinationes, & ad ingenerandam geometricam cognitionem non solum Corollariorum, sed & Porismatum, aliqua ex Pappi præfatione in lib. 7, & ex Proclo ad hoc Euclidis corollarium apponemus.*

3 *Proclus:* Vnum quid Geometricorum nominum Corollarium est. *(quod græcè apud Proclum est πόρισμα)* Hoc autem duplex quidpiam significat. Vocãt enim corollaria quæcumq; etiam Theoremata vnà cum aliorum demonstrationibus probantur, velut lucra inexpectata, atq; emolumenta quærentium existentia. *Hæc propriè corollaria.* Porismata *verò, de quibus pergit Proclus:* Et quæcumq; quæruntur quidem, inuentione autem indigent, & neq; generationis solæ causa quæruntur, neq; simplicis contemplationis. *Addit exempla Theorematis quidem, in quo sola veritatis, siue proprietatis in figurà geometricà cognitio quæritur, velut cum ostẽditur Aequicrurium triangulorum angulos ad basim esse æquales. Problematis verò dũ quæritur effectio, velut sectio lineæ æqualis datæ. &c. Corollarij denique, siue potius Porismatis exemplum in propositione 1. lib. 3. Dati circuli centrũ inuenire, vbi fit inuestigatio centri, non cõtemplatio, vel effectio, &c. Pergit Proclus de Porismatibus.* Vel quæcunq; id genus alia quodammodo inter Problemata, atq; theoremata sunt. Neq; enim Quæsitorum ortus in his, neq; sola cõtemplatio, sed inuentio est. Opus est siquidem Quęsitum in conspectu, & præ oculis ponere. Talia igitur sunt quæcunq; etiam corollaria *(distinctius ex græco, Porismata)* Euclides scripsit, quippe qui libros corollariorum *(porismatum)* construxit. Verum de huiuscemodi quidem corollarijs *(Porismatibus)* dicere prætermittatur. Quæ autem in elementari institutione sunt corollaria *(sic propriè, ac verè dicta, & à Porismatibus prorsus distincta)* simul quidem cum aliorum demonstrationibus apparent, ipsa verò non præcipuè quæruntur. &c. *vt habes exemplum in hoc Euclidis corollario, cui applicabis hactenus dicta, & alia apud eundem Proclum ad prop. 1. Eucl.* Dicitur autem propriè corollarium, &c. *vt hìc corollarium eductum ex propos. 15.*

4 *Pappus:* Euclidis Porisinata tribus voluminibus contẽta sunt; opus quidem artificiosissimum, & vtilissimum ad resolutionem obscuriorum problematum, &c. *Theorema, Problema, Porisma:* Horum trium differentiam veteres multo melius cognouisse ex definitionibus perspicuum est. dixerunt enim theorema esse quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem. Problema quod affer-

Porisma geometricum propriè quid.

Porismatũ exempla in Theorematibus, — & in Problematibus.

Porismata quasi media inter Theoremata, & problemata.

Non contẽplatio, vel effectio, sed inuentio quæritur in Porismate.

Euclidis olim libri Porismatũ.

Apud Pappum expressa differentia inter Theoremata, Problemata, Porismata.

affertur in conſtructionem propoſiti. Poriſma verò quod proponitur in poriſmum, hoc eſt in inuentionem, & inueſtigationem propoſiti. Immutata autem eſt hæc Poriſmatis definitio à iunioribus, qui nequeunt omnia inueſtigare, &c.

Corollaria, ideſt lucra geometrica vera lucra. & cur.

5 *Quoniam hìc de corollarijs actum eſt, ne abeas ſine corollario, accipe lucrum morale quod ſequitur à Proclo, & à nobis.* Hæc lucris aſſimilauimus, & fortaſſe mathematicarum rerum periti hoc ipſis impoſuere nomen, oſtendentes Vulgo, quippe quod apparenti gaudet lucro, quod vtiq; vera Dei munera, veraq; lucra hæc ſunt, non autem quæ illi videntur. Hæc ſiquidem facultas illa, quæ in nobis eſt, producit, feraxq; ſcientiæ vis præcipuis quæſitis adijcit, copioſas theorematum opes manifeſtans.

Corollariũ, ideſt auctarium ſupra debitã menſuram.

Ἐπιφορά *Græcis eſt* τὸ προστιθέμενον τῷ μισθῷ, *ideſt quod ſuperadditum eſt mercedi. Et, vt ait Varro lib. 1 de ling. lat. Significat id, quod additum eſt præterquam quod debitum, tanquam auctarium quoddam, & id, quod ſupra menſuram, vel pondus iuſtum adijcitur. A corollis nomen deductum, quod hæ, cùm placuerunt Actores, in ſcenà dari ſolitæ ſint.*

Corollariũ à corollis, & cur.

6 *Corollarium verò morale Procli, quo affirmat lucra ſcientiarum, atq; animi vera eſſe corollaria, multo quidem verius eſt de virtutibus moralibus, quæ non ſolum ornant vt ſcientiæ, ſed pacant animum, & in vtràq; fortunà tutum, ac trãquillum efficiunt; tamen, quoniam hìc in ſcientijs contemplatiuis, non in praxibus moralibus verſamur, iuuat Proclo fauere hiſtoriolæ particulà, quam pluribus narrat Vitruuius in Proem. lib. 6. Ariſtippus Philoſophus Socraticus naufragio eiectus in littus Rhodium, ſtatim in oppidum contendit,* & rectà Gymnaſium deuenit, ibiq; de Philoſophià diſputans muneribus eſt donatus, vt non tantum ſe ornaret, ſed etiam eis, qui vnà fuerant, veſtitum, & cætera quæ opus eſſent ad victum, præſtaret. *Quo facto, (quod & dicto etiam affirmauit) oſtendit vera eſſe lucra, non mercaturæ, aut mercium, ſed ſcientiarum, & virtutum, quæ vnà cum poſſeſſoribus è naufragio enatant. Hæc ad Euclidis, & Corollariorum vtilia ornamenta, & ad eruditam Geometricam cognitionem ſunto, vt Tyro intelligat rationem inſcriptionis apud eruditiores Geometras in aliquibus Propoſitionibus, quas inſcribunt:* Poriſma. &c.

Veriora, & ſolidiora lucra moralia, quã contemplatiuarum ſcientiarũ. Hiſtoriolà confirmantur vera lucra, quæ in animo, &c.

§. II.

§. II.

SCHOLION II.

Ex antiquis Authoribus arcana Geometrica è coroll. antec. ex prop. 15.

1 I*Dem Proclus de præcedenti corollario tanquam Euclidis:* Id corollarium ex hac 15 propos. Eucl. nos docens quod locus, qui circa signum vnum est, in quatuor rectos æquales angulos distribuitur, illi etiam admirabili theoremati ansam præbuit, quod etiam tria hæc sola multiangula totum, qui circa signum vnum est, locum replere posse ostendit, æquilaterum nempe triangulum, & quadrangulum, & sexangulum illud, quod est æquilaterum, atq; æquiangulum. Verum æquilaterum quidem triangulum sexies assumptum, sex siquidem binæ tertiæ quatuor rectos efficient. Sexanglum autem ter factum, quilibet enim sexangularis angulus vni recto, tertiæq; eius parti æqualis est. Quadrangulum verò quater; nam vnusquisq; quadrangularis Angulus rectus est. Sex igitur æquilatera triangula iuxta angulos coniuncta quatuor rectos complent, nec non tria sexangula, & quatuor quadrangula. Quoduis autem cæterorum multiangulorum quomodocumq; iuxta angulos compositum fuerit, aut à quatuor rectis deficit, aut quatuor rectos excedit. Sola verò hæc iuxta dictos numeros rectis quatuor adæquantur.

Tres solæ figuræ, Æquilaterū triangulum, rectangulū quadrilaterum, hexagonum regulare suis āgulis implet spatium ad vnum punctum.

2 *Pappus verò in Præfat. ad lib. 5. Math. collect. aliquid addit etiam de figuris non replentibus spatium ad idem punctum, ac scribit:* Æquilatera igitur triangula, & quadrata, & hexagona absq; alijs figuris dissimilibus loca replentibus possunt apposita sibi ipsis latera habere communia, hæc enim per se se locum, qui circa idem punctum, replere possunt. Aliæ verò figuræ ordinatæ non possunt. Nam locus, qui est circa idem punctum, repletur tum à sex triangulis æquilateris, & per sex angulos, quorum vnusquisq; est duarum tertiarum recti, tum à quatuor quadratis, & quatuor angulis rectis ipsius, tum à tribus hexagonis, & tribus hexagoni angulis,

Exēplis id arcanum expressum, & confirmatum.

quo-

Exemplum reliquarũ figurarum nõ replentium spatium, &c.

quorum vnusquisq; rectum, & recti tertiam continet. Sed pentagona tria minora sunt, quàm vt possint replere locũ, qui circa idem punctum consistit, quatuor verò sunt maiora.

Rationes non replẽtium. &c.

Addit & sequentes rationes. Tres quidem anguli pentagoni quatuor rectis minores sunt, etenim vnusquisq; continet rectum & recti quintam: quatuor autem anguli maiores sunt quatuor rectis. At neq; heptagona tria circa idem punctum constitui possunt, aptatis inter se se lateribus. Tres enim heptagoni anguli quatuor rectis sunt maiores, quod vnusquisq; rectum, & tres recti septimas contineat. Eadem ratio multo magis accõmodabitur ijs, quæ plures angulos habent. &c.

Horum geometricorum arcanorum fusiores explicationes, ac ostensiones in figuris geometricis vide apud nos in Apiar. 1, Prælib. 1, Propos. 3. etiam inferius ad proposit. 32 habebis in corollarijs vnde hic asserta à Proclo, & Pappo geometricè, ac demonstratiuè intelligas.

§. III.

V S V S—

— Et corollaria ex Propos. 15 in Apum mirificà Geometricà solertià prodendà.

Cur Apes in fauis vtãtur præ alijs sola figurà hexagona.

PAppus *in citat. præfat.* Apis cerea mellis receptacula quæ grecè κηρία, latinè faui appellantur, omnia æqualia, similia inter se cohærentia, specie hexagona fingunt, idq; ex geometrica quadam prouidentia. Nam, cùm tres figuræ sint locum replentes, Apes illam, quæ ex pluribus angulis constat ad structuram sapienter delegerunt, vtpote suspicantes eam plus mellis capere, quàm vtrauis reliquarum. Quod sibi ipsis vtile est cognoscunt, videlicet hexagonum quadrato, ac triangulo esse maius, & plus mellis capere posse, nimirum æquali materià in constructionem vniuscuiusq; consumptà.

Demõstrationes geometricæ scientiæ in Apibus vbinam apud nos.

Demonstrationes Geometricas mirificæ illius solertiæ in Apibus vide apud nos in cit. Ap. 1, à propositione prima per sequentes, atq; etiam inferius in hoc lib. 1. ad propos. 32, vbi patebunt etiam rationes dictorum hic à Proclo, & Pappo.

§. IV.

§. IV.

Vſus in Architecturâ —

— Ex corollario prop. 15 & locus Vitruuij illuſtratus.

V*Itruuius lib. 7, cap. 1, vbi de pauimentorum ſtructione loquitur, ſic præcipit.* Supra rudum ad regulam, & libellam exacta pauimenta ſtruantur, ſiue ſectilibus, ſiue teſſeris. Cum ea extructa fuerint, & faſtigia extructiones habuerint, ita fricentur vti, ſi ſectilia ſint, nulli gradus in ſcutulis, aut trigonis, aut quadratis, ſeu fauis extent, ſed coagmentorum compoſitio planam habeat inter ſe directionem: ſi teſſeris ſtructum erit, vt eæ omnes angulos habeant æquales, nullibiq; à fricaturâ extantes. Cùm enim anguli non fuerint omnes æqualiter plani, non erit exacta, vti oportet, fricatura. *Cur fauos nominat cum figuris quadratis, & trigonis in pauimentis? Cur trigonas, quadratas, ſcutula, fauos, nec plures alias figuras nominat?*

Miror interpretes Vitruuij, in primis doctiſſimum Danielem Barbarum non indicaſſe ſaltem arcanum, quod in ijs Vitruuij verbis latet. Qui quidem Vitruuius in luculentiſſimo illo ſuo opere de Architectura oſtendit ſe imbutum omni genere doctrinarum. Itaq; mi tyro, ſuppoſitis ijs, quæ in antecedentibus docuimus e corollario propoſitionis 15 de tribus figuris explentibus ſpatium ad idem punctum, & de Apum induſtriâ in fauorum ſexagonorum ſtructurâ, lucem habes, quâ hîc peruideas, & intelligas cur Vitruuius pauimenta conſtrui præcipiat è trigonis, quadratis, fauis, ideſt hexagonis, tacitis alijs figuris. Addit tamen ſcutula, ideſt teſtulas rotundatas, ac circulares, non quod eius figuræ lapilli explanati ſpatium ad idem punctum per ſe repleant, ſed propter rotundæ figuræ venuſtatem, non videbantur omittendi, ac poſſent coagmentari cum triangulis minoribus, vt paſſim fieri aſſolet in vitreis feneſtris.

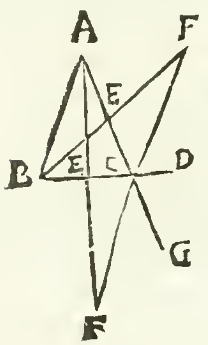
In Architecturæ vſu pro pauimentis quid ſint faui, &c. apud Vitruuiū.

Potes addere Vitruuio geometricam rationem quare præcipiat exactam illam edolationem ad perfectos angulos earum trium fi-

gurarum; vt scilicet planè, ac plenè occupet totum spatiũ ad punctum coagmentationis, & commissuræ, vt iam demonstratum habes in antecedentibus.

Propos.XVI.Theor.IX.

Omnis trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.



SIt triangulum ABC, & vnum ipsius latus BC in D producatur. Dico angulum externum ACD maiorem esse internis, & oppositis CBA, BAC. a Bisecetur AC in E, & ducta BE producatur in F, sitque ipsi BE æqualis EF, iungatur CF, & producatur AC in G. Et quia AE ipsi EC est æqualis, erunt duæ AE, EB duabus CE, EF æquales, altera alteri; & angulus AEB angulo FEC est [b] æqualis, sunt enim ad verticem: c igitur & basis AB basi FC æqualis erit, & triãgulum ABE triangulo FEC; adeoq; & reliqui anguli reliquis, alter alteri, quos æqualia subtendunt latera: Erit igitur & angulus BAE angulo ECF æqualis; est [d] autem ECD maior, quam ECF. Ergo & ACD maior est quam BAE. Pari modo, secto BC latere bifariam, demonstrabitur angulus BCG, hoc est, ACD maior esse angulo ABC. Omnis ergo trianguli vno latere producto, externus angulus vtrouis interno, & opposito maior est, quod oportuit demonstrare.

a prop. 10.1.

b prop. 15.1.
c prop. 4.1.

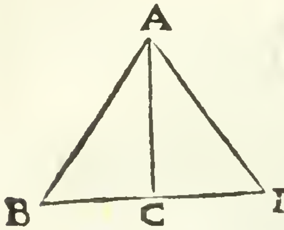
d ax. 9.

§.I.

§. I.

COROLLARIVM I.

Ab eodem puncto ad eandem rectam duæ tantum inter se æquales deduci possunt.



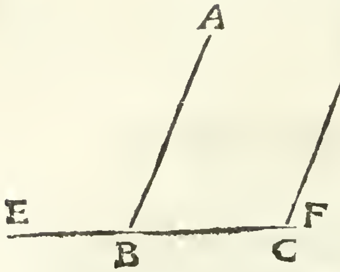
P*Roclus accipit pro possibili absurdam instantiam aduersarii, & argumentatur sic:* Sint ab vno signo tres rectæ lineæ æquales AB, AC, AD ad rectam lineam BD ductæ. Quoniam itaque AB ipsi AC æqualis est, qui ad basim sunt anguli ęquales sunt. Angulus igitur ABC æqualis est angulo ACB. Rursus quoniam ęqualis est AB ipsi AD, angulus ABD angulo ADB æqualis est. Erat autem angulo ABC angulus ACB æqualis, angulus ergo ACB angulo ADB æqualis est, externus interno, & ex opposito iacenti, quod fieri non potest.

§. II.

COROLLARIVM II.

Si recta in duas incidens externum angulum interno, & opposito æqualem fecerit, duæ illæ quantumuis protractæ nunquam triangulum conficient.

I*N rectas AB, CD incidens EC faciat externum ABE æqualem interno opposito BCD, ac per aduersarium protractæ AB, CD*



conueniant, faciantq; triangulum. Externus ABE, per hãc 16 propos Eucl. maior erit interno opposito BCD; At idem ABE, per aduersarium, est æqualis eidem BCD, ergo maior idem, & æqualis. Hæc in Proclo. A quo & sequentia.

§. III.

SCHOLION I.

Etiam ex discursu naturali patet veritas 16 propositionis.

Nam, posito corollario antecedenti, quo demonstratur necesse esse vt, si facturæ sint triangulum, discedant rectæ AB, CD ab æqualitate duorum angulorum ABE, BCD, necesse est vt, vel manente AB, ipsa CD inclinet D ad A, atq; ita minuitur internus BCD; vel manente CD, ipsa AB inclinet verticem A ad D, atq; ita augetur externus EBA; vel deniq; vtraq; conniueant, & internus BCD eodem tempore imminuitur, quo externus EBA augetur. Motus igitur, & conniuentia rectarum AB, CD ad conficiendum triangulum causa est proprietatis propositæ in theoremate 16 propositionis.

SCHO-

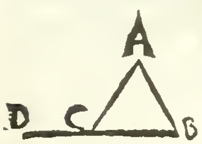
SCHOLION II.

Externus quanto ſit maior vtrolibet interno oppoſito.

Vide inferius in ijs, quæ appoſuimus in § 8 ex Proclo ad ſequentem propoſ. 17. Eucl.

Propoſitio XVII. Theor. X.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores ſunt, quomodocunque ſumpti.



Sit triangulum ABC. Dico duos eius angulos minores eſſe duobus rectis quomodocumque ſumptos. Producatur BC in D. Et quia trianguli ABC angulus ACD externus [a] maior eſt interno, & oppoſito ABC. Si communis apponatur ACB, erunt ACD, ACB anguli maiores ABC, BCA angulis: Sed ACD, ACB [b] duobus rectis ſunt æquales: Ergo ABC, BCA minores. Similiter oſtendemus tam BAC, ACB, quam CAB, ABC duobus rectis eſſe minores. Omnis ergo trianguli duo anguli quicunq; duobus rectis ſunt minores, quod oportuit demonſtrare.

a prop. 16. 1.

b prop. 13. 1.

§. I.

§. I.

SCHOLION

Videri poteſt hæc propoſitio 17 etiam tamquam axioma per ſe notum.

Ad abundantiã Euclides demonſtrat propoſ. 17. vnde & confirmatio cõuerſ.

H*Oc theorema conuerſum eſt axiomatis* 11. *ibi enim dicitur*: Si tertia in duas rectas incidens internos angulos duobus rectis minores fecerit, duæ illæ protractæ concident,*ideſt conficient cum tertia triangulum. Hic verò:* Si ſit triangulum,duo anguli ſunt minores duobus rectis,*ſcilicet duo illi anguli minores duobus rectis cõfecti ſunt à duabus annuentibus, & concurrẽtibus in triangulum. Poſſet igitur hoc theorema ſine vlla demonſtratione aſſumi pro axiomate conuerſo axiomatis* 11,*præſertim explicati à nobis in noſtris notis ad axiomata. Pro nobis adde & Proclum in ſequenti* § 2, *& Schol. Euclides igitur dum ex abundantia demonſtrat hoc theorema, ſimul confirmat eius conuerſum, ideſt axioma* 11.

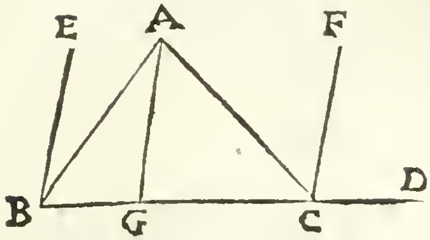
§. II.

SCHOLION

Etiam è diſcurſu naturali patet veritas propoſitionis 17.

P*Onamus rectas EB,FC efficere ad B,& C cum rectà BC duobus rectis æquales. Profectò, ſi confecturæ ſunt triangulum,opportet conniueant inter ſe verſus A; ergo in eà conniuentià imminuent angulos ad B, & C, (vt præoſtenſum eſt etiam in diſcurſu naturali ad propoſ. præcedentem* 16) *ergo facient ad B, & C angulos minores duobus rectis.*

Pro-

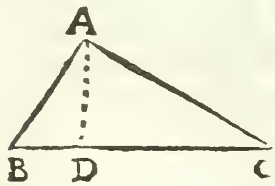


Proclus sui memor debuerat ad axioma 11, vt hìc fecit, ostẽdere eius euidentiam in explicatione, & discursu naturali: Recole, mi Tyro, & huc applica quę disseruimus ad id axioma 11.

§. III.

SCHOLION.

Aliter, ac breuiter demonstrare proposit. 17.



IN triangulo ABC ab vno angulorum A deducatur in basim ipsa AD. ADB externus est maior interno DCA, & CDA externus maior interno DBA; at AD facit duobus rectis æquales vtrinque ad D, ergo duo B, & C sunt minores duobus rectis, ostensi minores duobus ad D. simili modo de alijs angulis ad alia latera.

§. IV.

COROLLARIA EX CLAVIO.

I.

Si trianguli angulus vnus est vel rectus, vel obtusus, reliqui sunt acuti.

CVm enim per hanc 17 propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel ob-

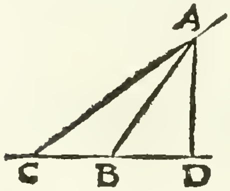
tusus,

tusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

§.V.

COROLLARIVM II.

Si recta super altera consistens faciat angulos inæquales, perpendicularis è puncto quolibet consistentis deducta cadet ad partes anguli acuti.



FAciat enim recta AB, cum recta CD angulos inæquales, nempe ABD acutum, & ABC obtusum, dimittaturq; perpendicularis AD. Dico AD cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam si nō cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat si fieri potest perpēdicularis AD ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB obtusus, & rectus in triangulo ABC maiores sunt duobus rect is: sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A perpendicularis ad CD deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.

§. VI.

SCHOLION.

De vsu proximè præcedentis Corollarij.

EST id proximè antecedēs corollarium amplissimi vsus in Geometriâ practicâ pro dimensionibus superficierum. &c. vt

vi-

videbis apud nos inferius in vsibus, præsertim propos. quadragesimæ septimæ Euclidis pro catheto ad dimensiones arearum triangularium.

§.VII.

COROLLARIVM III.

Omnes anguli trianguli æquilateri, & duo ad basim isoscelis sunt acuti.

NAm cùm & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basim sint inter se æquales, sintq; simul tam illi duo, quàm hi duobus rectis minores; erit quilibet illorum recto minor, hoc est acutus. Si enim rectus foret, aut acutus, aut obtusus, essent ambo, vel duobus rectis æquales, aut maiores.

§.VIII.

SCHOLION

Trianguli duo anguli quanto sint minores duobus rectis.

P*Roclus ad hanc 17 propos.* Nunc quidem indeterminatè ostenditur quòd trianguli duo quidem anguli duobus rectis sunt minores, in sequentibus autẽ determinabitur. &c.

Pariter, iuxta doctrinam eiusdem Procli, non determinatur in 16 propos. quanto sit maior externus vtrolibet interno, &c. Sed ex propos. 32 sicut determinabitur duos angulos in triangulo esse minores duobus rectis quantitate reliqui tertij, ita etiam determinabitur externum esse maiorem interno vtrolibet quantitate alterius, &c. est enim ex 32 prop. externus æqualis vtriq; interno, & opposito, &c.

§. IX.

PARADOXVM

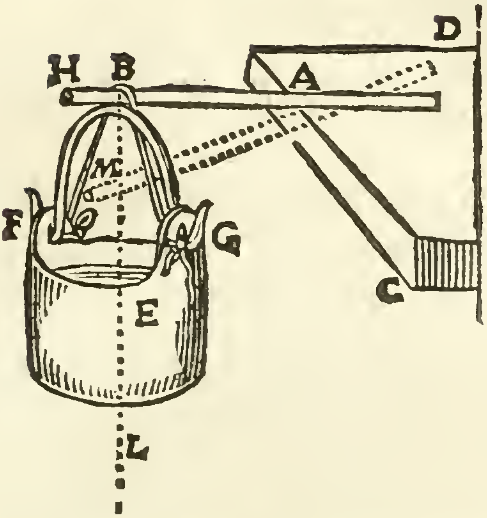
In machinariâ Philoſophiâ demonſtratum indirectè ex hac 17 propoſ. Eucl.

Qui fiat vt graue caſurum, addito grauiori ad partē caſuram, non cadat.

1 C*Ardanus lib. 17 de ſubtilitate paradoxum habet in machinaria Philoſophia:* Graue caſurum, add to grauiori ad partem caſuram, non cadit. *Sed & rem obſcurè, vt ſolet, apponit, & in modo, & figurâ pro praxi deficit, ac demonſtrat ab abſurdo contra 32 propoſ. Eucl. At nos, quibus ſatis multa non deerunt ad 32 propoſ. Eucl. ſatius duximus (ne hìc etiam deſint ſua Tyronibus condimenta) id paradoxum demonſtrare ab abſurdo cōtra hanc 17 prop. Eucl. quatenus tamen, Cardani exemplo, experimentum Phyſicum patitur Geometriam.*

2 *Sit AH bacillus ſolidioris materiæ ligneæ, vel ferreæ, ac aptæ grauiori ponderi ferendo ita collocatus, vt ſuper menſâ, verb. gr. CD, conſtituatur horizonti parallelus, itàq; expoſitus, vt maiore ſui parte extet, & ſine controuerſia caſurus ſit è menſa. Sit & ſitula E aquæ plena, cui ſuſtentaculum quæritur, è quo dependens aquam non effundat. Quis credat? ne baculus AH cadat ad partes B, & ne ſitula ſuſpenſa effundat aquam, nectantur in B baculus AH, & ſitula E. Qua arte? Præter anſam æream FBG, alteram adde è chordula, quæ ſit aliquanto breuior anſâ æreâ. Tum baculi partem è menſâ extantem per vim interpone inter tenſam chordam, & inter anſam æream itâ, vt in B anſa chordea ſit priore loco, & nitatur ſuprà bacillum, anſa verò ærea poſteriori loco verſus H ſit infra bacillum, & eà bacillus nitatur. Sic enim fiet admirandum ſpectaculum, vt virga nuper caſura ad partes B, additâ, & ſuſpenſâ ſitulâ per artem prædictam, non ſolum ipſa non cadat, ſed ſitulam ſuſpenſam ſuſtineat. Vnde hoc prodigium? Reſpondet Geometra de ſuo: Ne fiat abſurdum contra 17 propoſ. Euclidis, non audent vel virga AH, vel ſitula E concidere.*

Sup-



Suppono cũ Cardano, & alijs Philosophis, virgæ AH punctum B, si caderet, lapsurũ, ac demissurã se per lineã directionis ad mundi centrum breuissimam BL.

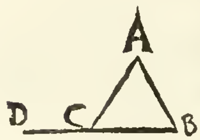
3 Igitur casura HA, si fieri potest per aduersarium, labatur, & inclinet partem B in M. Quoniam in triangulo ABM duo laterà AB, AM sunt æqualia, nempè eadem virgæ lõgitudo, erunt, per 5 propos. huius, & anguli MBA, AMB æquales. At angulus MBA (dum bacillus HA ante inclinationem est horizonti parallelus, & linea directionis BM perpendiculariter à B descendit) est rectus, ergo & alter BMA erit & ipse rectus, quod est contra hanc 17 propos. Eucl. Omnis enim trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores.

Hoc verò paradoxum machinarium nos in Apiarij 4 initio aliter, atq; in experimento parabiliori, & pluribus theorijs confirmamus. Illuc vise.

§. X.

THEOREMA

Ab eodem puncto ad eandem rectam lineam vnica tantum perpendicularis deduci potest.



IN figura Euclidis, si fieri potest, ducantur ex A ad rectam CB duæ perpendiculares AB AC. sequetur idem absurdum, quod nos intulimus in anteposito paradoxo machinario. In triangulo enim ACB, propter duas perpendiculares, iuxta aduersarium, erũt duo anguli ABC, ACB æquales duobus rectis, contra 17 Eucl. Hæc deductio est Procli, nobis vsui ad sequentia mox. Vide hoc idẽ theorema demonstratum ab absurdo contra 32 propos.

§. XI.

THEOREMA Militare.

Propugnacula circularia minus apta videri ferendis obsidionum ictibus, quàm ea, quæ quasi triangularia sunt.

POsita deductione Procli ex 17 proposit. Eucl. scilicet vnicã tantum perpendicularem ab eodem puncto ad eandem rectam lineam deduci posse, an nõ rectè inferunt aliqui propugnacula rotunda, dum circulariter cinguntur ab hostibus in obsidionibus, esse in omnibus sui partibus, & punctis nimis peri-

riculosè exposita excipiendis perpendicularibus ictibus bombardarum? Quæ perpendiculares eiaculationes breuiore, ac validiore impetu feriunt. Sunt enim circularia oppida in circulari obsidione ità disposita, vt singulos ictus hostium excipiant per lineas directas ad centrum, & facientes angulos æquales vtrimq; in punctis, ad quæ incidunt globi ferrei bombardarum. At verò propugnacula quasi triangulata, & lateribus quasi rectilineis obliquè refugientia, an non præbent etiam bombardis mæniorum obliquum situm? ad quem delatæ pilæ bombardarum per longiores lineas, & ad angulos in ictu inæquales, an non resiliunt obliquè ictu facto longè inualidiore, quam si perpendiculariter, & ad æquales vtrinque angulos ictum fecissent? ex dispositis enim bombardis ad propugnaculi quasi rectilinei latus obliquum vix vnica est quæ perpendiculariter ferire possit, iuxta demonstrata à Proclo in anteced. § 10. Quod si bombardæ sequantur situm obliquum propugnaculi, accedunt nimium ad mœnia, & repelluntur ab oppugnatoribus.

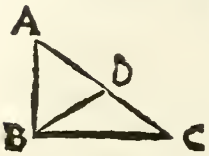
Propugnacula ne sint prorsus angulata, nec prorsus rectilinea, & cur.

Dixi: quasi angulata, & quasi rectilinea propugnacula, quia prorsus rectilinea, & angulata obnoxia sunt, præsertim circa angulos, faciliori ruinæ, ac labefactationi ab ictibus bombardarũ. Ideo prudenter finguntur figuræ inter triangularem, & circularem mediæ. Sed hæc à nobis hìc obliquè indicata sint ex aliquorum sententia, & ex occasione corollarij à Proclo deducti ex 17 propos. Eucl. vt hìc hoc ad Euclidem condimentum Tyronibus indicaremus. Indicium exactius circa geometricam hanc de bellicis philosophationum esto apud eos, qui versati sunt in bello.

Tro-

Propos. XVIII. Theor. XI.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



SIt triangulum ABC, habens latus AC maius latere AB. Dico & angulum ABC maiorem esse angulo BCA. Quia enim AC maius est, quã AB, fiat AD ipsi AB æqualis: & ducatur BD. Et, [a] quia trianguli BDC externus angulus ADB maior est interno, & opposito DCB, & [b] æqualis angulo ABD, quod latera AB, AD æqualia sint, maior ergo etiam est ABD, quàm ACB: multo ergo maior erit totus ABC, quam ACB. Omnis ergo trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

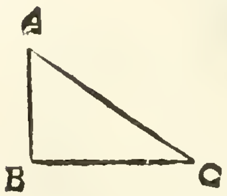
a prop. 16. 1.

b prop. 13. 1.

§. I.

COROLLARIVM EX CLAVIO

Omnes anguli trianguli scaleni sunt inter se inæquales.



SIt enim triãgulum scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem AB, & medium locum habens BC. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC ponatur maius latere BC, erit, per hanc prop. 18, angulus B angulo A maior. Eàdem ratione maior erit angulus

A an-

angulo C, quandoquidem, & latus BC latere AB maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus verò C, & A medium locum inter vtrumq; tenens.

§. II.

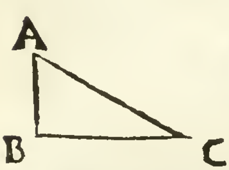
SCHOLION

Ex discursu naturali, etiam extra Geometrica, patet propos. 18 Eucl.

Ostendit Proclus patère veritatem huius 18 propos. e naturali discursu. nam anguli maioritas efficitur à lateris subtendentis maioritate. Vide Proclum: vel tute ex hic indicatis ratiocinare. Notata tamen cautione, quod propositio est de latere, & angulo in eodem triangulo, non in diuersis.

Propos. XIX. Theor. XII.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



Sit triangulum ABC habens angulum ABC maiorem angulo BCA. dico & latus AC maius esse latere AB. Si nō: erit AC ipsi AB aut æquale, aut minus. Non æquale. Si enim æquale, [a] esset & angulus ABC angulo ACB æqualis: at non est: ergo AC æquale non est ipsi AB. Non minus: nā si AC minus esset quam AB, esset [b] & angulus ABC minor angulo ACB; at non est: non ergo AC minus est ipso AB. Ostensum autem est, quod nec æquale: ergo maius. Omnis ergo trianguli maiori angulo maius latus subtenditur.

a prop. 5.1.
b prop. 18.1.

§. I.

§.I.

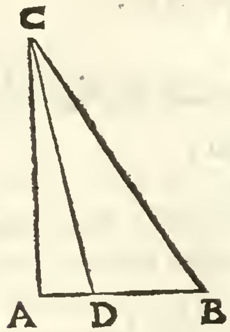
SCHOLION.

Proclus demonstrat hanc conuersam demonstratione ostensiuà è lemmate, quodã præmonstrato, sed exercitationis geometricæ potius gratià, quàm necessitatis. Laudat enim conuersionum demonstrationes per deductionem ad impossibile propter ea, quæ habes ad 14 propos. §. 1.

§. II.

SCHOLION.

Aliter ex Campano demonstrare propos. 19.



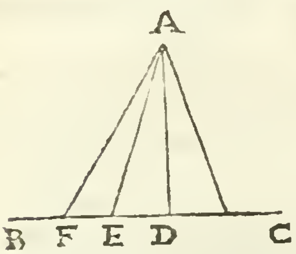
Sine vsu, ac necessitate antecedentis 18 propos. licet demonstrare propos. hãc 19 eà ratione, quam Campanus (qui, ordine inuerso, priore loco ponit 19, posteriore 18, & hanc ex eà probat) habet sic: Sit vt in triangulo ABC angulus A sit maior angulo C, dico, quod latus CB maius erit latere AB. Si enim sit æquale, erit, per 5, angulus A æqualis angulo C, quod est contrà hypothesin. Sin autem AB sit maius, rescetur ad æqualitatẽ AB, per 3, sitq; DB æquale CB, erit ergo, per 5, angulus DCB æqualis angulo BDC, sed BDC est maior angulo BAC, per 16, ergo BCD est maior BAC. quare multo fortius maior angulo ACB, pars toto, quod est impossibile. *Per hypothesim BAC est maior ipso ACB. si ergo BCD est æqualis ipsi CDB, & CDB maior ipso A. &c. vt consequentiam facilius assequantur Tyrones.*

§.III.

§. III.

COROLLARIVM EX CLAVIO

Perpendicularis minima est omnium rectarum, quæ ab eodem puncto deduci possunt ad rectam aliam.



DVcantur enim ex puncto A ad rectam BC quotcumque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarum AD sola sit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cùm ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED sint duobus rectis minores, ponaturq; ADE rectus, erit AED acutus. Quare maius erit latus AE latere AD. Eodem modo ostendemus omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD omnium erit minima.

§. IV.

SCHOLION.

Ratio è 19 propos. Eucl. cur Philosophi Mathematici omnia metiantur lineâ perpendiculari.

1 *QVoniam mensura debet esse certa, & sola perpendicularis demonstratur ex 19 propos. omnium breuissima, ac*

Linea perpendicularis certa mẽsura est. *vnicà (ex Proclo in anteced. ad propos.17) ab eodem puncto ad rectam, consequenter certa est, atq; inuariabilis, ac aptissima dimensionibus. Reliquæ lineæ non perpendiculares ab eodem puncto possunt esse numero, & longitudine infinitæ.*

In quolibet corpore tres tãtum certa mensura. *Ratio trium earum mensurarum.* 2 *Ex hac eàdem lineæ perpendicularis certà mensurà efficitur vt in vnoquoque corpore tres tantum sint rectæ mensuræ scilicet secundùm longitudinem, & latitudinem in superficie, secundum profunditatem in soliditate. Quia ad quodlibet punctum in solido corpore tres tantum perpendiculares adduci possunt ita, vt inter se sint ad angulos rectos. Quam ad rem vide plura cum figuris, & confirmationibus geometricis apud Clauium initio Comment. ad cap.1 sphæræ Sacrobosc hi. Vnde etiam illustres Aristotelem in initio lib. 1 de cælo. Satis hæc hìc nunc ad aperiendum campum, & ornandam hanc 19 Propos. Eucl.*

Irregularium superficierum dimensiones per quadrata. Cur? *Solidorum dimensiones per cubos. Cur?* 3 *Addo mensuras superficierum irregularium, vt ea rectè haberi possint, à Philosophis Geometris reduci ad rectangulas, vel quadratas, easq; sub certam mensuram adduci dum mensurantur per rectangula, vel quadrata minora contenta sub perpendicularibus. Sic & solidorum corporum mensuræ fiunt per cubos comprehensos sub eiusdem mensuræ perpendicularibus. Quarum rerum exempla vide apud eos, qui Philosophati sunt in Practicà Geometrià; atq; etiam apud nos in Ap.2, præsertim vbi terrarum orbem metimur; & in Apiar. 11 vbi vsum aliquem prodimus logisticæ operationis multiplicatoriæ.*

§. V.

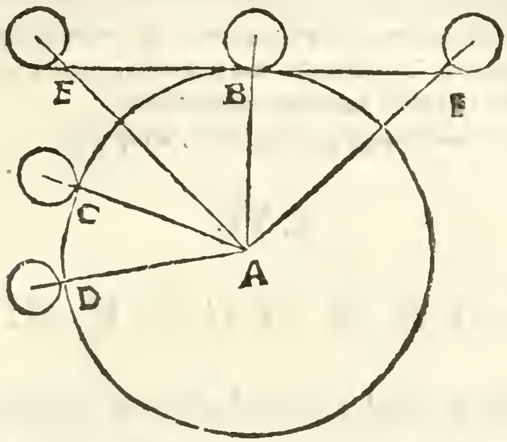
PARADOXVM

Demonstratum e 19 prop. Euclidis de pila, quæ in plano ad vnicum punctum quiescit, in conuexo vbiq; quiescit.

1 V*Idetur omnino contrarium futurum, nempè vt sphæra in plana tabulà vbique conquietura sit, in conuexà nusquam, sed vbiq; vtrinque lapsura. Tamen propositum paradoxum*

con-

constabit mox geometricè ex hac 19 propos. Eucl. si tamen supponamus planum esse perfectè ad libellam, & conuexum concentricum terræ centro. Talia igitur sunto planum EF terram contin-



gens in B, & conuexum BCD concentricum terræ centro A. Pila enim collocata in E, vel F, atq; in cæteris punctis extra B, mouebitur ad B, at locata vel in B, vel in C, vel in D, atq; in alio quolibet puncto conuexi BCD, &c. quiescet.

2 Ratio cur ex E, & F moueatur est, quia ab ijs, atq; alijs punctis plani EB impedita ne feratur ad centrum A, quærit, atq; adit breuissimam ad idem centrum A lineam BA, ad quam cùm peruenerit, ibidem impedita ne descendat, conquiescit quam potest proximè optato cētro A. Quod autem BA sit breuissima omnium, quę ab A ad rectam EF deduci possunt, patet, nam, prætcrquam quod per suppositionem fit contactus in B, atq; ideo, per 18 tertij, recta EB est perpendicularis, tamen ne Tyronem extra hanc 19 propos. ad librum 3 abducamus, facilè, ac paucis demonstratur AB breuior vtràlibet AE, vel AF. nam eodem modo, quo demonstratum est in corollario perpendicularem eße omnium breuissimam, &c. sic & hic. Quoniam in triangulo, ver. gr. AEB, recta AB ponitur per constructionem perpendicularis in B vbi planum EF perfectè libellatum supponitur, atq; ad angulos rectos cum linea directionis, quæ iret ex B in A; ergo angulus B est rectus, & angulus E minor recto, per 17 propos. huius; ergo latus AE maiori angulo B op-

 positum

positum maius est latere BA. Eodemq; modo demonstrabitur de aliâ qualibet ab A ad quælibet alia puncta extra B. Quare ratio est cur ab ijs pūctis pila moueatur ad B; nempe ad breuissimam demonstratam ad mundi centrum.

At vero in B, C, D &c. quoniam eiusdem longitudinis, ac distantiæ sunt semidiametri à mundi centro A, & nusquam per conuexum acquirit pila quidquam maioris ad cētrum A vicinitatis, ideo, vbicunque primò ponatur, conquiescet.

Vide nos etiam in Ap.4, Progym.1, Propos.6.

§. VI.

PARADOXVM

De terræ nihilo (quod est præcipuum fundamentum Astronomicarum obseruationum, & Gnomonicarum operationum) geometricè è 19 propos. demonstratum.

Vsus Astronomicorū, & Gnomonicorū instrumentorū, & phænomenon deberet esse vel in centro, vel circa cētrum terræ.

1 *ASTRONOMI dum suis instrumentis cælestia rimantur in terræ superficie positi, agunt id, quod agēdum esset in puncto, vbi terræ, atq; vniuersi cētrum est, in quo speculatoris oculus, & Quadrantum, Astrolabij, Armillarum centra collocanda essent, ad perfectas, & exactè geometricas ratiocinationes. Pariter Gnomonici dum horas venantur per vmbram proiectam e styli vertice, fingunt plana horaria esse infra, vel extra terram tanto spatio, quanta styli est longitudo, cuius vertex sit in centro mundi, atq; ipsum terræ centrum, seu globum fingunt cū vmbra proijci in planum horariū. Tamē eæ omnes operationes nullum sensibile incōmodum scientijs ijs inferunt, quia vniuersus terrarum globus instar puncti, ac nihili est in immensâ ad solem, & altiores Planetas, & ad astra firmamenti à terris distantiâ.*

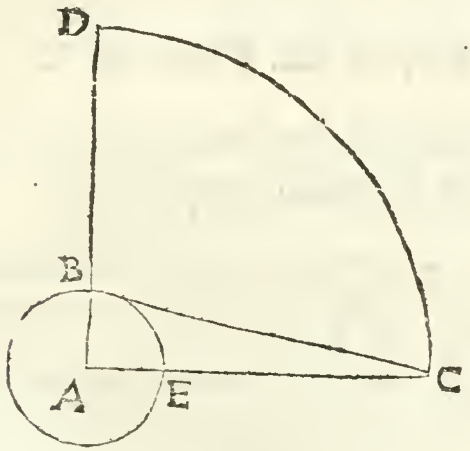
2 *Geometricæ demonstrationi præmitto verba Clauij in cap. 1 Sphæræ Sacroboschi, vbi probatur quòd mundus nō sit figuræ planæ:* Manifestum est vnam, eandemq; stellam iuxta horizontē tempore sereno, reclusis omnibus vaporibus, & exhalationibus, in

eadem

eàdem nobis magnitudine apparere, in qua iuxta meridiem à nobis cernitur; licet ibi magis à nobis distet, hic verò minus &c.

Stella eadē eiusdē magnitudinis apparet, cæteris paribus, in horizonte, meridie, &c.

Præmitto, etiam ex opticis id quod affirmat (& patet experiētia, cuius rationem videbis paullo inferius ad prop. 21) Sacroboscus cit. Quæ nobis propinquiora sunt maiora videntur. *& quæ remotoria minora.*



3 *Igitur à cētro A terreni globi BE duæ ad angulum rectum in A eductæ comprehendāt quadrantem cæli DC, iuxta dicta ad propos. 9, & ea quæ apud Clauium in Schol. ad propos. 21 tertij. Stella èadem modò in summo vertice D, modo in horizonte, vbi C, videtur spectāti oculo in superficie terræ, vbi B, eiusdem magnitudinis, iuxta supposita experimenta è Clauio; at deberet apparere in C minor, quàm in D, est enim maior distantia BC, quàm BD, vel etiam DA. Quod ex hac 19 propos. Eucl. patet. Iunctā enim BC, in triangulo BAC angulo quadrantis recto A maiore, quàm ABC, latus oppositum BC est maius, quàm AC, siue illi æquale AD, ac multo maius, quàm pars BD. Si ergo in maiore distantia à superficie terræ stella èadem non apparet minor, dicendum est differentiam semidiametri, ac diametri terrenæ AB nullā esse ad sensum, ac proinde terræ globum in Astronomicis, & Gnomonicis operationibus, & in immensâ distantiâ à cælis elatioribus, puncti, ac nihili instar habere.*

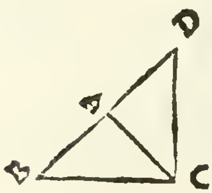
4 Re-

Ex terra nihil o morale.

q *Rectè Seneca inter multa in Præfat. li. 1. natur. quæstionum:* Hoc est illud punctum, quod inter tot gentes ferro, & igni diuiditur? o quam ridiculi sunt mortalium termini! *Vide Apiar. 9. Prog. 1. cap. 2.*

Propos. XX. Theor. XIII.

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt quomodocumq; sumpta.



SIt triangulum ABC. dico duo latera BA, AC, maiora esse reliquo BC; & AB, BC reliquo AC; & BC, CA reliquo AB. Producatur enim BA in D; sitq; recta DA ipsi CA æqualis, & iungatur DC. Cum ergo DA ipsi AC sit æqualis, erit & angulus ADC angulo ACD æqualis. Sed [a] BCD angulus maior est angulo ACD; maior ergo etiam est BCD ipso ADC. Et cum DCB sit triangulum habens angulum BCD maiorem angulo ADC, [b] maiorem autem angulum maius latus subtendat, erit DB maius ipso BC: æquale autem est DB ipsis AB, AC; maiora ergo sunt BA, AC, quàm BC. Omnis ergo trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocunque sumpta.

a ax 9.

b prop. 19. 1.

§. I.

Vsus 20 propositionis non solum in Philosophiâ Geometricâ, sed etiam in rerum naturâ. Ac de animalium geometricâ solertiâ iuxtà hanc 20 propos. Euclidis.

1 *VSus non rarus est huius 20 propos. lib. 1 Eucl. præsertim in lib. 3. Ideo a Tyrone rectè percipienda, ne pro scientia fidem accipiat ab alijs propositionibus, quæ ab hac pendent.*

Vitellio Optices lib. 5 propositio 5, sic ad meam rem: Natura agit in omnibus secundùm lineas breuiores. *Affert deinde plura exempla. Id ad rem nostram est pro hac propos.* 20. Id quod patet in canibus, qui omissis duobus lateribus trigoni, currunt per tertium, ac si naturaliter informati nouerint quod duo latera trigoni maiora sint tertio, quod homines Geometres edocet 20 p. 1.

Vel canes ipsi vernaculè 20 propositionis subodorantur.

2 *Ex Proclo:* Præsens theorema Epicurei impugnare consueuerunt, tum asino ipsum manifestum esse dicentes, tum nulla egere probatione. *Paullo post.* Herbâ in altero laterum extremo positâ, Asinus pabulum expetens vnum latus peragrat, non autem duo. Aduersus hæc dicendum quod præsens theorema sensu quidē manifestum est, non autem & scientiam gignente ratione. Multis enim hoc accidit rebus. Exempli gratia, ignis calefacit, hoc quidem sensui indubitatum est, sed quonam pacto calefaciat conuincere scientiæ officium est, &c. *Mox:* Quod mouemur sensui est perspicuum, quomodo autem moueamur, ratione docere difficile est, vtrum per impartibile, an per interuallum, quomodo autem infinita percurramus, si quidē omnis magnitudo in infinitū diuisibilis est? Sic igitur hoc quoque, duo triāguli latera reliquo esse maiora, sensui manifestum. Quomodo vero hoc fiat dicere ad scientiam spectat,

Epicureorū asinaria obiectio.

Philosophica responsio, & propugnatio pro 20 prop.

SCHOLION.

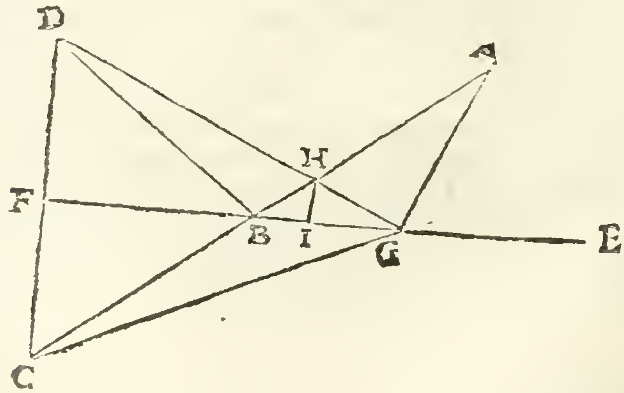
Aliter duplici modo, etiam per deductionem ad absurdum demonstratum hoc 20 Eucl. Theorema vide apud Proclum.

§. II.

THEOREMATA Optica.

Per breuissimas lineas fieri reflexiones demonstratur ex 20. propos. Eucl. & vera ratio æqualitatis angulorum incidentiæ, & reflexionis.

Quod indicauimus quasi corollarium ex nostris notis ad 15 propos. lib. huius 1 Eucl. scilicet reflexiones (quæ per angulos æquales incidentiæ semper fiunt) fieri per breuissimas lineas, hìc in loco ex vsu propos. 20. libet euidentissimè demonstrare.



Nam

Nam ſit progreſſio ab A, incidentia in B, reflexio ad terminum D, & anguli vtrinq; æquales ABE, DBF. Sit alia reflexio ex G non ad angulos æquales, & iungantur CB, CG. Demonſtro breuiſſimas eas tantùm eſſe lineas, per quas ad angulos æquales fit reflexio. Nam, ex 4 propoſ. lib. 1 Eucl. triangula DGF, FGC ſunt æqualia, ergo & latera DG, GC, vt demonſtratum eſt ad 15 prop. Eucl. § 6 à nobis de æqualibus DBF, FBC, & de tota & vnica recta ABC æquali duabus AB, BD. Sic etiam duæ AG, GD ſunt æquales duabus AG, GC. Quoniam igitur vnum latus eſt AC, duo CG, GA, ergo per hanc 20 propoſ Eucl. duæ AG, GC, (hoc eſt GD ipſi GC æqualis) longiores ſunt tertià AC, hoc eſt duabus AB, BD ipſi AC æqualibus. Eadem fiet demonſtratio ex hac 20 Eucl. de quibuſcunq; alijs lineis incidentibus, & reflexis non ad angulos æquales ab ijſdem terminis A, D.

Iam verò ad corroborandam demonſtrationem, & ad oſtendendam neceſſitatem æqualium angulorum in reflexionibus adde, ac pro axiomate naturali ſuppone id, quod Euclides in præfatione ad ſua Catoptrica, & alij, ac in primis citatus Vitellio exēplis naturalibus illuſtrant, nempè naturam ſemper agere, etiam impeditam, per breuiſſima. Nihil enim natura operatur fruſtrà, fruſtrà verò ageret longioribus, quod poſſet breuioribus lineis. Cùm igitur etiam reflexio per breuiſſimas lineas à naturà fiat, & per breuiſſimas non fiat niſi cùm angulus incidentiæ angulo reflexionis eſt æqualis, vt modo geometricè demōſtratum eſt ex hac 20 prop. Eucl. prorſus neceſſaria eſt æqualitas eorum angulorum. Vide, mi Tyro, ad quam præclara, & vniuerſalia naturæ arcana geometricè demonſtranda nos perducant hæc apud Euclidem elementa.

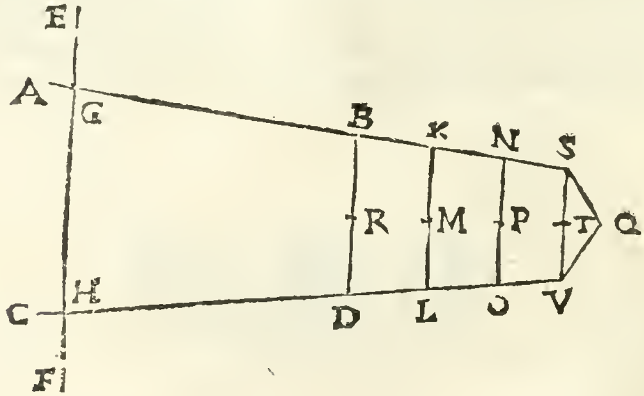
Elementis Geometricis patefiūt arcana naturalia.

§. III.

Paradoxum, & problema geometricum ex 20 propoſ. Eucl. demonſtratum, nempè de lineis rectis aſymptotis, ſiuè inter ſe ſemper accedentibus, nunquam coinciſuris.

Duas rectas eſſe inter ſe aſymptotos eſt genuinum paradoxum geometricum.

PAradoxum in paradoxo eſt. Nam aliquas lineas eſſe aſymptotos, quarum altera vel hyperbolica, vel conchois, vel alia quæpiam mixta ſit, paradoxum vulgatum eſt. Ac nos copiosè de ijs in Apiar. 3. At verò neutram eſſe mixtam, ſed vtranq; rectam, & tamen aſymptoton alteram alteri, hoc inter paradoxa geometrica nõ admodum eſt vulgatum. Problema tamen hoc mox docebimus, ac demonſtrabimus ex hac 20 prop. Eucl. nempe quaſi contra 11 axioma duas rectas ducere, in quas tertia incidens faciat internos minores duobus rectis, duæ tamen rectæ nunquam coincidant, etiam in infinitum productæ.



Sint duæ rectæ AB, CD facientes cum tertià EF angulos ad G, & H minores duobus rectis, ita vt, iuxta axioma 11, non ſint AB, CD parallelæ, ſed coinciſuræ aliquando ſi protrahantur longius

gius

gius ad partes B, D. Tamen nunquam coincident, etiam in infinitum ad eas partes protractæ sic: extrema B, D iungãtur rectã, quæ in R bisecetur, atq; interuallo DR producatur CD ad L, interuallo BR producatur AB ad K. Rursus iungatur KL, fiat sectio in M, interuallo LM fiat productio ex L in O, interuallo KM productio ex K in N. Ac sic deinceps. Hac enim ratione productæ duæ illæ rectæ inclinatæ, ac magis inter se semper accedentes, nunquam tamen coibunt. Si enim fieri potest; exempli gratia quando ad interualla VT, ST productæ sunt, coeant in Q, & factum sit triangulum ex iunctã SV, & ex duabus VQ, QS ad angulum in Q coincidentibus: Quoniam VQ sectum est latus æquale ipsi VT, & QS sectum ad interuallum ST, erunt æquales duæ VQ, QS tertiæ SV; ergo in triangulo SVQ duo latera SQ, QV non sunt longiora tertio, contra hanc 20 prop. Eucl. Idem absurdum concludetur vbicumq; dicantur coincisuræ protractæ iuxta modum à nobis præscriptum.

Ratio producendi in infinitum duas rectas semper magis inter se annuentes, nec tamen vnquam se contactūras.

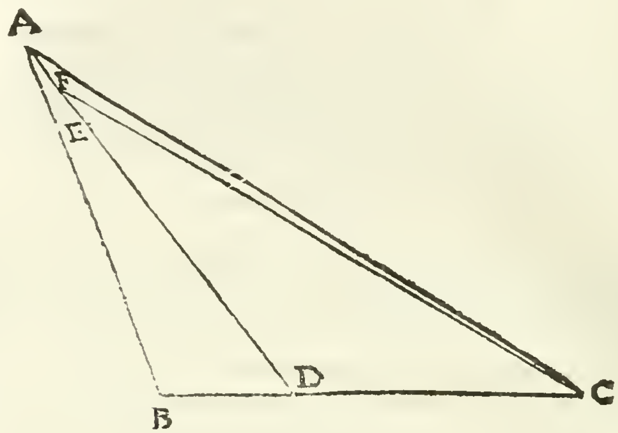
Vide plura circa hoc paradoxum in Apiar. 3, Progy. 1, propos. 1, & corollar. & schol. Vide & apud Proclũ ad propos. 29 Eucl.

§. IV.

Paradoxa, & Problemata alia demonstrata è 20 prop. Eucl. de figuris geometricis describendis intra alias ita, vt inclusæ sint maiores includentibus.

1 *PAppus Alexandrinus Collectionum Mathematicarum lib. 3 pluribus propositionibus, & exemplis ostentat, ac demonstrat propositum à nobis problema; itemq; Proclus ad 21 seq. prop. Eucl. non in vno casu soluit problema. Plura vide apud nos in Apiar. 3, Progym. 9. Proposit. 1, & 2, & in schol. & coroll. vbi paradoxa aliqua de inscriptionibus figurarum pro Tyronibus. Hic pro Tyronibus vnum, atq; alterum exemplum in vno, atq; altero casu facillimum, ac breuissimum proponemus ex vsu 20 propos. Eucl. Ac pro re natà etiam sine vsu vllius propositionis. Igitur in dato triangulo potest super*

datæ basis parte erigi triangulum, cuius duo latera simul sumpta sint maiora duobus simul sumptis trianguli includentis; ac præterea etiam duo latera, quorum singula singulis includentis maiora sint.



Triangulū intra a iud describere ita, vt inscripti la era duo simul sint maiora duobus simul trianguli continentis, &c. includentibus.

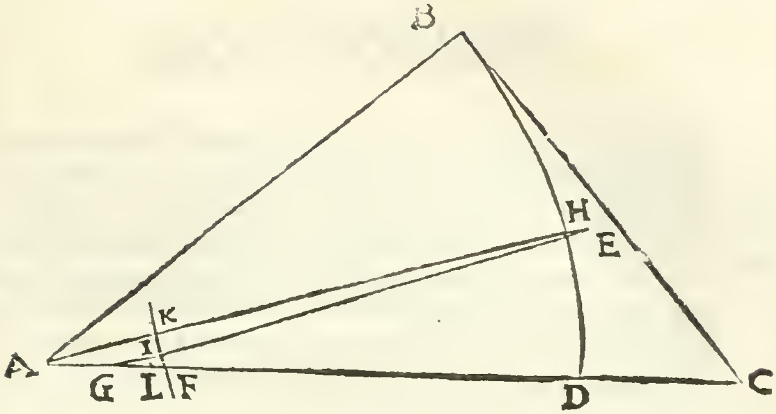
Primum exemplū esto de duobus lateribus inclusis simul sumptis ex nostris Apiarijs, ac minoribus duobus simul sumptis.

Sit rectangulum (siue etiam obtusangulum) triangulum ABC. Ex D puncto vtcumq; sumpto in basi ducatur DA; Et quoniam in triangulo BAD maiori angulo B obtuso latus apponitur maius DA, ex DA secetur DE æqualis ipsi BA; ac reliquum segmentum EA bifarietur in F, atque ex F ducatur FC. dico duas DFC inclusas simul sumptas esse maiores includentibus BAC. Nam in triangulo CFA duo latera CF, FA, (idest FE quod sumptum est æquale ipsi FA per constructionem) sunt maiora tertio CA, reliquum autem DE sectum est æquale ipsi BA, ergo cōposita CFD sunt maiora compositis CAB; continentia scilicet exceduntur a contentis.

Alios casus vide apud Proclum. Interim habes vsum 20 propos. Eucl. in re geometrica singulari.

Triangulum intra aliud inscribere, cuius duorum laterum singula singulis maio ra sint trianguli cōtinentis, &c.

Secundum exemplum nos ex primis principijs in ipsa constructione per sectiones æqualium linearum Tyronibus breuiter exponemus, eritq; de duobus lateribus inclusis, quorum singula singulis includentibus sint maiora. Minus operosam constructionē, & emendatam demonstrationem in Pappi codice ex Commandi-



no deducemus. Igitur esto triangulum nec æquilaterum, nec æquicrure basim habens latere minorem iuxta cautiones à Pappo demonstratas; sed sit ABC scalenũ, cuius basis AC, sit maior vtrolibet AB, vel BC. Ex A secetur AD æqualis ipsi AB; intra mixtilineum spatium DBC sumatur punctum vtcumq; E, ad quod ducatur AE. Sumpto interuallo BC, & centro E secetur basis velut in F; inter A, & F sumatur quodlibet punctum G, & iungatur GE. Dico duas AE, EG inclusas singulas esse singulis includentibus maiores, nempe ipsam AE esse maiorem, quàm ipsa sit AB, ipsam verò GE maiorẽ, quàm ipsa BC. Nam ab eodem centro æquales ductæ sunt AB, AH, ergo superatur ipsa AB ab AE segmento HE. Item interualla BC, EI sumpta sunt æqualia, ergo superatur ipsa BC ab ipsa EG segmento IG.

Quod autem in cõstructione posuimus à sumpto interuallo BC secari ex E basim in F, patet, quia in posito scaleno supponimus BC esse minimum latus, ac proinde interuallũ eius minimi lateris ex E cadet citra A, & secabit ipsam EA (maiorem adhuc ipso latere AB) vt in K; cadetque sectio etiam eiusdem interualli EK citra A in basim, &c.

Horum autem paradoxorum fontem aperiet paralogismus, siue abusus in § 1 sequentis 21 propos. Eucl. vt ibi videbis mox.

SCHO-

SCHOLION.

Quælibet recta curuæ subtensa minor est quã curua.

EX hac 20 prop. Eucl. patet quamlibet rectam curuæ cuilibet ſubtenſam ſemper eſſe minorem curuà, cui ſubtenditur. nam ab extremis rectæ ſubtenſæ duci poſſunt duæ rectæ in angulum ad quodlibet punctum curuæ, fietq; triangulum, cuius duo latera intra curuam cõtenta cum ſint maiora tertio, id eſt ipſà ſubtenſà, multo maior erit eàdem ſubtenſà ipſa curua continens duo latera. Fingat Tyro figuram, & applicet figuræ dicta in hoc Scholio, quæ per ſe patent, & vſui ſunt in Geometricis.

§. V.

THEOREMA.

In omni quadrilaterà figurà rectilineà tria latera, vt libet aſſumpta, maiora ſunt reliquo.



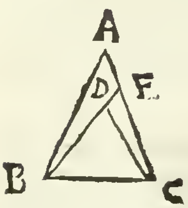
SIt quadrilaterum ABCD. Dico quælibet tria latera, nimirum DA, AB, BC ſimul sũpta eſſe maiora reliquo latere DC. Ductà enim diametro BD, erũt rectę BD, BC maiores, quàm DC. Sed eàdem ratione AB, AD maiores ſunt, quam BD, maiores erunt ergo tres AD, AB, BC, quã duæ BE, BC; ac proinde multo maiores, quã DC. Idẽq; demonſtrabitur ſimili modo de quibuſcũq; alijs tribus lateribus, vt conſtat. In omni ergo quadrilatera figurà rectilineà tria latera, vt libet, aſſumpta, maiora ſunt reliquo latere. Quod erat demonſtrandum. *Clauius lib. 8 Geom. Pract. Propoſ. 13.*

Pro-

Propoſ. XXI. Theor. XIV.

Si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectæ intra conſtituantur, erunt hæ minores reliquis duobus trianguli lateribus, at maiorem angulum continebunt.

A Terminis lateris BC, trianguli ABC, conſtituantur duæ rectæ BD, CD intra. Dico BD, CD reliquis trianguli lateribus BA, AC minores eſſe; at angulum BDC maiorem continere angulo BAC. Producatur enim BD in E. Et [a] quia omnis trianguli duo latera reliquo maiora ſunt, erunt & trianguli ABE latera AB, AE maiora BE latere. apponatur communis EC, [b] eruntq; BA, AC maiora ipſis BE, EC. Rurſus trianguli CED latera CE, ED [c] maiora ſunt latere CD, communis apponatur DB, eruntq; CE, EB maiora ipſis CD, DB. Sed BA, AC maiora oſtenſa ſunt ipſis BE, EC; multo ergo AB, AC maiora erunt ipſis BD, DC. Rurſus, quoniam [d] omnis trianguli externus angulus interno, & oppoſito eſt maior; erit & trianguli CDE externus BDC maior interno CED. Eandem ob cauſam erit trianguli ABE externus CEB maior interno BAC: ſed & BDC oſtenſus eſt maior ipſo CEB: multò ergo maior eſt BDC, quàm BAC. Quare ſi à terminis, &c. quod oportuit demonſtrare.



a prop. 20. I.

b ax. 4.

c prop. 20. I.

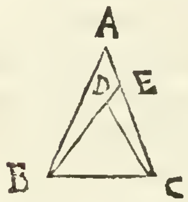
d prop. 16. I.

§. I.

PARADOXA-

-Geometrica indicata in vero, & in fallaci vsu prop. 22.

Angulus inclusus maior includente.



REctè Proclus notat paradoxum esse angulum maiorē (in figurà Euclidis) BDC includi à minore BAC, & maiora latera BA, AC continere minorem angulum. Præterea proponi ab Euclide terminos totius basis, à quibus ducenda sunt latera inclusa minora. nam à parte basis duci poße inclusa latera maiora includentibus iam vidisti demonstratum ex antecedenti 20 *propos.*

Hæc igitur propositio in sui recto vsu, & abusu exhibet paradoxa. Quomodo enim (inquit Proclus) admirabile non est si quæ quidem super toto constituuntur latere externarum minores sunt, quæ verò super parte maiores?

§. II.

Corollaria, & paradoxa optica in figura propositionis 21 Eucl.

APplicandæ, atq; ornandæ huic 21 *propositioni apud Euclidē opem, & opes ab ipsomet Euclide petamus. Itaq;* — 1 *Quintum ac sextum supposita sunt in Opticis Euclidis:* Quæ sub maiore angulo cernūtur maiora existimari, quæ sub minore minora. *Positis ijs opticis suppositionibus, licet geometricè, ac verè sub maiori angulo D (in figura huius* 21 *propos. Eucl.) & sub minori A sit èadem basis BC; tamen in vsu Physico, & in apparentia ad oculum, basis BC non vna videbitur,*

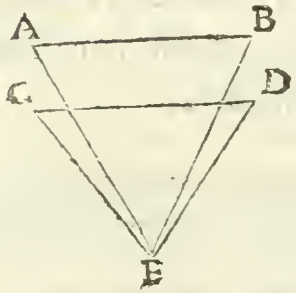
Quæ sub maiori angulo videntur maiora, & contraria ratione. &c.



bitur, sed oculo (finge figuram & spatia amplissima) prospectāti in A basis BC minor apparebit, prospectanti ex D maior. Non eadem est ergo basis BC opticè, quæ geometricè.

2 In iisdē opticis Euclidis theorema quintum est, & demonstratio ad ampliationem, & vsum huius 21 proposit. Æquales magnitudines inæqualiter distantes inæquales apparent, & perpetuò maior quæ propius ad oculum posita est.

Æqualia inæqualiter distantia inæqualia apparēt, maius quod propius.



Sit AB æqualis ipsi CD, oculus autem sit E, à quo radij procedant EA, EB, EC, ED. Cum igitur CD sub maiori angulo spectetur, quàm AB, maior apparet CD, quā AB. &c. per anteced. &c.

§. III.

SCHOLION.

Magnitudo CD sub maiore angulo spectatur, quàm magnitudo AB. Si enim AB, & CD altera alteri ita applicetur, vt punctum A cum puncto C, & punctum B cum puncto D congruat, cum duæ lineæ EA, EB duabus lineis EC, ED maiores sint, igitur triangulum ECD cadet intra EAB triangulum; quare latera EC, ED continebunt CED maiorem angulo AEB, per hanc 21 prop. 1 elem. *Hæc Euclides in Opticis pro, & ex hac hìc 21 prop. elementari.*

§. IV.

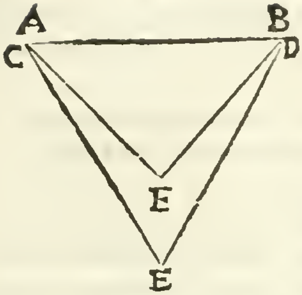
PROBLEMA militare,

Siue ratio optica è 21 prop. experimenti pro re bellica, quo aliqui docent modum agnoſcendi vtrum res aliqua è longinquo accedat, an recedat. Addita noſtra praxis facillima.

1 IN *libro quarto commentar. in Planiſphærium cap. 24 vir doctus Ioan. de Roias praxim quidem docet in vſu Aſtrolabij, at ſine demonſtratione; Nos hîc pro Tyronibus praxim circino applicabimus, ac demõſtrabimus. Verba Roiæ ſunt:* Quæ in longitudine mouentur res, maxime ſi à diſtanti loco conſpiciantur, ſæpenumero accedāt ne, an antecedant à nobis propter viſûs imbecillitatem in dubium trahitur. Id quod in feliciſſimâ tua, Carole maxime, in Tunetum expeditione videre licuit, cum Maurorum copiæ circumquaque ſuo more diſcurrentes, ob loci diſtantiam fugiebântne, an noſtros ſequebātur vix cerneres. Erit igitur operęprecium noſſe quà id indubitatà ratione poſſit ſubinde cognoſci, vt vel de inſequendo fugiente hoſte, vel de inſtantium impetu repellendo conſilium maturet. Suſpenſa igitur ab haſta, vt firmior ſit, aut à re aliqua immobili ſphærà; dioptrám in hoſtem dirigemus. Poſt pauxillum verò temporis ſphæra, dioptràq; immotis, eandem rem ruſus per pinnularum foramina, aut earum ſaltem latera conſpiciemus: ſtatimq; acceſſiſſe, aut retroceſſiſſe hoſtes cognoſcemus. Si autem immotà (vt diximus) dioptrà ſemel atq; iterũ hoſtes per eius pinnularum foramina conſpexerimus, neq; accedere eos, neq; recedere, ſed potius ſe à loco nõ mouiſſe colligemus.

2 *Vt expreſſius quæ acciſa ſunt apud Roiam intelligas, puta circinum eſſe AEB, cuius cruribus EA, EB dilatatis, & oculo appoſito ad verticem E, comprehendatur obiectum longinquum ſub apparenti baſe AB. Si paullò poſt obiectum ſub eodem circino proſpi-*

cias,



cias, & obiectum non amplius comprehendatur sub angulo AEB, sed sit necesse eum dilatare ita, vt obiectum longinquum iam cōprehendatur sub maiore angulo CED, patet ex Eucl. in Opticis citatis, & ex hac 21 propos. obiecti factam accessionem ad oculum, nempe minoratis lateribus, & ampliato angulo circa eandem basim, &c.

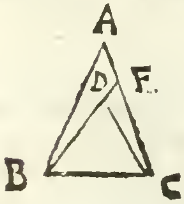
Contraria ratione facta erit recessio obiecti, si ex ampliori angulo circinus constringendus fuerit in angulum minorem. Consistet autem obiectum, si per interualla temporis prospectum, videbitur totum sub eodem circini angulo. Vt præcisior fiat praxis, expedit vti circino partium, cuius latera plana sunt, & per acus perpendiculariter erectas in vertice, & in extremis laterum dirigendos erit prospectus ad obiectum, vt alibi pluribus à nobis expositum est in Apiarÿs Philosophiæ Mathematicæ.

§.V.

THEOREMATA optica è 21 prop. Eucl.

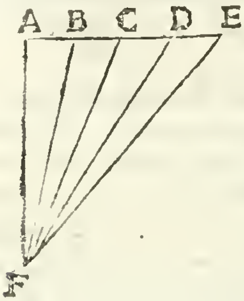
1 THeorema secundū Eucl. in opticis est: Æqualium magnitudinum inter se distantiū quę propius positę sunt, accuratius cernūtur. *Ratio est ab hac 21 propos. quia sub maiori angulo D (in figurâ hîc Eucl.) cernuntur, sub quo non solum tota basis BC amplior videtur, quàm sub A, sed etiam proportione singulæ partes basis BC ampliantur, & minus fugiunt aciem visûs. Si ergo ex hac 21. propos. angulum visorium amplifices accessu oculi, vel obiecti, vel per eas artes dioptricas, quas nos in Apiar. 6. to. 1 prodidimus, vsus præclaros pro visione inuenies.*

Propiora accuratius cernuntur.



11 *Theorema quartum est in optic. Eucl.* Aequalium interuallorum in eàdem rectâ lineâ collocatorum quæ è longiore interuallo spectantur minora apparent.

Quod theorema ab Eucl. in demonstratione, & Scholio acutè probatum ex ijs quæ de parallelis demonstrantur in hoc 1. lib. & è 4 propos. lib. 6, quo nondum Tyrones adduximus, nos hic ex hac 21 propos. saltem aperiemus. Nam æqualia interualla, seu magnitudines æquales AB, BC, CD, DE collocatæ in eàdem rectà AE, ac spectatæ ex F, licet verè sint æquales, tamen earum semper minor apparet quæ continetur sub longioribus lineis ex F productis; Maior apparet AB, quàm BC; BC, quàm CD, CD, quàm DE. Euclides demonstrat angulos ad F eo minores esse, quo vergunt magis ad partes obliquas versus E. Nos hìc Tyroni satis nunc esse putamus, si iuxta hanc 21 Eucl. animaduertat æquales partes AB, BC, &c. esse pro eàdem basi, à cuius extremis dum ducuntur breuiores AF, BF, quàm EF, BC, quasi breuiores cadant intra longiores, constituent triangulum, cuius angulus ad verticem maior est angulo longiorum laterum, &c. ideoq; visæ partes æquales sub inæqualibus angulis apparebunt inæquales, minores sub minoribus angulis, &c. Hinc —



§. VI.

— *PARADOXVM opticum.*

Res quantæ semper minores apparent, quàm verè sint.

1 E*Rgone hic error, ac deceptio perpetua in visione naturali animalium? Soluentur omnia mox. Veritatem paradoxi priore loco prodamus in fig. huius 21 propos. Eucl. Nam basis BC spectata vel ex A, vel ex D semper minor apparet, quàm verè sit, quia eius partes æquales quo magis accedunt*

ad

ad B, vel ad C sub obliquioribus, & inæqualibus angulis, & lineis apparent. Ergo totius BC partes æquales, inæqualiter minoribus angulis spectatæ, non apparent æquales suæ totali BC, sed eam verà minorem ostentant.

2 Paradoxum hoc opticum, quod nos quasi corollarium ex antecedenti 4 theoremate Euclidis deduxeramus, gauisi sumus cùm deinde apud nostrum Aguillonium (apud alium neminem) reperimus doctè confirmatum Opticorũ lib. 3. consectario 2 post prop. 12. Ac sane copiosè Aguillonius de toto eo genere Optices philosophiæ, quæ in directa visione versatur, disputauit, ac demonstrauit, vt vix locum vlli ad res nouas in eo genere asserendas reliquerit, quin immo noua ipse, ac præclara inuenerit, ceu de horoptere, ac de alijs. Quo de, ac pro quo Scriptore libet pro re nata, pro veritate, & charitate quam meo consocio debeo, in Scholio parergico sequenti seorsim paucula seponere.

Laus Aguillonij.

§. VII.

SCHOLION parergicon —

— Pro opticis Aguillonij, ac de vario genere Mathematicarum demonstrationum.

AGuillonio nostro accidit id, quod est in prouerbio: leoni mortuo etiam lepores barbam vellunt. *Qui tamen vir est non minus in Physicis, quàm in Mathematicis disciplinis versatissimus, vbiq; se pro docto (vt verè est) & pro magistro gerens. & si quando materia exactã geometriam patitur, geometricè, si quis alius, demonstrat. Deniq; sine vlla trepidatione legendus est, attamen intelligendus. Halluc nati fortasse aliqui non distinxerunt in eius Authoris Opticis physicas aliquas operationes, ac materias à geometricis theorijs, & demonstrationibus.*

Vidisse debuerant Ar. l. 1. metaph. t. 16. Certitudinem sermonis mathematicam non opportet in cunctis quærere, sed in his,

quæ

Certitudo mathematicæ in abstractu.

quę nõ habent materiam. *Egregiè, ac verè Proclus lib.1, cap.11 in lib. 1 Eucl.* Neque ab omni mathematicà eandem certitudinem requiremus. nam si vna quidem sensilia quodam pacto attingat, altera verò intellectilium subiectorum cognitio sit, non eodem modo ambæ erunt certæ, sed altera magis. Ideo Arithmeticam Harmonicà dicimus certiorem. Neq; omnino Mathematicam, cæterasq; scientias ijsdem vel demonstrationibus æquum censebimus. Earum enim subiecta haud exiguam ipsis præbent differentiam. *Cautè, idest cum intelligentia, & distinctione, quam habes à prædictis philosophis, non solum Aguillonius, sed & alij versantes in mathematicis mixtis legendi, & intelligendi sunt. Hinc collyrium habento, si qui sunt, quibus aliquando parum perspectæ sint lucubrationes Authorum Illustrium, in quos censuram ausint sibi vsurpare, ac eorum doctrinæ gratis, nulla prolata causà, detrahere. Quorum Authorum publica patrocinia sunt nationes omnes eorum doctè scripta studio, & cõmendatione vnanimi celebrantes.*

Non eadẽ certitudo in omnibus generibus Mathematicarũ scientiarũ.

Inique, ac temere nõ est censendũ de illustribus scriptoribus.

§. VIII.

SCHOLION

Indicata vbinam solutio incommodi à Paradoxo de rerum quantitate fallaciter apparente.

AC Aguillonius quidem & ipse nobiscum vidit paradoxum in visorijs apparentijs rerum, quæ, ob præmonstrata ex Euclide hìc, & in Opticis, fallacem rerum quantitatem oculis ostentant; non tamen tamquam absurdum in naturali visione tollendum censuit. At nos in Apiar. nostro 6, præsertim cap. 3, progym. 3, mirificum ab Authore naturæ consilium prodidimus, quo visioni animalium emẽdatæ ita prouidit, vt ea directæ visionis fallacia corrigeretur à visione dioptrica, quæ intra oculum celebratur per varios inibi humores, ita vt partes obiectorum laterales, quæ in visione directà minores intermedijs æqualibus apparerent, appareant dilatatæ, ac iustę quantitatis

Correctio naturalis fallaciæ naturalis in visione quãtitatis rerum.

cum

cum cæteris, dum transmittuntur, ac refrãguntur per interna oculorum diaphana, &c. Vide, mi Tyro, citatum Apiarium, atq; etiam citati prog. 3, cap. 1, & 3, & 7, vbi docemus quemadmodum refractio partium in obiectis extremarum extra diaphana fiat ad angulos ampliores, intermediarum ad angulos moderatiores. In primis verò sphærohyperboliforme diaphanum (qualis figuræ cristallinus est humor in oculo) perficit omnia, quæ desiderari possunt in visionis absolutissimà operatione. Hìc indico quæ ibi suo loco exposita sunt, & hìc essent extra institutionem elementarem. Vide id Apiar. 6.

§. IX.

SCHOLION.

Iucundæ opticæ fallaciæ, ac eruditiones explicatæ in figurà propos. 21.

1 S*I (quod accidit in valde longinquis) basis (in figura Euclidis) BC distracta sit in aliquot partes, & tamen oculo in A sub minore angulo, & longinquiore minus accuratè spectanti appareat ipsa BC integra, & vnica linea, fiet vt oculo accedenti ad angulum ampliorem D videatur BC dissecari, ac in partes distrahi apparentibus nimirum interuallis sub angulo propiore, ac latiore D, quæ interualla oculi aciem effugiebant sub longinquiore, ac minore angulo A. Cõtraria ratione fiet vt oculo in D spectanti BC in partes distractam, si recedat in A, partes coiße videantur in vnam BC.*

Pictura accessu dissecta, recessu cõposita, ac vnita.

2 *Hinc fabulæ locus apud poetas de duabus insulis cõtra Thracium Bosphorum, quas affirmabant modo inter se in vnam insulam coire, modo diduci. Valerius Flaccus Argonauticon lib. 4.*

A 21 prop. soluta opticè fabulosa fallacia de Cyaneis insulis.

Hinc iter ad ponti caput, errantesq; per altum
Cyaneas: furor his medio concurrere ponto. *mox:*
illæ redeunt, illæ æquore certant.

& Plin. lib. 6 cap. 12. Quoniam paruo discretæ interuallo ex aduerso intuentibus geminæ cernebantur, paullumq; deflexa acie coeuntium speciem præbebant. *Accedentes naues quasi faucibus hian-*

hiantibus intromittebāt, recedentibus fauces occludere videbantur. Inde timor nautis eas non solùm modò directè, modò, vt ait Plinius, obliquè prospectantibus pro vario ventorum pulsu, atq; agitatione, sed etiam pro accessu, vel recessu &c.

Modus imagines pingendi, quæ accessu dissecare, recessu cōpons videantur.

3 *Hinc imaginum partes per columnarum ordines pictæ, quæ ex angulo longinquiore, ac minore prospectæ apparent in vna, atq; integrà imagine, visæ sub propinquiore, ac maiore angulo vere dissectæ videntur. Cuius optici spectri praxim, & figuram vide apud nos in Apiar. 5 scenographico, Progym. 2, sub finem capitis 2.*

Oculo accedenti res videntur augeri &c.

4 *Ex antedictis patet veritas Theorematis 55 in opticis Euclidis:* oculo ad rem visam accedenti res visa augeri videtur. *Adde & recedenti minui. Non solùm enim (in figura Eucl.) oculo fixo in A minor BC, fixo in D maior apparet, sed etiam in ipsa progressione ex A in D videtur BC paullatim augeri atque admoueri, in recessione verò à D in B sensim minui, ac remoueri.*

Atria, quæ intrantibus ruere videntur.

5 *Hinc licet atria angulosis parietibus, & varijs columnarum ordinibus picta sic effingere, vt in aditu spectantibus omnia recto ordine composita appareant, celeriter verò intrantibus omnià ruere cum horrore, ac innoxià fallacià videantur, dilatatis nempè angulis visorijs, & distractis parietum, & picturarum partibus. &c. Vide apud Aguillonium (vbi de fallacijs aspectus circa motum, & quietem) modum ea atria sic fallentia extruendi; atq; ex eo apud nos in Apiar. 5, progym. & cap. nuper citatis.*

§. X.

V S V S, & applicationes

21 prop. Eucl. in in Architecturà.

Cur in columnis celsioribus augenda proportio scaporum, &c.

1 V*Itruuius cap. 2, ac 3 præcipit.* In columnis quo celsiores, eo minorem admittunt summi scapi contracturam. *Quia in eà celsitudine, ac remotione ab oculo sub minori angulo apparent columnarum partes, ac latera. Itaq; in nimià longitudine, ac celsitudine ratio est habenda, quà dilatetur angulus visorius, & fiant crassiores, quàm opporteret si vel propiores, vel demissiores essent, ac spectarentur. Affert deinde*

Vi-

Vitruuius in eo lib. 3, cap. 2 proportiones dilatationum illarum ad praxim sic : Contracturæ in summis columnarum hypotracheliis ita faciendæ videntur vti, si columna sit ab minimo ad pedes quinos denos, ima crassitudo diuidatur in partes sex, & earum partium quinq; summa constituatur. Item quæ erit ab quindecim pedibus ad pedes viginti, scapus imus in partes sex, & semissem diuidatur, ex earumq; partium quinq;, & semisse superior crassitudo columnæ fiat; ita quæ erunt à pedibus viginti ad pedes triginta, scapus imus diuidatur in partes septem, earumque sex summa contractura perficiatur. quæ autem à triginta pedibus ad quadragima alta erit, ima crassitudo diuidatur in partes septem, & dimidiam, ex his sex & dimidiam in summo habeat contracturæ rationc. Quæ erunt à quadraginta pedibus ad quinquaginta itē diuidendæ sunt in octo partes, & earum septem in summo scapi hypotrachelio contrahantur. Itemque si quæ altiores erunt, eadem ratione pro rata constituantur contracturæ.

Ad quam proportionem dirade sint contracturæ in summis partibus columnarum.

Rationem cur contracturæ moderandæ sint affert Vitruuius etiam extra Opticen, quam rationem eruditionis gratia hìc accipe: Hæc autem propter altitudinis interuallum scandentis oculi speciem fallunt. Quamobrem adijciuntur crassitudinibus temperaturæ. Venustatem enim persequitur visus, cuius si non blandimur voluptati proportione, & modulorum adiectionibus, vti id, in quo fallitur, temperatione adaugeatur, vastus, & inuenustus conspicientibus remittetur aspectus.

Oculo blandiendum in Architectura.

Noster Villalpandus to. 2. de Templo Salomonis, par. 2. lib. 4. c. 67, & lib. 5. c. 0 ostendit Vitruuium præ alijs exteris, ac ethnicis hausisse venustatem prophanæ ciuilis Architecturæ à venustissimà sacri Salomonici templi descripti symmetrià.

Ratio, & venustas Architecturæ apud ethnicos à Sacrà hebræorūq; que & venustior.

Ac quod attinet speciatim ad nostrum negotium de columnarum in summis partibus moderanda contracturà, ostendit idem Villalpandus venustiorem fuisse in Salomonici templi columnis moderationem contracturæ ex decima parte crassitudinis. Qui numerus denarius mystica plura continet, & indicat in sacra eius admirandi templi Architecturà. Confert deinde contracturas sacras cum prophanis Vitruuij, affertq; rationes cur Vitruuius in cōtracturis discrepet à sacris.

2 Idem Vitruuius circa ea, quæ columnis imponūtur, & ædificiorum superiores partes præcipit. Epystilia, & ædium summæ partes inclinanda sunt in frontis suæ cuiuscunque altitudinis parte duodecima. *rationem affert, cui robur ab hac 21 Eucl. propositione,*

Ad quam proportionē augenda epistylia, & partes ediū summa.

quia ea altitudo (quæ nihil aliud est, quam maior ab oculo distantia) producit quidem ab oculo lineas, at angulum arctat ita, vt imminuat debitam partium proportionem. Aliam etiam addit rationem physicam potius, quam geometricam. Verba eius authoris digna sunt quæ hìc legas. Igitur cap. 3 sic: Quo altius oculi scandit acies, non facile persecat aeris crebritatem: dilapsa itaq; altitudinis spatio, & viribus extrita, incertam modulorum renuntiat sensibus quantitatem. Quare semper adijciendum est rationis supplementum in Symmetriarū membris, vt cùm fuerint in altioribus locis opera, aut etiam ipsa colossicotera, certam habeāt magnitudinum rationem.

Ex his dictis illustrata Vitruuij verba sequentia.

Paullo post: Membra omnia, quæ supra capitula columnarum sunt futura, idest epistylia, zophori, coronæ, tympana, fastigia, acroteria inclinanda sunt in frontis suæ cuiusq; altitudinis parte duodecima, ideo quod cùm steterimus contra frontes, ab oculo lineæ duæ si extensæ fuerint, & vna tetigerit imam operis partem, altera summam, quæ summam tetigerit, longior fiet. Ita quo longior visus lineæ in superiorem partem procedit, resupinatam facit eius speciem, cum autem (vti supra scriptum est) inclinata fuerint, tunc in aspectu videbuntur esse ad perpendiculum, & normam.

Contignationum robur a 21 propos.

3 *Adde ex Cataldo, qui affirmat ex hac 21 propositione habere vim geometricam contignationes, quibus tecta cū tegulis, vel pontium curuaturæ, ac tabulata sustentantur.*

Nam, in figura Euclidis, latera maiora AB, AC finge esse geminas trabes, quarum pedes, siue extrema B, & C infixa sint tertiæ trabi BC. Modo materia ipsa lignea non cedat, & trabes pondere non infringantur, figuræ vi est immobilis ea contignatio. Si enim, non fractis trabibus, debent duo latera AB, AC cedere ponderi, debet angulus A descendere ad angulum D. Et quoniam supponuntur eædem trabes AB, AC perstare super eàdem basi, suntq; extrema B, C immobiliter innexa, ergo demisso, ac dilatato angulo ex A in D, duæ AB, AC breuiores factæ essēt se ipsis; sunt enim longiores ad angulum A, breuiores ad D. Ne verò partes laterum inter AB, vel inter AC curuentur extrinsecus à pondere in A, addantur pondera inter AB, & inter AC, vt sic, additis ad latera ponderibus, pondus in A sustineatur, nec demittat A in D. Modò igitur, iuxta Euclidis præscriptum, in ijsdem perseuerent extremis B, C, atq; ex arte in ijsdem punctis solidentur extrema basis, & trabium lateralium, non possunt cedere oneri, &c. sic Cataldus ad hanc 21 Eucl. partim innuit.

§ XI

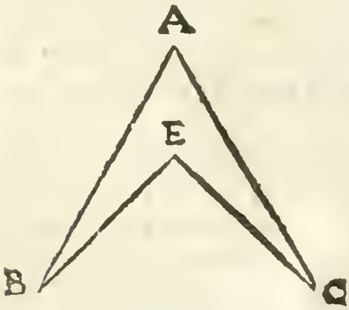
§. XI.

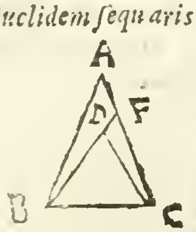
PARADOXVM geometricum

De triangulo quadrilatero è figura proposit. 21, & de figuris cilogonijs.

Acidoidea triangula.

P*Roclus ad hanc 21 propos. Eucl. Cum duæ rectæ intra latera trianguli angulum facientes à basis* extremis incipiendo constituuntur, eorum etiam triangulorum, quæ Acidoidea vocantur, species apparet. vnum hoc quoq; eorum, quæ in Geometriâ admirabilia sunt. Triangulum nempè quadrilaterum reperire. Exempli gra. Triangulum ABC. nã à quatuor quidem lateribus BA, AC, CE, EB continetur, tres verò angulos habet, vnum quidem, qui ad B, alterum autẽ, qui ad A, reliquum verò qui ad C signum est. Quadrilaterum ergo Triãgulum est præsens figurà. *Relege quæ ad hoc idẽ paradoxum pertinent allata ex eòdem Proclo ad definit. 24, 25, 26. Vide etiam nos in Apiar. 3. progym. 5. Propos. 1. &c. Sanè si Euclidem sequaris, & communem acceptionem anguli rectilinei apud Geometras, in figurà quadrilatera (inspice figuram Euclidis hìc) CABDC inclinatio duarum BD, CD ad D citima, & exterior est, nec admittitur pro angulo, nisi respectu trianguli interioris, ac inferioris BDC, in quo triangulo verticalis angulus D facit inclinationem interiorem duarum BD, CD. Relinquuntur ergo in quadrilatero CDBAC tres tantum anguli proprij, ac interni BAC, ABD, ACD. Ex his habes vnde confirmes nostram sententiam in citato Apiar. 3, Progym. 4, in suppositione ante 1*





Anguli exteriores nõ admittuntur in censum angulorum in figuris.

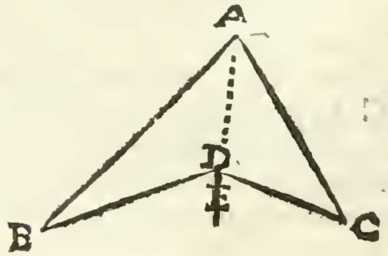
propoſ. dum affirmamus inclinationem duarum rectarum, quæ eſt extra figuram, etiam ſi ea inclinatio cenſeretur pro angulo, tamen non admitti, nec haberi eius rationem in figuris, niſi ſit interior in figurà. Angulus enim D eſt figuræ inferioris, ac contentæ, nempe trianguli CBD; ſicut angulus A eſt figuræ ſuperioris CDBAC, vel continentis BACB.

§. XII.

SCHOLION.

Aliter pro Tyronibus demonſtrare prop. 21.

P*Rior pars theorematis de interioris trianguli duobus lateribus minoribus patet ex communibus notionibus, ac per ſe notis, nempe contenta eſſe minora continentibus; nec obſtãt ex Proclo, & Pappo paradoxa, quę habes ad prop. 20. §. 4. modò iuxta Euclidis præceptum à terminis vnius lateris duæ intra conſtituantur &c.*



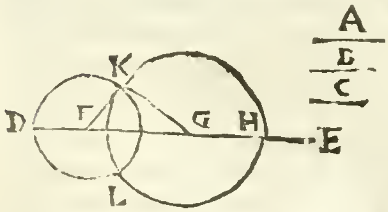
Poſterior pars de angulo maiore ſub lateribus minoribus probari, ac facillimè poteſt, ſi per puncta A, D ducas rectam ADE, nam, per 16, externi anguli EDC, EDB ſunt maiores internis DAC, DAB, ergo totus BDC maior toto BAC.

Pro-

Propos. XXII. Probl. VIII.

Ex tribus rectis, tribus datis rectis æqualibus, triangulum constituere. Oportet autem duas reliquà maiores esse quomodocumq; sumptas, quod omnis trianguli duo latera reliquo maiora sint quomodocumq; sumantur.

SInt tres rectæ A, B, C, quarum duæ quomodocunque sumptæ reliqua maiores sint, vt A, B, quã C; A, C quam B, B, C quã A. Oportet aũt ex tribus quæ sint æquales ipsis A, B, C, triãgulum cõstituere. Exposita sit recta quædam D E terminata ad D, interminata ad E; sitq; a DF ipsi A, FG ipsi B; ipsi C æqualis facta GH, Describatur centro F, interuallo F D, circulus DKL: Centro verò G, interuallo GH, circulus KLH; iũgâturq; FK, KG. Dico ex tribus FK, KG, GF æqualibus tribus datis A, B, C triangulum FKG esse constitutum. Cum enim F centrum sit circuli DKL, b erit FD æqualis ipsi FK; sed FD est æqualis ipsi A; c ergo & FK erit æqualis ipsi A. Rursus cum G sit cẽtrum circuli LKH, d erit GH æqualis ipsi GK; sed GH æqualis est ipsi C, e erit ergo & GK æqualis ipsi C: est verò & FG æqualis ipsi B. Tres ergo KF, FG, GK æquales sunt tribus datis A, B, C. Quare ex tribus KF, FG, GK æqualibus tribus A, B, C triangulum est constitutum. Quod facere oportuit.



a prop. 3. 1.
b def. 15.
c ax. 1.
d def. 15.
e ax. 1.

§.I.

SCHOLION

Euclidis demonſtrationes perperam Theoni ab aliquibus adſcribuntur ex conie-cturà in hac 22. propoſ.

1 *Commandinus ad hanc 22 ſic:* Proclus in commentarijs citat Euclidis verba, quæ à verbis huius demonſtrationis diſcrepant, vt luce clarius ſit Euclidis demonſtrationes aliquibus in locis à Theone mutatas eſſe, & eas, quas nunc habemus, Theonis eſſe, non Euclidis.

Sed, pace Commandini dixerim, perleuis eſt coniectura, quà niſus non dubitat (quod & non nemo alius fecit) eripere Euclidi præcipuam laudem, dum nimis ample affirmat demonſtrationes, quas nunc habemus Theonis eſſe, non Euclidis. *Saltem dixiſſet, quas nunc habemus à Theone alicubi alteratas, ſed ſine detrimento geometricæ firmitatis, ac veritatis. Quam tamen alterationem nemo poteſt probare. Sanè Proclus ad hanc 22 propoſ. Eucl: dum affirmat ſecuturum ſe verba Euclidis, diſcrepat tantum leuiter in ipsà problematis conſtructione, in qua omittens paucula aliqua, quæ iam præcepta erant ab Euclide, ait:* iuſſumq; facere opus ſit. *ne ſcilicet moleſtè repetat Lectori quod iam legerat in Euclide. Cætera demonſtrationis verba cõſentiunt cùm Euclide. Ergòne ob omiſſum neſcio quid non neceſſarium à Proclo, ſtatim affirmes à Theone, non ab Euclide, nos habere demonſtrationes?*

Leue argumentum affirmãdi elemẽ a hæc nõ eſſe ab Euclide, &c.

2 *Contrariæ omnino ſententiæ eſt Io: Buteo, qui arbitratur anſam huius in Euclidem irrogatæ iniuriæ acceptã eſſe ab aliquibus dum legerẽt in Theonis Alexandrini græcà inſcriptione* ἐκ τῶ θεῶνος συνεσυῶν *ideſt, ex homilijs, vel expoſitionibus Theonis nõ autem ex demonſtrationibus, quæ grecè dicuntur* ἀποδείξεις *ſcripſit Theon, vt & Proclus, & Pappus ab Eutocio citatus ad theor. 13. de ſphæra, & cyl. Archim. & ante eos alij egregij Geometræ, expoſitiones (quas ipſemet Theon citat in lib. 1 commentationum ſuarũ*

Occaſio hallucinationis.

in

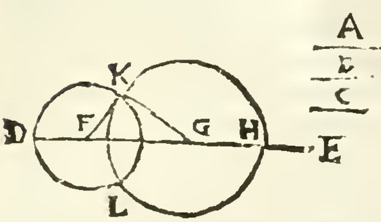
in Ptolomæi magnam syntaxim) in Euclidis elementa, atq; in ijs exemplo Procli alias suas etiam demonstrationes addidit, quæ tamen omnia temporum iniuria periere, factumq; est vt solæ propositiones, & demonstrationes Euclidis, sine Theonis expositionibus extiterint. quod est: ex Theonis expositionibus. *Proclus (quē Theone paullo antiquiorem arbitror, etiam ex eo quod in suis ad Euclidē commentarijs nūquam Theonem citat, alios verò omnes ante se citat) præter alia loca, in quibus & citat, & apponit verba demonstrationum Euclidis, quæ nunc vulgo extant, specimen exhibet clarissimum in comm. ad 1. Eucl. propos. vbi apparet ex verbis, quæ ibi consonant cum verbis vulgatæ demōstrationis Euclidis, Euclidis has esse demonstrationes, siue ab Euclide factas partim collectiones ex antiquis, partim additiones, & confirmationes de suo (vt ait Proclus) nosq; adhuc haurire de puro eo fonte, vnde tot sæculis ante nos hauserunt eximia virorum ingenia, qui seriò Mathematicas scientias didicerunt, atque illustrarunt. Quas quidem Euclidis demonstrationes vel paullulum immutare religioni esse debet cuicunq; optanti non temere, sed tuto, ac verè scientificè Mathematicam Philosophiam profiteri.*

Theonis in Euclidem expositiones periere.

In Proclo vestigium expressum: hæc elemēta esse Eucl. &c.

§. II.

SCHOLION.



ANimaduerte hìc in fig. Eucl. vsum, & exemplū modi, quo Cataldus septimā propositionem huius l. 1. ostēdit. Hic enim ab ijsdem terminis basis FG duæ FD, GH æquales altera alteri, nempe FD ipsi FK, GH ipsi GK ad easdem partes vbi K non coibunt in aliud punctum, quā in K, vbi est mutua sectio circulorum è semidiametris FD, GH, quod vult 7. prop.

Ex 22 prop. modus demonstrādi 7. prop.

§. III.

§. III.

SCHOLION.

De Determinatione Geometrica.

1 NOtat Proclus verba propositionis: Oportet autẽ duas reliqua maiores &c. *efficere vt problema determinatum sit, ac fieri possit. Aliter enim esset indeterminatum, & impossibile. Vide apud ipsum diuisiones problematum, ac theorematum in determinatum, & in Indeterminatum, ac quę nàm sint, hìc ad hanc 2 , & in comment. ad 1 propos. Ratio determinationis hìc ab Euclide positæ est quia nisi duæ datarum sint tertià maiores, non potest fieri triangulum. Nam, per 20 huius omnis triãguli duo latera sunt maiora tertio. Est hoc problema vsus quidam, & quasi deductio ex 1 problemate ad triangula etiam scalena, & isoscelia constituenda.*

Propos. 22 auctarium est ad 1 propos.

2 *Quid, & quotuplex sit determinatio apud Geometras paucis edicit Eutocius in commentario ad epistolam Apollonij ante lib. 1. Conic. & affert exemplum huius 22 propos. Euclidis In qua propositione verba illa.* Oportet autem duas reliqua maiores esse &c. *propositionem determinant peculiaribus cõditionibus linearum, ex quibus fieri possit triangulum. Eutocius:* Determinatio duplex est, vt manifestè patet, altera quidem post expositionem significãs quid sit illud quod quæritur, altera verò propositionem vniuersalem esse prohibens, quę declarat quando (*cadẽ sunt verba Pappi ante li. 7.*) & qua ratione, & quot modis id, quod propositum est, fieri possit, vt in 22 theoremate (*sic vocat Eutocius hoc Problema. Relege quæ apud nos ad proposit. primam pro Martiano, §. 2*) primi lib. elem. Euclid.

Duplex determinatio Geometrica.

Nota vocari theoremata etiã quæ sũt problemata, quia finis Geometricæ Philosophiæ contemplatio est.

3 *Vide, mi Tyro, ne hallucineris in verbis Eutocij, quasi determinatio sit circa quæsitum, siue propositum ad cognoscendum, vel comparandum; est enim determinatio non quæsiti, sed dati, vt rectè notat Proclus ad 1 propos. Eucl. sic hìc tres rectæ lineæ datæ determinantur, vt duæ sint reliquà maiores. Habes in verbis huius propos. 22, & in ipsius demonstrationis initio post expositionem, exemplum determinationis in vtroque modo eorum, quos affirmat Eutocius.*

Determinatio geometrica est Dati, non Quæsiti.

§. IV.

VSVS, & applicatio

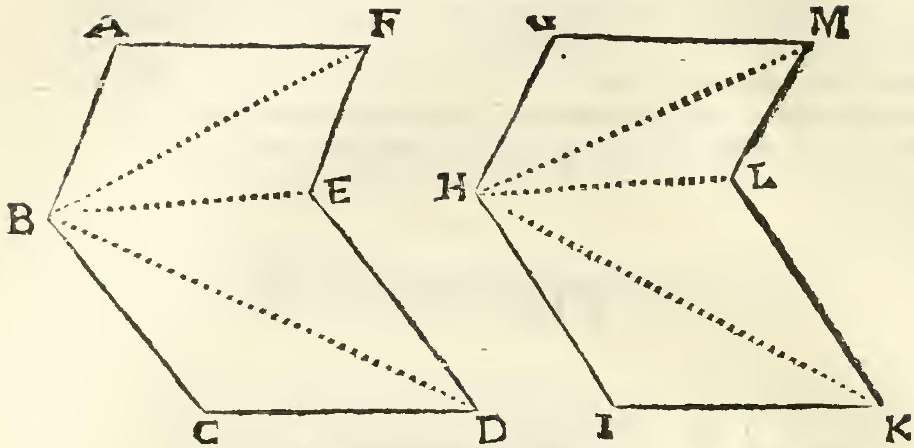
Prop. 22. Eucl. in Geometrià Practica, & in Pictura, nempe, dato rectilineo æquale rectilineum, siue prototypo æqualem imaginem constituere.

1 P*Osset etiam vsui esse Picturæ opticæ propos. 22 Euclidis, non solum Geometriæ Practicæ; Docet enim ea propositio modum scientificum eius partis in Optica Pictura, quem Pictores vulgo appellant* il copiare, *transferre, siue educere exemplar non solum simile, sed & omnino æquale prototypo. Sed versemur in faciliori exemplo Geometriæ practicæ. Ac primo ista constructio trianguli ex tribus datis rectis lineis est constitutio trianguli æqualis dato triangulo; nihil enim refert vtrum tres datæ sint extra triangulũ, an verò iam conficiant triãgulum. Nam circa illas tres constituentes triangulum eædem sunt praxes vsurpandæ quas tradimus, & è tribus mensuris laterum dati trianguli constituendum est alterum dato æquale.*

Imaginem æqualem, & similem prototypo designare ex 22 prop.

2 *Secundo vero loco pro rectilineo quãtumuis irregulari transferendo in aliud æquale, diuidatur datum rectilineum habens plura latera, quàm tria, in quot potest triangula. Qua de re plura ad 32 propos. inferius.*

Recti-



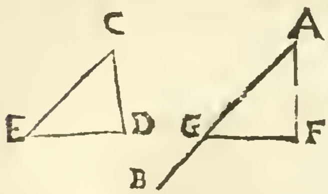
Rectilineo quātumuis irregulari æquale cōstituere.

Rectilineū ABCDEF diuisum est in quatuor triangula, vt vides in figura. Accipe vnius è quatuor triangulis lateri, verbi gratia lateri AB trianguli ABF accipe rectam æqualem GH, & ex AB, BF, FA lateribus trianguli ABF constitue, per praxim huius 22 propos. Eucl. triangulum GHM. Eodemque modo è tribus BF, FE, EB cōstitue triangulū MNL, pariq; ratione de reliquis: erit rectilineum GHIKLM omnino æquale dato ABCDEF. Sunt enim partiū, idest triangulorum singulorum sumpta æqualia latera, ac proinde per 8 propos. æqualia sunt triangula triangulis, & vtraque àrea (constans ex æqualibus partibus) inter se æquales, rectilineumque rectilineo æquale.

Pro-

Propos. XXIII. Probl. IX.

Ad datam rectam, datumq; in ea punctum dato recto rectilineo æqualem angulum rectilineumconstituere.



Sit data recta AB, datumque in ea pūctum A, datus angulus rectilineus DCE. Oporteat autem ad punctum datum A datæ rectę AB dato angulo rectilineo DCE æqualem angulum rectilineum constituere. Capiantur in vtraq; CD, CE quælibet puncta D, E, & iungatur DE: [a] atq; ex tribus rectis, quæ æquales sint tribus CD, DE, EC, triangulum AFG constituatur: ita vt CD æqualis sit ipsi AF; CE ipsi AG; DE ipsi FG. Cum ergo duæ DC, CE æquales sint duabus FA, AG, altera alteri, sit verò & basis DE æqualis basi FG; [b] erit & angulus DCE ęqualis angulo FAG. Quare ad datā rectam AB, datūq; in ea punctum A dato rectilineo angulo DCE æqualis angulus rectilineus FAG est constitutus. Quod oportuit facere.

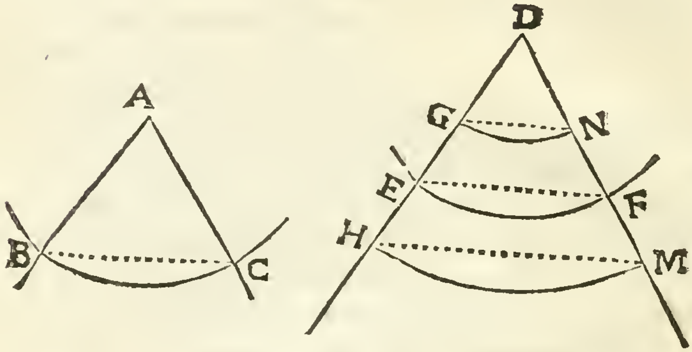
a prop. 22. 1.

b prop. 8. 1.

§. I.

PRAXIS

Angulum angulo æqualem &c. constituendi ex Apollonio; & de licitâ anticipatione in praxibus.



1 E*xpeditissima praxis est Apollonij, quam ponit Proclus. Sit in priore figurâ datus angulus rectilineus BAC, & in alterius figuræ rectâ DE sit datum punctum D, ad quod angulus constituendus est æqualis dato A. Centro A, & interuallo quolibet ducatur arcus, quo secentur AB, AC in B, & C. Eodem interuallo ex D secetur DE in E, ducaturq; arcus EF. nox interuallo arcûs BC secetur arcus EF, iunctâ FD, erit angulus EDF factus æqualis dato A. Hanc tamen praxim Proclus reprehendit, quia supponit pr opositionem 27 tertij:* In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt peripherijs, æquales sunt. *Proclus ergo:* Huiusmodi itaq; ostensionem tamquam posterioribus vtentem ab elementari institutione alienam esse censemus. *Quæ Procli reprehensio impetit etiam alios, si qui eâ praxi vsi sunt ad hanc 22 prop. Eucl.*

2 *Cæterum Proclo respondendum est non esse absurdum, aut insua-*

ſuetum magnis etiam Geometris, vbi tantum praxis quæritur, ſupponere vſurpatæ praxis demonſtrationem in ſequentibus; præſertim cum problema, cuius variæ praxes aſſeruntur, ſuam habet præſentem demonſtrationem, cui praxes aliæ adduntur ſuis locis omnes deinde demonſtrandæ. Reuiſe huc quæ in anteeentibus ſcripſimus in § 4 ad propoſ. 11. Ipſemet Proclus ad ſequentem propoſit. 24 Eucl. demonſtrat aliqua ex propoſitionibus, quæ ſunt poſt propoſ. 24, & ignotæ Tyroni Geometrico. Cur ergo reprehendit quod ipſe vſurpat?

Apollonij praxis non eget anticipatione.

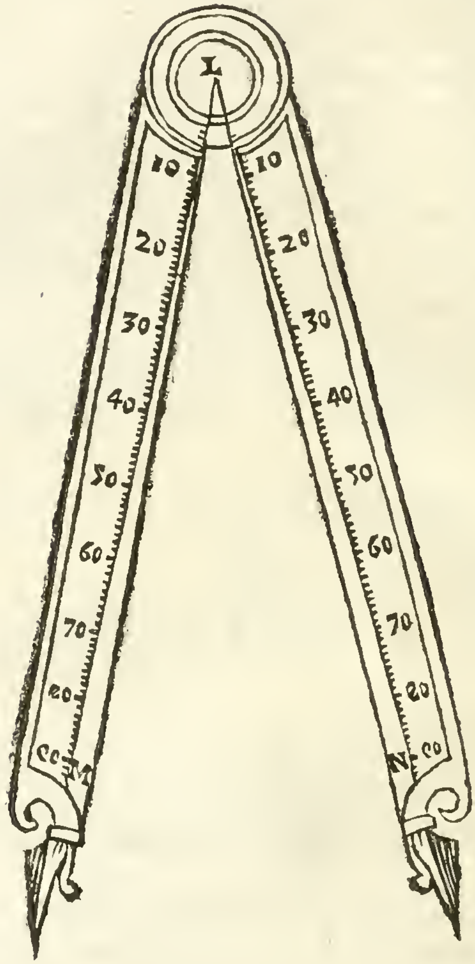
3 Præterea praxis Apollonij non eget tertio libro Euclidis, ſed demonſtrari poteſt etiam ex 8 prop. huius l. 1. ſunt enim æqualia interualla rectarum BC, EF, etiam non ductis arcubus; præterea æquales ſemidiametri AB, DE, AC, DF; æqualium ergo triangulorum ABC, DEF æquales ſunt anguli A, & D ſub ęqualibus rectis BC, EF. &c.

§. II.

PRAXIS alteræ

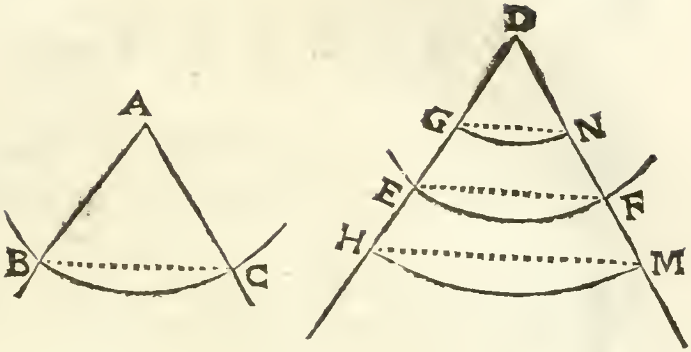
Paradoxica conſtituendi dato angulum æqualem per inæqualia, & lubita interualla è circino partium.

PRæcedens praxis vtitur duplici interuallo circini, altero ſecante ex A in B, & C, & ex D in E, & F, altero ſecante ex B in C, & ex E in F. Quid ſi accidat poſt factam primo interuallo ſectionem ex A in B, & C, fieri ſtatim alteram ſectionem ab altero inęquali interuallo ex B in C? fieri ne poteſt vt, eodem interuallo BC ſeruato, fiat ſectio ex D inæqualis quidem factis ſectionibus ex A, ſed tamen apta conſtituendo angulo quæſito? Imò verò fieri poteſt ex D ſectio ad quodlibet aliud lubitum interuallum ſic: In circini partium eam faciem, in quam, ex antedictis ad prop. 9. tranſlati ſunt quadrantis, ſiue anguli recti gradus 90, transfer interuallū AB à centro L ad numerum, quem ſignabit altera circini cuſpis, ſitq; verbi gratia



interuallum ab L ad 20, deinde accipe interuallum BC, & transfer illud inter 20, & 20, diductis ad id cruribus circini partium, & in ea diductiore perstantibus. Deinde centro D, ac interuallo lubito, siue maiori, siue minori ipso DE, puta maiori, hoc est DH, ducatur arcus ex H ad partes M. Mox interuallum DH transfer in alterum duorum laterum circini partium, sit ab L ad 30; Accipe interuallum inter 30, & 30, ac eo sectio fiat ex H in M. Iuncta MD conficit eumdem angulum D æqualem dato A. Eundemq; conficeret facta sectio ex G ad interuallum GN sumptum verb. gr. inter 10, & 10 in circino partium.

2 Ra-



2 *Ratio est, quia arcus GN, EF, HM sunt circulorum concentricorum similes inter se, ac eundem angulum D (vt & eundem L in circino partium) subtendentes eodem numero graduum, verbi gratia, graduum 15; licet minimi arcus GN gradus 15 sint & singuli, & omnes minores singulis, & omnibus 15 gradibus arcus medij EF, cuius 15 gradibus maiores sunt 15 gradus tertij arcus HM. Similes inter se sunt & arcus, & arcuum gradus. Rectæ subtensæ GN, HM, vt & EF, parallelæ sunt, & æquiangula triangula constituunt communem angulum D habentia. Vide Clau. in Schol. ad prop. 22 lib. tertij, & ad prop. 33 lib. 6, vbi hanc ad rem demonstrationes habet. Vide etiam nos in Apiar. 1. prælibam. 2, vbi ex araneà geometrizante corollaria aliqua, siue propositiones aliquas deducimus de circulis se tangentibus, & de concentricis. &c.*

§. III.

VSVS vniuersalis,

Et applicatio prop 23 Eucl. in Geometrià Practicà, in Picturà, in Astronomià, & pro lib. 6 Euclidis, scilicet —

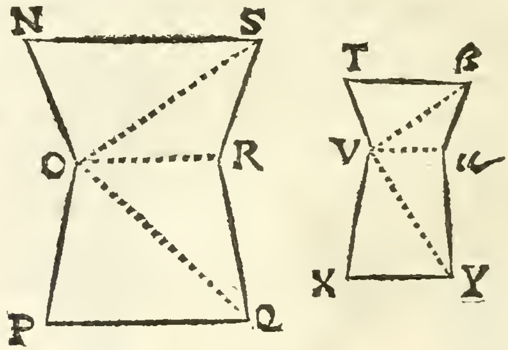
TRO-

PROBLEMA

Dato rectilineo æquiangulum simile, similiterq; positum rectilineum constituere.

1 Habes hoc lucri, vt ante librum 6 discas ex hoc lib. 1 æquiangulas figuras constituere, circa quas versantur demonstrationes lib. 6, & à quibus plurimæ, ac miræ manant vtilitates ad fere omnes, ac præcipuas Mathematicæ Philosophiæ formas. Hìc ergo ex 23 huius exercebimus (quantum satis est ad praxim) problema, siue propositionem 18 sexti: Super data recta linea dato rectilineo simile, similiterq; &c.

ex prop. 23 li. 1. praxis propos. 18, lib 6.



Exemplum esto in rectilineo NOPQRS, cui super datâ XY sit describendum æquiangulum alterum minus rectilineum TVXYαβ. Resoluatur datum in triangula, deinde ad punctum extremum rectæ datæ X cõstituatur per praxes antecedẽtes angulus VXY æqualis angulo OPQ; Item ad alterum extremum fiat angulus T æqualis angulo PQO, facietque iuncta recta YV cum rectâ XV angulum XVY æqualem angulo POQ, per ea quæ videbis inferius demonstrata ex 32 propos. huius. Cùm enim tres anguli cuiuscũq; trianguli sint æquales duobus rectis, si sunt æquales P & X, Q & Y per constructionem, erunt & reliqui ad complementa duorum re-

ctorum

ctorum æquales, nempè O, & V. Quod factum est in triangulis TOQ, XVT fiat pariter in reliquis triangulis per praxes huius 23 proposit. & ex eà constitutum erit rectilineum TVXY αβ æquiangulum, & simile, similiterq; positum (videbis melius in prop. 18 lib.6) rectilineo NOTQRS, & habebunt cõsequenter proprietates omnes miras, quæ in 6 lib. demonstrantur de figuris cum alys æquiangulis.

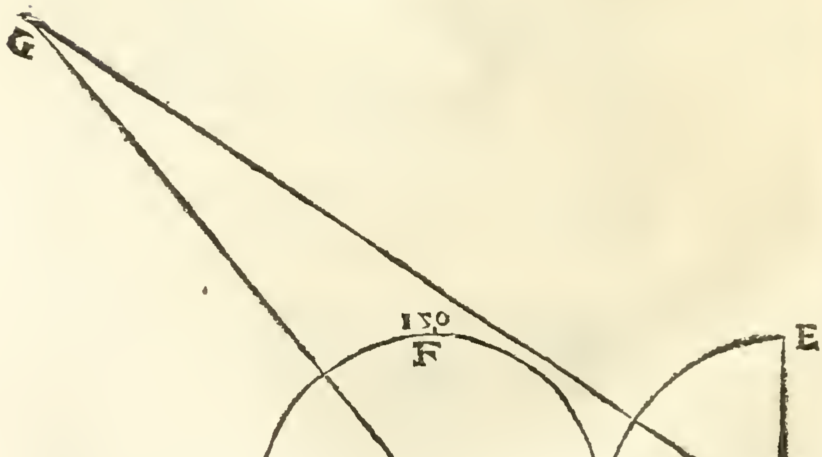
2 *Nos vt simpliciora persequamur, si ex praxibus huius prop. 23 didicerit Tyro solum dato triangulo alterum æquiangulum constituere, fundamentum strauerit eximijs operationibus, præsertim in Opticis, in Astronomicis, in Geometrià practicà. Quæ operationes ad vsum traductæ quoniam supponunt aliqua demonstranda in lib.6, ideo illuc in sua loca repositæ sunt; & iam à nobis, dum hæc scribimus, perfectæ, atque applicatæ propositionibus eius lib. Quò Tyronem prouocamus cùm ex ordine ad eum lib. perueniet. Saltem hìc nunc videat quàm copiosus thesaurus lateat in hac 23 propos. ex qua fundamẽtũ præstruitur molibus ad Planetas, & Astra sese euehentibus. Triangula hìc facta æquiangula quoniam habent circa æquales angulos latera proportionalia, ex eo in Opticis picturis exhibent imagines protetypis simillimas etiam in data proportione. Cuius problematis arcana partim indicauimus in Ap. 5 nostro, sed apertè prodimus in to. 2 Ærary, vbi propositio elemẽtaris est, in quà latet hìc thesaurus. Præterea triangula ex hac 23 facta æquiangula inaccessas locorũ profunditates, longitudines, latitudines, altitudines, situs regionũ, &c. per cõstructionem minorũ triangulorum æquiangulorum metiuntur, & distantias ipsas, aut diametrales magnitudines Planetarum, & Stellarum exhibent. Quarum rerum exempla videto in ijs, præsertim quę quartæ propos lib. 6. Eucl. applicauimus. Ac præterea vide in nostris Apiarijs Philosophiæ, Mathematicæ, præsertim Apiar. 2, Prog. 5, propos. 4, & Apiar. 8, Prog. 3, propos. 9, & sequentibus.*

Quanta vtilitas, & ad quam sublimia ex hac 23 prop.

§. IV.
PRAXIS III.

E constructione, & vsu instrumenti, quo facillimè, ac citissimè constituitur angulus dato angulo æqualis, & ttiangulum dato triangulo æquiangulum, ad operationes Geometricas, & Astronomicas.

1 *VTilissimum, ac simplicissimum id instrumentum satis vulgatum est apud precessorem meum Blancanum in apparatu ad Sphæram prop. 5. Cuius constructioni, ac theoricæ conducent quæ habes à nobis in antecedentibus ad proposit. 9, & 10, vbi de anguli, ac lineæ diuisionibus. Si quis tamen in promptu non habeat Blancani sphæram, vt Tyrones geometrici non sine aliqua iucunditate, ac vsu versentur in hac 23 propositione, lubet in suum hunc locum id instrumentum traducere, quo vtatur Tyro non solum vt dato triangulum æquiangulum statim constituat, sed & angulum angulo æqualem, etiam sine triangulo, iuxta hanc 23 prop. Eucl.*



2 *In tabellà aliquà ducta sit linea AB eius longitudinis, vt eius duæ tertiæ partes AC facilè possint diuidi ad minimùm in 100 particulas æquales. Semidiametro tertiæ partis AD, & centro A describatur quadrans DE, & centro C designetur semicirculus EFD: diuidatur quadrans DE in 90 gradus, & semicirculus in 180. Ad centra A, & C aptentur duæ regulæ gyratiles, ac paratum erit instrumentum. Quo vtaris, verbi gratia, ad constituendum triangulum æquiangulum triangulo maximo astronomico, quod fit in prospectionibus per instrumenta astronomica ad Planetam aliquem, siue ad stellam, cuius, verb gr. distantiam velis à terrà cognoscere. Vide exemplum in nostris Apiarijs Mathematicis, Apiar. 8, Prog. 3, proposit. 9. Cognitis enim, vt ibi docetur, duobus angulis, & vno latere, fiunt, pro numero graduum cognito in instrumentis astronomicis, duo anguli GAC, ACG æquales duobus datis ab Astronomo: ac regulæ angulos constituentes ad basim CA, seseq; intersecantes, verb. gr. in G, constituunt triangulũ minus prorsus æquiangulum magno triangulo astronomico, estq; CA instar semidiametri terræ, CG distãtia astri G ab oculo in C velut in superficie terræ, & AG distantia eiusdem astri à terræ centro in A. Quam ergo proportionem habet CA ad CG, vel ad AG, eandem habet terræ semidiameter ad distantiam astri vel ab oculo, vel à terræ centro, &c. Quæ omnia apertius videbis in exemplis ad 4 prop. lib. 6.*

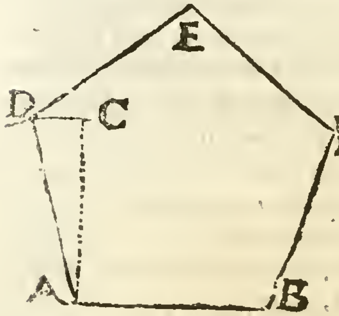
§. V.

PRAXIS IV.

Ad datam rectam constituere angulum quantitatis propositæ in numeris ope circini proportionum.

PRopositio 23 docet angulum æqualem angulo dato constituere ad rectam lineam. Etiam non dato angulo rectilineo, si quis (iuxta ea quæ docuimus ad propos. 9 de anguli recti diuisione in 90 partes, &c.) proponat angulum constituendum tot gradũ, ac partium æqualiũ, qui vel deficiat à recto, vel

excedat rectum, non excedet terminos huius 23 propositionis. Est vero hæc praxis magni momenti, vt inferius videbis, ad Geometriam practicam, ad militarem, & alias facultates; quam praxim indicaui etiam in Apiar. 12, & in 2 Tomo huius ærarij, ad propos. 9, & 10 pro arcu quolibet circuli accipiendo, &c. hic verò vsurpabimus pro angulo lubito, &c.



Exemplum accipe, quà licet, in fig. hic anticipata sequẽtis §.6.

Data sit ergo recta AB, & proponat quispiam angulum qui sit vel tertia pars recti, verbi gratia, vel rectum excedat tertià parte, quem angulum iubeat constitui ad extremum punctum A datæ AB. Quoniam rectus angulus diuiditur in 90 partes, siue gradus, & 30 gradus sunt tertia pars recti, si sit angulus constituendus, qui excedat rectũ tertia parte, hoc est sit graduum 120, id quì fieri potest simplici operatione à circino proportionum, in quo diuisio non excedit gradus 90, idest quantitatem recti? Sic fiet. Erectà occultà perpendiculari ex A, sumatur (in ea facie circini, in qua est diuisio quadrantis in 90 gr.) angulus graduum 30, scilicet hac arte.

Interpone inter numeros 60, & 60 circini LMN quantitatem arbitrariam occultæ AC, ac sic manente diducto circino ad id interuallum, accipe in eodem circino interuallum inter 30, & 30, quo interuallo secabis è C versus D arcum vltra D ductum interuallo rectæ AC, iunctàq; ex A rectà ad sectionẽ vltra D, erit angulus totalis BAD, & vltra C propositus, grad. 120. Atq; hac eàdem arte vtendum erit proportionaliter pro angulo quocunq; alio cuiuscunque quantitatis, semper interpositá inter 60, & 60 quantitate siue totius, siue partis lineæ, ad quam constituendus est angulus; quantitate, inquam, interceptà inter alterum lineæ extremum, verbi gr. A, quasi centrum, & inter arcum, velut CD ex lineà AC ductũ; deinde accepto interuallo inter numeros, quos anguli propositi quãtitas postulat. &c. vt vidisti in exemplo. Atq; aptius etiam videbis in seq. §.6.

§.VI.

§. VI.

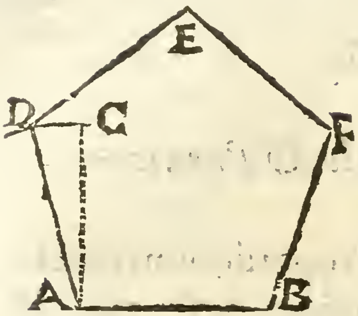
VSVS, Applicatio, & Praxis —

— Propos. 23 è circino Proportionum non solum ad eas artes, de quibus in § 3 anteced. sed præcipue pro insigni, & vniuersali problemate super data recta quamlibet regularem figuram facilé constituere, etiam in vsus militares.

Vpponehic, mi Tyro, pro vsu, & praxi proposità id, quod leges in corollar. 5, & 7 ex 32 propos. huius, & quod habes etiam in Apiar. 1. prælibam. 1. in postremis scholijs, nempe facillimos modos inueniendi quantitatem cuiuslibet anguli cuiuscumq; regularis figuræ. Exemplum esto in pĕtagono regulari, cuius angulus, ex coroll. 7 cit. ad 32, obtinet quantitatem vnius recti, ac præterea quintam partem recti; & quia quinta recti pars, id est graduum 90 quinta pars est 18, additis 18 ad 90 fit summa, & quantitas anguli grad. 108 in pentagono.

Omisso æquilatero triangulo, cuius constitutionem iam didicisti in propos. 1. & quadrato, de quo in 46 propos. huius, & pro quo iam didicisti angulum rectum, siue perpĕdicularem erigere ad prop. 11, exemplum affero in regulari figura 5 laterum.

2 Sit igitur super data AB constituendum pentagonum regulare. ex A erige perpendicularem occultam AC, quæ sit ęqualis ipsi AB, & ad eius interuallum, interpositum inter num. 60, & 60, circinum proportionum diducito. Ac immotà diductione accipe interuallum inter 18, & 18, & eo secato arcum ex C in D, eritq; angulus BAD pentagoni constans ex recto BAC, & ex CAD quinta parte recti accepta in circino proportionū. In quo vt laterum numerus 18 ad totum latus 90, sic interuallum arcus CD inter 18, & 18 ad interuallum inter 90, & 90. Reliquos angulos pentagoni licebit



facilius describere simplici constructione geometricà, non è circino proportionum. Nam iuxta hanc 23 poteris ad datæ AD pũctum D constituere angulum ADE æqualem iam constructo BAD; eodemq; modo expedies constructionem reliquorum E, F, B. Cum ad cætera, tum præcipue ad operationes militares facit hic vsus, & Praxis, dum propugnaculorum regulares aliquas figuras designant, siue angulos pro varia quantitate constituere opus habent in propugnaculis.

SCHOLION I.

AD 30 proposit. lib. 6. habebis à nobis pro constructione pẽtagoni regularis super data modum geometricum expeditum à sectione datæ rectæ secundum mediam, & extremam proportionem, sine cura constituendorum angulorum pentagonicorum, &c. ibi vide.

SCHOLION II.

Modus alius expeditior indicatus super datá rectá figuram regularem constituendi.

Quæ tamẽ vide demonstratum in corollarijs ex § 1 nostro ad 9 prop. lib. 6.

QVoniam pertinet hìc alter modus ad lib. 4, ideo illuc seponatur. Hìc saltẽ indico vnde peti possit, ac deducatur. Vide etiam nos in Apiar. 12. ad lib. 4. Eucl. §. 12, num. 3, vbi docemus ex circino proportionum. dato latere polygoni circulum inuenire polygono regulari circũscribendum; & num. 1. ponimus numeros laterum præcipuarum regularium figurarum. Nam applicatà rectà, siue latere dato, verbi gr. AB pentagoni, in circulo circumscripto per A, & B, expeditissimæ operæ est circino circumferre per cauam circuli periferiam quantitatem lateris AB;

ac

ac fiunt anguli requisiti ex obliquitate laterum in circulo. Illuc vise, & quæ ibi dicuntur applica descriptionibus regularium fig. &c.

SCHOLION III.

Scopuli in descriptionibus figurarum regularium vitandi.

ALiquando aliqui Mathematicis in scientijs versari audent distituti ope philosophicà, quæ in Geometricis operationibus causas potius, quam organicas operationes venatur, ideo & ipsi suis in praxibus errant, & alios sui similes in errores abducunt, homines alioqui gnaui, atq; ingeniosi; sed non geometricè philosophi. Exempla possem afferre quam plurima præsertim in operationibus Gnomonicis; hìc tantum ad rem indico circa descriptiones figurarum regularium super datis lateribus, ac præsertim circa pentagoni communiter a mechanicis operatoribus vsurpatam descriptionem ex Alberto Durero; itemq; circa inuentionem lateris heptagonici apud aliquos. Itaq; vide Clauium in lib. 8 Geometriæ practicæ, propos. 29, & 30, vbi demonstratiuè prodit fallacias geometricas in earum figurarum vulgo vsurpatis descriptionibus. Quæ apud Clauium non hìc describenda sunt. Hìc tãtum indico quo confugiendum, & vnde aufugiendum.

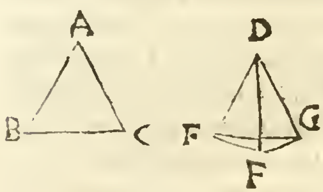
Habes interim in antecedentibus § 6, & Schol. 1. apud nos indicatos scientificos fontes à verà quantitate vel angulorum, vel laterum extra, vel intra circulum.

Pro-

Propos. XXIV. Theor. XV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, angulum vero angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur, & basim basi maiorem habebunt.

SInt triangula ABC, DEF habentia duo latera AB, AC duobus DE, DF æqualia, alterum alteri: AB quidem ipsi DE, AC verò ipsi DF. At angulus BAC maior sit angulo EDF. Dico & basim BC maiorem esse basi EF. Cum enim angulus BAC maior sit EDF angulo,[a] constituatur ad punctum D rectæ DE angulo BAC æqualis EDG; sitq; vtrique AC, DF æqualis DG, & iungantur GE, FG. Quia igitur AB ipsi DE, & AC ipsi DG æqualis est, erunt duæ BA, AC duabus ED, DG æquales, altera alteri; estque & angulus BAC angulo EDG æqualis:[b] erit igitur & basis BC basi EG æqualis. Rursus quia DG ipsi DF est æqualis, & [c] angulus DEG angulo DGF,[d] erit angulus DFG maior angulo EGF: multo ergo maior erit EFG ipso EGF. Et quia EFG triangulum est habens angulum EFG maiorem angulo EGF ([e] maiori autem angulo maius latus subtenditur) erit & latus EG maius latere EF: æquale autem est EG ipsi BC: maius ergo est & BC ipso EF. Si ergo duo triangula, &c. quod oportuit demonstrare.



a prop. 23. 1.
b prop. 4. 1.
c prop. 5. 1.
d ax. 9.
e prop. 19. 1.

§. I.

§. I.

SCHOLION.

Innuuntur vitandæ hallucinationes in vsu propos. 24.

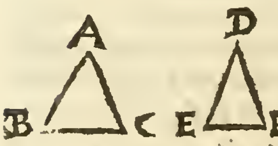
Proclus ad hanc propos. 24 notat ab Euclide nõ inferri etiam arearum inæqualitatem in triangulis quando, æqualibus existentibus lateribus comprehendentibus inæquales angulos, sunt etiam inæquales bases, & maior est quæ maiorem subtendit angulum. In ea enim angulorum, & basium inæqualitate potest aliquando esse arearum æqualitas, & aliquando minor area sub maiori angulo, & basi. Ac tribus regulis demonstrat geometricè Proclus quandonam duorum triangulorum (habentium latera duo æqualia alterum alteri) areæ sint æquales, & quando sub maiore angulo sit modò maius, modò minus triangulum altero triangulo &c. Quas relege in antecedentibus apud nos, in §6 ad propositionem 4. Demonstrationes verò Geometricas hic appositurus eram, nisi me Clauij diligentia præuenisset, easque transtulisset in sua Scholia post 27 proposit. Euclidis, scilicet in eum locum (quod Proclus neglexit) vbi non egent vlla propositione consequente Euclidis. Itaq; vti iam vulgatas extra Proclum omittimus, ac permittimus legendas apud Clauium loco citato.

Vide ad hanc propositionem, & ad sequentem 25, quæ apponimus ad prop. 37.

Pro-

Propos. XXV. Theor. XVI.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, & basim basi maiorem, & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.



SInt duo triangula ABC, DEF duo latera AB, AC duobus DE, DF habentia æqualia, alterum alteri, AB ipsi DE, & AC ipsi DF, basim verò BC maiorem basi EF. Dico & angulum BAC angulo EDF maiorem esse. Si non: aut æqualis est, aut minor. Non æqualis; Nam si angulo BAC angulus EDF æqualis esset,[a] esset & basis BC basi EF æqualis; at non est; non ergo angulus BAC angulo EDF est æqualis. Sed neque minor: nam si minor esset, [b] esset & basis BC minor basi EF; at non est: non ergo angulus BAC minor est angulo EDF. Demonstratum est autem quod nec æqualis: maior ergo erit. Si ergo duo triangula, &c. Quod demonstrare oportuit.

[a] prop. 4. 1.

[b] prop. 24. 1.

§. I.

SCHOLION.

Vbinam oſtenſiua demonſtratio huius prop. 25. &c.

HAnc propoſitionem conuerſam 24 antecedentis demonſtrat Euclides indirectè propter eas rationes, quas in antecedentibus attulimus ex Proclo circa conuerſiones geometricas ad 24 prop. Si quis amat oſtenſiuas aliquas, ac directas prolixiores demonſtrationes videat apud Proclum, & ex eo apud alios, qui Menelai Alexandrini, & Heronis Mechanici demonſtrationes afferunt.

Habent Tyrones, aut etiam doctores Geometrici occaſiones non raras comparandi, vel exercendi habitum Geometricum in demonſtrandis directè, atq; aliter propoſitionibus conuerſis Euclidis.

§. II.

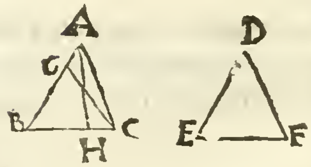
SCHOLION.

Indicata ornamenta ad propoſ. 24 & 25 ex Apiarijs Philoſophiæ Mathematicæ.

VIde ad propoſitiones 35, 36, 37, 38 inferius plura paradoxa, eruditiones, vſus, &c. ſuo loco, vnde poſſis, ſi velis, huc transferre aliqua, quæ tamen hìc ſupponunt nonnulla pendentia ex ijs cit. propoſitionibus.

Propof. XXVI. Theor. XVII.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, ſeu quod æqualibus angulis adiacet, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.



Sint duo triãgula ABC, DEF duos angulos ABC, BCA duobus DEF, EFD æquales habentia, alterum alteri, ABC quidem ipſi DEF, & BCA ipſi EFD: habeant verò & vnum latus vni lateri æquale. Et primo quod æqualibus angulis adiacet nempe BC ipſi EF. Dico quod & reliqua latera, reliquis æqualia habeant, alterum alteri, AB ipſi DE, AC ipſi DF, & reliquum angulum BAC reliquo EDF. Quod ſi AB, DE inæqualia ſint, vnum erit maius. Sit maius AB: a fiatq; ipſi DE æqualis GB linea & ducatur GC. Cum igitur tam BG, DE, quàm EF, BC æquales ſint, erũt duæ BG, BC duabus DE, EF æquales, altera alteri, & angulus GBC angulo DEF æqualis: b erit ergo & baſis GC baſi DF æqualis, & triangulum GCB triangulo DEF æquale, reliquique anguli reliquis, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Quare angulus GCB æqualis erit angulo DFE: ſed & DFE ponitur æqualis ipſi BCA. erit ergo BCG æqualis ipſi BCA, minor maiori, quod fieri nequit: non ergo AB, DE inæquales ſunt: ergo æqua-

a prop. 3.1.

b prop. 4.1

æquales. est verò & BC ipsi EF æqualis: duæ ergo AB, BC æquales sunt duabus DE, EF, altera alteri, & angulus ABC angulo DEF: [c] ergo & basis AC basi DF, & reliquus angulus BAC reliquo EDF ęqualis erit. Rursus sint latera æquales angulos subtendentia AB, DE æqualia, dico & reliqua latera reliquis lateribus, vt AC, DF, & BC, EF, reliquumq; angulum BAC reliquo EDF æqualem esse. Si enim BC, EF sunt inæqualia, erit vnum maius; sit, si fieri potest, maius BC, & [d] fiat ipsi EF æqualis BH, iungaturq; AH. Et quia BH ipsi EF; & AB ipsi DE æqualis est, erunt duæ AB, BH duabus DE, EF æquales, altera alteri, continentq; angulos æquales [e] basis. ergo AH basi DF est æqualis, & triangulum ABH triangulo DEF, reliquiq; anguli reliquis, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur, æquales erunt. Est igitur angulus BHA æqualis angulo EFD: sed EFD æqualis est angulo BCA, erit ergo & BHA æqualis ipsi BCA. Trianguli ergo AHC externus angulus BHA æqualis est interno, & opposito BCA, [f] quod fieri nequit: igitur BC, EF inæquales nō sunt: æquales ergo. Cum verò & AB, DE sint æquales, erunt duæ AB, BC duabus DE, EF æquales altera alteri, æqualesq; angulos continent: [g] ergo & basis AC basi DF æqualis est, & triangulum ABC triangulo DEF, & reliquus angulus BAC reliquo EDF. Si ergo duo, &c. Quod demonstrare oportuit.

c prop. 4. 1

d prop. 3. 1

e prop. 4. 1

f prop. 16. 1

g prop. 4. 1

§. I.

COROLLARIVM EX CLAVIO.

Non solum triangulorum latera, & anguli, sed etiam areæ sunt æquales ex 26. propos.

SEquitur ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas esse æqualia. Nam (in figura Eucl.) si latera AB, BC lateribus DE, EF æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, erunt tota quoque triangula æqualia inter se, per 4.

§. II.

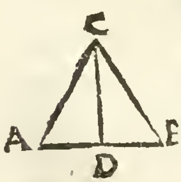
COROLLARIVM II.

Linea perpendicularis, quæ à trianguli angulo ad basim demissa diuidit angulũ in duos æquales, indicat triãgulum esse vel æquilaterum, vel isosceles. Vide demonstrationem in sequenti Corol. 3.

§ III.

COROLLARIVM III.

In æquilatero, vel isoscele linea perpendicularis ab angulo verticali ad basim demissa diuidit & angulum, & basim bifariam.



VTriusq; proximè antecedentis 2, & 3 corollarij demonstratio patet ex hac 26 Euclidis, suntq; vsus crebri hæc corollaria in Geometricis, quin & tertij corollarij vsum videbis etiã ad Aristotelem, &c.

&c. Corollarium ergo 2 sic patet: CD perpendicularis diuidat in duos æquales ACD, DCB angulum ACB. Quoniam in triangulis ADC, CDB latus commune CD adiacet angulis æqualibus ADC, CDB, & ACD, DCB, ergo latera AD, DB, & anguli ACD, DCB erunt æqualia, per hanc 26 prop. Eucl.

Corollarium etiam 3 patet. Nam in isoscele ACB quoniam perpendicularis est CD, & anguli ad D, per defin. 10, sunt æquales, & per 5 prop. etiam anguli A & B sunt æquales, & per hanc 26, tã commune latus CD, quàm latera CA, & CB vni æqualium angulorum opponuntur, erunt & bases AD, BD, & anguli ACD, DCB æquales.

§. IV.

VSVS, Applicatio, & Problema.

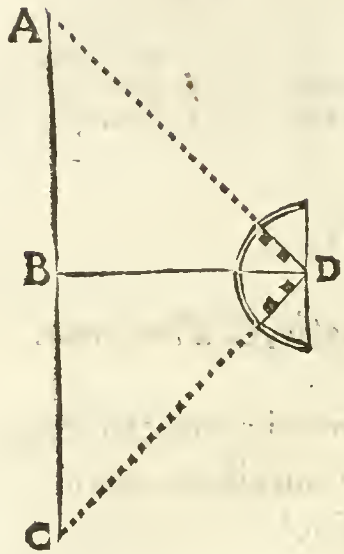
Inaccessas distantias dimetiri geometricè, atq; etiam organicè pro militibus, ex 26 prop. Eucl.

1 P*roclus:* Eudemus in geometricis enarrationibus præsens theorema ad Thaletem refert. Nauigiorum enim, quæ in mari sunt, distantiam eo modo, quo dicunt ipsum ostendere, hoc insuper vti necesse est. *Hæc prop. 26, additis ijs verbis ex Proclo, nobis olim occasionem præbuit exhibendi varios modos non vulgatissimos inuestigandarum inaccessarum distantiarum, quos vide, mi Lector, in toto Apiario secundo Philosophiæ Mathematicæ. Dum enim affirmant verba Procli:* hoc insuper, *innuunt & alios modos extrà hanc 26 prop. Hìc, alijs omissis, tantùm ad rem affero modum ex hac 26 propos. atq; huc transfero ex propos. 1. Prog. 1. Apiar. 2.*

Thales inuentor prop. 26. & vsus eiusdẽ ab eodem.

OPE-

OPERATIO.

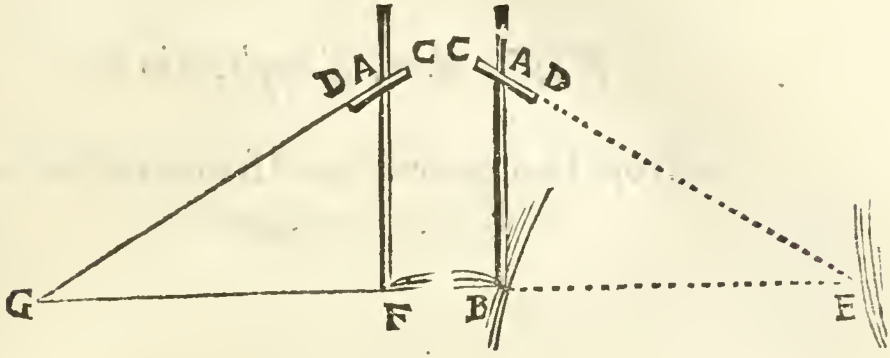


2 Sit nauis in mari vbi A, & Thales in littore vbi B. Distātiā ab A ad B vt sciret demonstratiuè Thales ex 26 Euclidis, an sic constructionem fieri iubebat? Recedatur in directum ipsi A, & B per rectam quousq; libuerit, verbi gratia ab ipso B etiam vltra C. Deinde designetur in planitie terrę, vel litteris angulus rectus ope normæ, siue excitetur, iuxta vndecimam primi, à puncto B perpendicularis lubitæ longitudinis BD. Tum sumpto in ea pūcto ad libitum, vt D, designetur angulus BDA sub BD, & sub visuali DA, quæ recta pertingat ad ipsam nauem A. Deinde eidem angulo BDA ęqualis etiam signetur ex altera parte angulus BDC, iuxta 23 primi. Dico (Thales loquatur) si metiare distantiam BC, scire te demonstratiuè etiam quæsitam distantiam AB.

DEMONSTRATIO.

3 Nam, cùm BD excitata sit perpendicularis ad CB, quæ per imaginationem, ex constructione, in directam vnicam lineam producta est, faciet ex definitione decima vtrinque rectos ABD, DBC. Sunt etiam facti æquales ADB, BDC, & latus commune est DB vtriq; triangulo tum expresso BCD, tum imaginario ABD; ergo, per hanc 26, reliqua latera sunt æqualia vtrūq; vtriq; nempè opposita æqualibus angulis, CD ipsi DA, CB ipsi BA. ergo distantia AB habetur in BC, quòd erat de-

demonstrandum. *Vide Scholia ad facilitatem, & cautionem operationis post prop. 1. in cit. Ap. 2.*



Vsus organicus prop. 26. in Geomet. pract.

4 *Ibidem organicum modum apponimus per appositionẽ manus ad frontem, &c. hic varietatis, & certioris operationis gratia per duos bacillos militibus operationem sic expedimus. Freti, vel fluuij oppositi, vel fossarũ sub mœnibus expediat pro militari re latitudinẽ nosse. Hastam militarẽ AB perpendiculariter erige ad oram extremã latioris fossæ, deinde bacillum transuersum CD decussatim per hastã subducito, atq; inclinato donec iuxta dorsum CD radius visualis pertingat ad mœniorum imas, & extremas partes, quas aquæ in fossa stagnãtes alluunt ad E. Tunc fige, vel alliga bacillum CD ad punctum, verb. gr. A, vnde radius visualis per AD progreditur in E, angulumq; BAE fac immobilem. Quo facto, habes trianguli AEB latus certum AB, & angulos adiacentes EAB, ABE certos, ex quibus facilè scias inaccessam distantiam BE, translato eodem triangulo ABE in alias quaslibet partes, vbi basis BE fiat accessibilis, siue mensurabilis.*

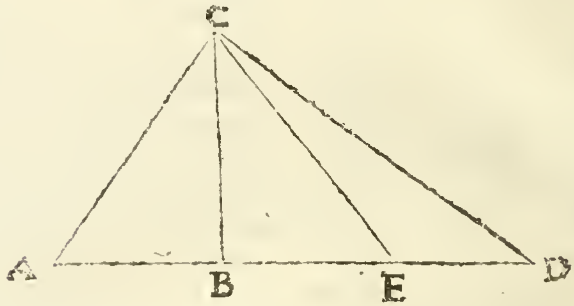
Refixam enim hastam ex B transfer, immoto semper angulo ad A, & rursus perpendiculariter erige in campi planitie, verb. gr. in F, & radio visuali directo per CD, notato in planitie locum, seu punctum G, quo radius pertingit. Distantia FG dimensa dat inaccessam BE. Sunt enim, iuxta hanc 26, in duobus triangulis AEB, AGF æqualia (immo idem latus) latera AF, AB, & angulus idẽ A, & ambo ad perpendicularem hastam recti ad B, & F, ergo & æqualia latera BE, FG. &c.

§. V.

§. V.

VSVS alter, & applicatio —

— Propos. 26. pro iustitia ad fraudes vitandas in diuisionibus agrorum.



1 AGri fit diuisio per triangula ita, vt & per æqualia, ceu conueni cum amico. Ac primo tribuo amico areã trianguli rectanguli ABC, deinde ad latus commune, ac perpendiculare CB constituo triangulum BCD, cuius angulus BCD fiat æqualis angulo CAB, sitq; latus CB maius latere AB.

Hìc duo triangula ACB, BCD duos angulos duobus æquales habent (iuxta hanc 26 propos. Eucl.) alterum alteri, nempe rectum ABC ipsi recto CBD: & angulum etiã CAB, per cõstructionem, æqualem angulo BCD, & latus idem, ac cõmune CB, quod in triangulo quidem CBD adiacet duobus angulis DCB, CBD æqualibus ipsis CAB, ABC, in triangulo verò ACB adiacet recto CBD, & ipsi CAB subtenditur. Atque hìc abundatum est vltra conditiones ab Euclide requisitas, qui alteram tantùm in vtroque triangulo

angulo requirit, nempe vt latus in vtroq; triangulo vel sit tantùm adiacens duobus æqualium angulorum, vel tantùm subtendat vnum æqualium angulorum. Hic verò CB vtrumq; præstat, alterum in triangulo altero, alterum in altero, vt prædictum est. Quid ni ergo triangula ACB, BCD sint æqualia? Habe tibi aream ACB, mihi assumo aream BCD, factaq; est æqua inter nos partitio.

2 *At ecce insilit Porphyrius ex Proclo ad hanc 26 prop. & exclamat iniquam esse diuisionem, ac mihi per fraudem, siue per errorem, plus areæ cessisse in triangulo BCD, quàm amico in ACB. Recipitq; Porphyrius id se geometricè demonstraturum, vt videat Tyrones quid intersit bona fide seruare conditiones ab Euclide positas, quibus solis fit vt triangulum sit æquale triangulo. Ac quoniam vel neglectæ, vel permutatæ sunt conditiones Euclidis, inde factum vt iniqua sit agraria hæc partitio. Reducantur enim ad Euclidis cõditiones triangula. Quoniã, per 18 pri. angulus BAC oppositus lateri CB maiori quam latus AB per cõstructionem, maior est angulo ACB, & angulus BCD factus est æqualis angulo BAC, erit idem BCD maior angulo ACB; fiat ergo angulus BCE æqualis angulo A B, factumq; erit triangulum ACB æquale triangulo CBE, iuxta conditiones Euclidis; adiacebit enim commune latus CB æqualibus angulis ABC, BE, ACB, BCE. &c.*

Seruatis cõditionibus prop 26. nõ aliter, fit vt triangula sint æqualia.

At triangulum BCD est maius triangulo BCE, ergo & triangulo ACB. ergo fraus, aut error fuit in partitione plus iusto sibi assumente ob neglecta Euclidis geometrica præcepta, & conditiones in hac 26 propos.

3 *Nos igitur cum Porphyrio apud Proclum fallaciam hanc hic in loco geometricè prodidimus sine vlla necessitate posteriorum propositionum ad demonstrationem. Aliqui verò alij egentes propositione 31 hanc veritatem ad hanc 26 prop. pertinentem extra locum ad 31 propositionem transtulerunt.*

Hic in loco satius fuit, quam alibi geometricè prodere hallucinationẽ circa prop. 26.

§. VI.

Vsus 26 prop. & corollarij tertij ex eà ad loca Aristotelis explicata, & ad quæstionem: vtrum linea constet ex indiuisibilibus.

Physica philosophia sine Mathematicis an sit perfectè non potest apprehēdi.

1 *IN acutissimo Aristotelis libello de lineis insecabilib⁹, in quo apertū specimē præbet Physicam Philosophiam perfectè sine Mathematicis ansis apprehēdi non posse, præter alia argumenta acutissima è Geometrica Philosophia deprompta, id vnicū est, cuius explicatio, & vsus pendet ab hac 26 prop. Eucl. Dum enim demonstrat Aristoteles lineam non constare è punctis Physicis, siue ex partibus atomis, insecabilibus, &c. sic ratiocinatur:* Cum ex tribus datis lineis triangulus componatur, ex tribus quoq; indiuiduis lineis componi poterit. In omni autem æquilatero perpendicularis in mediam basim incidit, quare & in medium indiuiduè. *Hoc est, per 22 propos. ex tribus datis lineis triangulum constituitur: constituatur ex tribus minimis illis lineolis, quas volūt aduersarij esse atomas, atq; indiuisibiles, eritq; id triangulum æquilaterum, quippe è tribus minimis lineolis (minima enim omnia in suo quæq; genere sunt æqualia) constans. At in triangulo æquilatero, vel isosciele (per 3 corollarium ex hac 26 prop. Eucl.) perpendicularis ab angulo demissa diuidit basim bifariam: ergo demissa perpendicularis ab angulo trianguli è tribus insecabilibus lineis diuidet basim, siue vnam è tribus insecabilibus, ergo insecabilis est secabilis, ac secta, &c.*

Sunt vero & alia firmamenta apud Mathematicos Philosophos, quibus euincunt ex indiuisibilibus quantitatem, ac lineas non constare. Vide plura apud Aristotelem in eo lib. de insecab. Vnum indico, de quo & Proclus in com. ad prop. 10 ex Gemino. Quod continuum in infinitum diuiditur Geometræ (Philosoph.) ex proprijs demonstrant principijs. Cum enim ostendunt quòd incommensurabilitas in magnitudinibus est (Eucl. lib. 10.) & non omnes ad inuicem commensurabiles sunt, quid aliud ipsos ostendere quispiam dicat, nisi quod omnis magnitudo in semper diuisibilia diuiditur, & nunquā in impartibile deueniemus, cum minimum communis mensura omnium magnitudinum sit? *Præsertim si Philosophum Mathematicum tuto in suo regno Philosophantem intelligas, hoc est in sua illa quantitate abstractà & intelligibili extra deficientias quantitatis in Physicis subiectis. de qua re lege in vlt. cap. prolegom. ad hunc 1 to. nostrum.*

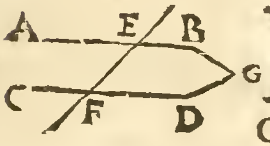
Linea aliqua incommensurabiles demonstrata demonstrant quantitatē nō cōstare ex indiuisibilibus.

10-

TOMI PRIMI
PARS TERTIA
Complectens reliquas à prop. 26. vsq; ad finem libri primi Geometricorum elementorum.

Propos. XXVII. Theor. XVIII.

Si in duas rectas lineas recta incidens angulos alternos æquales fecerit, parallelæ erunt illæ lineæ.



IN duas rectas AB, CD incidens recta EF faciat angulos alternos AEF, EFD æquales. Dico AB, CD parallelas esse. Si non; productæ concurrent aut versus partes B, D, aut versus A, C: producantur, & concurrant versus partes B, D in G. [a] Est itaque trianguli GEF angulus externus AEF maior interno, & opposito EFG: sed [b] & æqualis; quod fieri nequit: non ergo AB, CD productæ concurrunt versus partes B, D. Pari ratione demonstratur, quod neq; ad partes A, C: [c] quæ autem in neutram partem concurrunt, parallelæ sunt: parallelæ ergo sunt AB, CD. Si igitur, &c. quod oportuit demonstrare.

a *prop. 16. 1.*

b *ex hypothesi.*

c *def. 32.*

§. I.

SCHOLION.

AB hac 27 propositione ad vltimam vsq; huius libri primi, incipit secunda pars libri 1 Elemētaris iuxta Procli sententiā. In priore parte adhuc de triangulis, & eorum affectionibus multa demonstrauit. in hac altera libri parte demonstrabit non pauca de figuris quadrangularibus, in primis de parallelogrammis, pro quibus quoniam cognitio aliqua parallelarum supponitur, ideo aliqua hic priori loco de parallelis. Ex occasione, vel consecutione, vel necessitate demonstrationis, comparationis, constructionis aliquando aliqua interserit vel triangula, vel de triangulis.

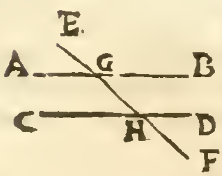
§. II.

Locus Aristotelis logicus ex hac 27 prop. expeditus de petitione principij, ac circulo ageometrico.

ARistoteles lib. 2 Prior. cap. 21 vtitur exemplo huius 27 prop. Eucl. ac primo quidem in c. 11, ea proprietate hic demonstratà de angulis alternis æqualibus, cadente rectà in parallelas, &c. docet in exemplo quid sit petitio principij. Idem est, inquit, ac si quis vellet probare se duas parallelas duxisse, quia faciunt cum tertia angulos alternos æquales. Ac neganti eam æqualitatem angulorum si responderet eos angulos esse æquales, quia lineæ sunt parallelæ, quorum propria est ea æqualitas, &c. ridiculè peteret principium. &c.

Propos. XXVIII. Theor. XIX.

Si in duas rectas lineas recta incidens angulum externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit: vel internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt illæ lineæ.



IN duas rectas AB, CD incidens recta EF externum angulum EGB interno, & opposito GHD æqualē faciat: aut internos, & ad easdem partes BGH. GHD duobus rectis æquales. Dico AB, CD parallelas esse. Cum enim EGB angulus, [a] æqualis sit & angulo GHD, [b] & angulo AGH, [c] erit & AGH æqualis ipsi GHD, [d] & sunt alterni: paralllelæ ergo sunt AB, CD. Rursus cum BGH, GHD duobus rectis sint æquales, [e] sunt autem & AGH, BGH duobus rectis æquales: erunt AGH, BGH ipsis BGH, GHD æquales: communis BGH auferatur: [f] erit igitur reliquus AGH reliquo GHD æqualis: [g] & sunt alterni: sunt ergo AB, CD parallelæ. Si ergo in duas rectas, &c. Quod demonstrare oportuit.

a ex hypothesi.
b prop. 15. 1.
c ax. 1.
d prop. 27. 1.
e prop. 13. 1.
f ax 3.
g prop. 27 1.

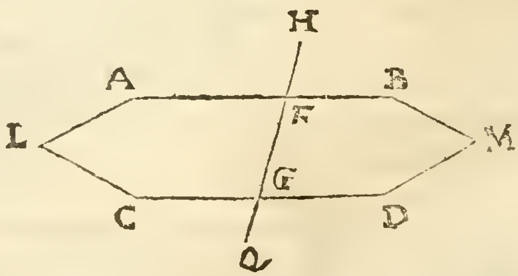
§. I.

SCHOLION.

Aliter demonstrare ex Ptolemæo secundam partem propositionis 28 Euclidis.

Ptolemæi olim liber in cōfirmatione axio. 11.

SCripsit olim Ptolemæus libellum in confirmationem axiomatis 11, referente Proclo. Ex eo hìc accipe breuem, & acutam demonstrationem, quà probatur, si recta incidat in duas, & faciat cum illis internos & ad easdem partes duobus rectis æquales, duas illas esse parallelas, ac neutram in partem



Demōstratio Ptolemæi: si interni sint 2 rectis æquales, nūquā coincident A 12 &c.

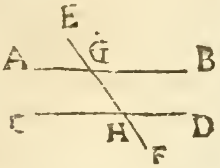
coincidentes. Sint enim BFG, FGD duobus rectis æquales; & si fieri potest, protractæ coincidant, verb. gr. in M. Quoniam recta GF super rectam AB consistens facit angulos AFG, GFB duobus rectis æquales, ac pariter eadem recta FG facit duos FGC, FGD duobus rectis æquales, & duo BFG, FGD sunt, per suppositionem, duobus rectis æquales, ergo ijs detractis ex quatuor rectis factis ad F, & G, remanent duo AFG, FGC duobus rectis æquales. At non obstiterunt, per aduersarium, duo BFG, FGD, quominus rectæ protractæ AB, CD coinciderint in M, ergo nec duo AFG, FGC obstabunt, quominus eædem rectæ AB, CD protractæ coincidant in L. Ergo duæ (per aduersarium, rectæ) LABM, LCDM spatium comprehendunt, contra 12 axioma. Igitur si recta HQ &c. inter-

nos ad easdem partes æquales facit duobus rectis, non possunt protractæ coincidere, hoc est, iuxta defin. 32, parallelæ sunt AB, CD.

§. II.

Locus Aristotelis illustratus ex 28 propos. Eucl.

1 A*Ristoteles lib. 2 Prior. cap. 22 dum vult ostendere idem falsum posse colligi ex pluribus suppositionibus falsis, ait in exemplo Geometrico:* velut coalternas coincidere, & si maior est extrinsecus intrinseco, & si triangulus habet plures rectos duobus. *Deinde in fine capitis appositæ sunt duæ figuræ, quarum prior est ex 28 hìc propos. Euclidis, posterior ex 32 prop. Nihil præterea probatur, aut explicatur quomodo, si supponas externum angulum, &c. vel tres esse maiores duobus rectis in triãgulo, sequatur parallelas coincidere. Quid agat Peripateticus Arist. interpres sine ope Philosophiæ Geometricæ, quam Philosophus Peripateticorum Princeps supponit in suis Sectarijs? Nos hic igitur probemus geometricè, & facilè quod supponit Philosophus, & versemur circa figuras prop. 28, & 32.*

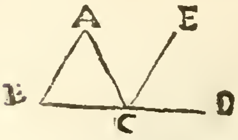


2 Igitur in figura propos. 28 Eucl. supposito quod externus angulus (ex falso) EGA sit maior opposito interno GHC, sequitur & falsum, nempe parallelas AB, CD coincidere sic. Quoniam EGA maior supponitur ipso GHC, ergo apposito communi AGH, erunt maiores EGA, AGH duobus AGH, GHC; at duo EGA, AGH sunt æquales duobus rectis, per 13. propos. huius lib. 1. ergo ipsi duo anguli AGH, GHC sunt minores duobus rectis; ergo, per axioma 11, non erunt parallelæ, sed concurrent ipsæ AB, CD ad partes A, C. &c.

Triangulus tres ãgulos internos æquales esse 2 rectis, breuiter indicatũ ex antecedẽtibus.

3 Circa secũdum exemplum ab Aristotele appositum, licet supponat propositionem 32 Euclidis nondum hìc tyronibus cognitam, tamen quia & facile probatur ex hìc iam cognitis, explicandam hic suo loco censui ad intelligentiam loci eius Aristotelici. Igitur,

(positâ figurâ Euclidis in prop. 32) facile patet angulum externum ACD esse æqualem duobus internis CBA, BAC; quia cum ducta sit CE parallela lateri BA, angulus externus ECD æqualis est interno ABC, & alterni ECA, BAC sunt æquales, per 27, & 28 pri. Præterea tres BCA, ACE, ECD sunt æquales duobus rectis per 13 pri. ergo & in triangulo ABC tres anguli A, B, C sunt æquales duobus rectis, communi existente ipso ACB.



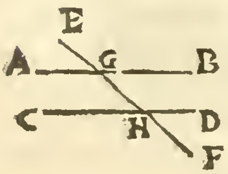
Sic breuiter indicata demonstratione de tribus trianguli angulis, qui æquales sunt duobus rectis, iam ad Aristotelici loci explicationem venio.

4 Si supponas falsum, nempe tres A, B, C esse maiores duobus rectis, sequitur & falsum, nempe ipsas AB, EC parallelas coincidere. Quoniam enim BCA est communis, & alterni BAC, ACE sunt æquales, & appositus tertius B supponitur facere in triangulo tres maiores duobus rectis, ergo idem B appositus duobus BCA, ACE faciet tres maiores duobus rectis, siue inter parallelas BA, CE faciet duos internos ABC, BCE maiores duobus rectis; ergo protractæ AB, EC ad partes, BC, & vltra eas, coincident, & tamen supponuntur parallelæ. Ergo ex falso supposito, vel de tribus angulis in triangulo maioribus duobus rectis, vel de angulo externo parallelarum maiore ipso interno, sequitur idem falsum de parallelis incidentibus. Vtere hàc explicatione hìc ad fontes Euclidis pro tuo Aristotele ò Peripatetice.

5 Habes & locum ex 1 post er. tex. 3 de errore assumentium minus vniuersale pro vniuersalissimo ad demonstrationem. Exemplum est geometricum ex 28 prop. Eucl. qui demonstrat esse non coincidentes, quando interni sunt non solùm recti, sed quomodocumq; æquales duobus rectis, quod est vniuersalius, quàm esse duos rectos, siue vtrumq; rectum, &c. Ex his breuiter lucem habes vbi pleriq; Peripatetici ageometrici cæcutiunt.

Propoſ. XXIX. Theor. XX.

Recta in parallelas rectas incidens æquales facit angulos alternos: & externum interno & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem: & internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficit.



IN parallelas rectas AB, CD recta EF incidat. Dico quod & alternos angulos AGH, GHD æquales faciat; & externum EGB interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes GHD æqualem; & internos, & ad eaſdem partes BGH, GHD duobus rectis æquales. Si enim AGH, GHD inæquales ſunt, vnus illorum AGH ſit maior: & quia AGH maior eſt, quam GHD, communis addatur BGH. Hi ergo AGH, BGH maiores ſunt his BGH, GHD, [a] ſed AGH, BGH duobus rectis ſunt æquales, ergo BGH, GHD duobus rectis minores erunt. [b] Quæ autem à minoribus quam duobus rectis in infinitum producuntur lineæ rectæ concurrunt: ergo AB, CD in infinitum productæ concurrunt: at non concurrunt; parallelæ enim ſunt: ergo anguli AGH, GHD nō ſunt inæquales: igitur æquales. Porrò [c] AGH angulus æqualis eſt angulo EGB. Ergo & EGB æqualis erit angulo GHD: communis apponatur BGH: ergo hi EGB, BGH æquales ſunt his BGH, GHD: [d] ſed EGB, BGH ſunt æquales duobus rectis: erunt ergo & BGH, GHD duobus rectis æquales. Recta ergo in parallelas, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *prop.* 13. 1.
b *ax.* 11.
c *prop.* 15. 1.
d *prop.* 13. 1.

§. I.

APPLICATIO,
Et vſus inſignis prop. 29 in problemate cōſmographico. nempe – Vniuerſum terrarum orbem facillimè dimetiri.

1 *Modum Eratoſthenis (quem habes apud Cleomedem ex antiquiſſimis) facillimum, ac ſimpliciſſimum, non ſine tamen geometricà demonſtratione ex hac 29 prop. Eucl. aliqui difficiliorem, & obſcuriorem tyronibus reddiderunt, dum per ſinus, & alia docta quidem inuenta, ſed extra Eratoſthenis mentem pertraxerunt. Nos autem modum iuxta priſtinum ſuum candorem exponemus, præmiſſis tamen aliquibus hypotheſibus.*

Arcus ſimiles ſunt, quibus anguli æquales ſiue ad centra, ſiue ad circumferẽtias inſiſtunt.

Prima: Arcus, quibus anguli æquales ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles ſunt. *Demonſtrationem geometricam breuem, ac facilem habes apud Clauium in Schol. 22. prop. lib. 3 Eucl. Eſt magni momenti, ac vſus in operationibus Aſtronomicis per Quadrantes, Aſtrolabia, &c.*

Hic pro tyronibus poteſt haberi pro re ſatis per ſe notà. Nam ductis rectis à communi centro plurium circulorum concentricorum, non eſt admodum difficile concedere arcus ſimiles intercipi inter rectas eas, &c. iuxta ea quæ habes apud nos in Apiar. 1. prælibam. 1. de Araneà geometrizante. Tamen lubitum fuit hic indicare demonſtrationem geometricam huius primi ſuppoſiti apud Clauium. &c.

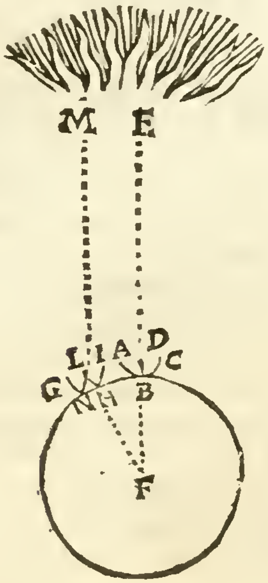
Radij ſolis centrales in infinita hinc ad ſolē diſtãtia accipiuntur etiam tanquam paralleli.

Secunda ſuppoſitio. Radij à ſole, licet verè ſint centrales, atq; accipiantur tanquam progredientes à punctis ſolaris corporis poſitis in directum ad centrum ſolis, tamen ab Opticis in ſpeculis vſtorijs, & ab Aſtronomis, & à Geometricis Philoſophis admittuntur tanquam inter ſe paralleli, quia in infinità diſtantia terræ à ſole nullam ſenſibilem faciunt differentiam, nec officiunt demonſtrationibus, &c. vt pluribus expreſſum habes apud alios.

2 His præmiſſis, nos Eratoſthenis inuentum, ad faciliorem angulorum

gulorum explorationem, in ſcaphijs oſtendemus. Sub eodem Meridiano ſunt in Aegypto duæ Vrbes Syene, & Alexãdria. Ac Syene quidem Sol tempore ſolſtitij æſtiui perpendicularis eſt in Meridie, ac nullas lateraliter iacit vmbras. Alexandriæ vero eodem tempore, ac momento vmbras iacit laterales.

Syene Vrbe Ægypti Sol ſolſtitialis eſt in meridie perpẽdicularis.



Scaphium ABC in meridie ſolſtitiali Syene ita eſt collocatũ, vt ſtylus DB ſit horizonti perpendicularis, ac proinde ſolis radius ED, & ſtylus DB, (à quo nulla fit ibi eo tempore vmbra) ſunt in eadem recta imaginariè protractà vſq; ad orbis terreni centrum F. Eodem temporis momento Alexandriæ in Scaphio GHI, pariter collocato cum ſtylo LH ad horizontem perpendiculari, radius LM è vertice L iacit vmbram in N. Notauit ergo Eratoſthenes arcum NH, atq; intulit: vt ſe habet arcus NH ad totum ambitum Scaphij, ſic arcus terræ HB, ſiue diſtantia Syenes ab Alexandria, ad totum terræ ambitum. &c. At vnde illa æqualitas, ſiue proportio eadem arcuum NH, HB ad ſuos ambitus? nempe ab angulis æqualibus, quibus ij arcus ſubtenduntur, iuxta primum ſuppoſitum. æquales enim anguli ſunt NLH, HFB. Quì probas? En ingeniũ Eratoſthenis, & en fodinam Euclidis geometricam, nempe hãc 29 propoſ ex qua ſcibile hoc geographicum tam inſigne producitur. Quoniam enim in parallelas MN, EF cadit tertia LF, facit angulos alternos NLH, LFB æquales; ergo, &c. Reperijt ergo Eratoſthenes arcũ NH eſſe graduum 8½. Diſtantia autem HB erat ſtadiorum (quorum octona vnum milliare aſtronomicum conficiunt) 5183⅓. Cum ergo circuli peripheria in 360 gradus diuiſa ſit ab Aſtronomis, & vni gradui 700 ſtadia tribuat Eratoſthenes, ergo totali peripheriæ terræ cõuenient ſtadia 252000,

Ambitus circularis terrarũ orbis quãtus in ſtadijs iuxta inuẽtum Eratoſthenis ex hac 29.

 ideſt

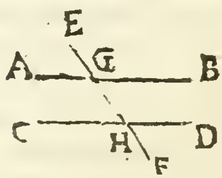
idest milliaria Astronomica 31500 erunt totius terreni globi ambitus ex hac supputatione; quæ vim suam demonstratiuam habet ab hac 29 prop. Eucl.

§. II.
SCHOLION.

Geometricæ racemationes e 29 Prop. Eucl.

12 Combinationes angulorū ex incidētia rectæ in parallelas.

1. P*Ossunt fieri duodecim combinationes, & comparationes angulorum (quarum tantum tres Eucl. posuit) ex incidentia rectæ EF in rectas parallelas AB, CD ad easdem partes, verbi gr. dextras (spectanti figuram Euclidis) possunt assumi duo anguli vel externi EGB, FHD, vel interni BGH, GHD, vel externorū alter, v. g. EGB, & internorum alter oppositus GHD; Tripliciq; eodē modo ad partes sinistras externi duo EGA, CHF, interni duo AGH, GHC, externus FHC, & internus AGH. Non ad easdem verò partes sex item combinationes, externi alterni EGB, FHC, interni alterni BGH, GHC, externus EGB, & alternus internus GHC; Eodemq; modo tres aliæ combinationes EGA, FHD; AGH, GHD; CHF, EGB, &c.*



Quoniam vero ternæ combinationes, quæ fiunt ad easdem partes dextras eodē modo demonstrantur, quo quæ ad sinistras; Itemq; ternæ alternæ à dextris ad sinistras eodem modo, quo quæ alternæ à sinistris ad dextras, ideo sex tantùm combinationes supersunt demonstrandæ, quarum tres ab Euclide iam sunt demonstratæ, nēpe in hac 29 propositione, vt eius inscriptio docet. Quibus suppositis, nos eodem fere modo per angulos ad verticem (quod variè possemus cum Proclo) statim sic expedimus.

2 *Primo igitur probauit Euclides alternos internos AGH, GHD æquales, addo & alternos externos EGA, FHD esse æquales. Nam AGE est æqualis angulo ad verticē BGH, item FHD æqualis angulo ad verticem CHG; at BGH, CHG sunt alterni internī æquales, ergo & alterni externi AGE, FHD sunt æquales.*

Addo & alternos externū EGA, & internum CHD esse duobus rectis æquales; nam EGA, vt nuper, est æqualis angulo ad

verticem

verticem BGH; at BGH, GHD sunt interni ad easdem partes probati ab Euclide duobus rectis æquales, ergo & EGA, GHD sunt duobus rectis æquales.

3 *Secundo de angulis ad easdem partes probauit & externum interno opposito æqualem, & duos internos ęquales duobus rectis, Addo tertiam combinationem, atq; aio externum EGB cum externo FHD ad easdem partes esse æquales duobus rectis. Nam EGB est ad verticem ipsi AGH, & FHD ad verticem ipsi CHG; At AGH, CHG sunt interni æquales duobus rectis, ergo & externi EGB, FHD ad easdem partes sunt æquales duobus rectis.*

Sit ergo propositio addita propositioni 29 Euclidis: Recta in parallelas rectas incidens æquales inter se facit angulos alternos externos, & alternos externum cum interno æquales duobus rectis, & externos ad easdem partes æquales duobus rectis. *Cui & conuersam potes apponere. Has quasi racemationes Geometricas Euclides Tyronibus reliquit.*

Propositiones cũ suis conuersis additæ propositionibus 28, & 29 Eucl.

§. III.

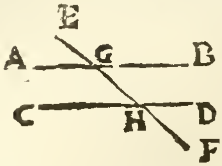
SCHOLION.

Aliter ex Ptolemæo demonstrare tertiam partem propositionis 29 Eucl.

EX libello Ptolemæi paullo ante citato à Proclo Geometrica ratiocinatio conficitur in hunc modum. Tertia linea, quæ duas secat parallelas, si non facit angulos ad easdem partes internos duobus rectis æquales, ergo facit vel maiores, vel minores. Igitur per aduersarium, rectà (in figura Euclidis) EF incidens in parallelas AB, CD faciat internos ad easdem partes AGH, GHC duobus rectis maiores, ergo qui deinceps BGH, GHD erunt duobus rectis minores. At ijdem BGH, GHD sunt & ipsi duobus rectis maiores: nam rectæ AB, CD, per suppositionem, sunt parallelæ tam ad partes A, C, quàm ad partes B, D; ac proinde si recta in eas incidens facit per aduersarium duos internos AGH, GHC duobus rectis maiores, facit etiã internos BGH,

GHD

GHD pariter duobus rectis maiores. Ergo ijdem sunt & minores, & maiores duobus rectis. Atque essent duo AGH, HGB duobus rectis maiores, Itemq; duo CHG, GHD duobus rectis maiores, contra 13 prop.



Eodemq; modo argumentabimur, si aduersarius velit rectam EF cum parallelis efficere internos ad easdem partes minores duobus rectis; essent & qui deinceps duobus rectis maiores, & tamen propter parallelas essent per aduersarium duobus rectis ijdem minores, & præterea contra 13 non fierent 2 rectis æquales. &c. Euolue hic indicata, mi Tyro, iuxta modum antecedentem. Ergo si EF facit angulos &c. nec maiores, nec minores duobus rectis, facit æquales duobus rectis. Ita Ptolemæus geometricè.

§. IV.

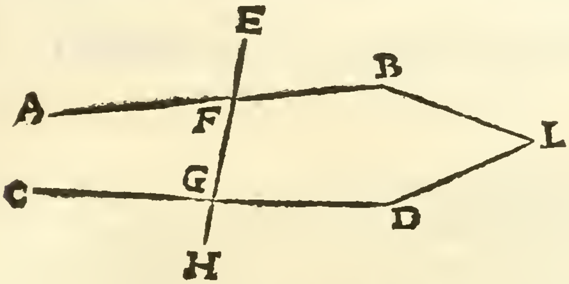
SCHOLION.

Confirmatio axiomatis 11 ex eodem Ptolemæo.

D*Væ sunt partes axiomatis 11; prior de coincidentia, altera de coincidentia ad eas partes, vbi sunt duo anguli interni minores duobus rectis. Ac prior quidem pars facilè, ac breuiter expeditur à Ptolemæo, præsertim supposita præcedenti demonstratione. Affirmat axioma* 11: si in duas lineas recta incidens angulos interiores, & ad easdem partes duobus rectis minores fecerit, coincident duæ illæ lineæ in infinitum productæ. &c. *Hæc prior est pars Si ergo, per aduersariũ (ait Ptolemæus) duæ illæ iuxta conditiones axiomatis, tamen non coincident, idq; neutram in partem, neq; etiam ad partes angulorum minorum duobus rectis, multo minus coincident protractæ ad partes angulorum maiorum duobus rectis. ergo sunt parallelæ, iuxta definitionem 32, quæ est de parallelis. ergo duæ sunt parallelæ, in quas incidens recta facit angulos ad easdẽ partes*

tes internos partim minores, partim maiores duobus rectis, non autem tantum duobus rectis æquales, vt in antecedentibus est demonstratum. At hoc est absurdum; ergo coincident.

2 Secunda pars axiomatis determinat partem coincidentiæ: coincident &c. versus illam partem, ad quam sunt duo anguli duobus rectis minores. *Quam partem Ptolemæus geometricè sic*



demonstrat. Recta EH incidens in rectas AB, CD faciat angulos AFG, FGC duobus rectis minores, dico AB, CD protractas coituras ad partes A, C. Sin autem Aduersarius velit eas coincidere protractas ad partes B, & D, sit, verbi gra. in L punctum coincidentiæ, & concipiatur factum triangulum ex FG, & ex duabus (rectis per aduersarium) protractis FBL, GDL. Quoniã, per suppositionem, anguli AFG, CGF sunt duobus rectis minores (& consequenter qui deinceps BFG, FGD duobus rectis maiores) &, per 13 propos. duo AFG, GFB sunt duobus rectis æquales, si auferatur communis AFG, remanebit FGC minor angulo GFB; at is est externus, qui, per 16 prop. semper est maior vtrolibet interno, & opposito. Non ergo coincident ad partes L, sed ad partes angulorum duobus rectis minorum. Neq; verò aduersarius negare potest absolutè coincisuras, propter demõstratam in antecedentibus priorem partem axiomatis 11.

§. V.

SCHOLION

De veritate per se notà, & inconcussà 11, & aliorum axiomatum.

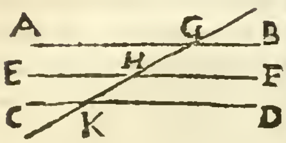
Prædicta potius ad abundantiam, quam ad necessitatem demonstrata sunt. Licet enim axiomata aliqua Philosophiæ Mathematicæ possint etiam demonstrationibus confirmari, tamen non egent; modò verba, quibus ab Euclide proponuntur, rectè percipiãtur, vt nos docuimus in Schol. ad 11 axioma. Rectè Geminus apud Proclum l. 3. cap. 1. Alij indemonstrabilium quoq; demonstrationes excogitarunt, ab ignotioribus medijs ea, quæ sunt omnibus nota, probare conati sunt. &c.

Vide in quas ineptias inciderent aliqui dum axiomata demonstrare sunt conati.

Itaq; Ptolemæus, Proclus (& si quis alius post eos) dum demõstrationes exhibent circa axioma 11 laudandi sunt, non quasi infirma confirment, sed quod firma firmiora efficiant etiam contra sophistica ingenia.

Propoſ. XXX. Theor. XXI.

Quæ eidem rectæ ſunt parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.



SIt vtraq; ipſarum AB, CD ipſi EF parallela. Dico & AB, CD eſſe parallelas. Incidat enim in ipſas recta GK. Et quia in rectas parallelas AB, EF recta GK incidit, [a] erit angulus AGH angulo GHF æqualis. Rurſus, quia in parallelas rectas EF, CD cadit recta GK, [b] erit & angulus GHF æqualis angulo GKD; oſtenſus eſt autem & angulus AGK angulo GHF ęqualis: [c] ergo & angulus AGK æqualis erit angulo GKD: & ſunt alterni: [d] ergo AB, CD ſunt parallelæ. Ergo quæ eidem, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a prop. 29. 1.
b prop. 28. 1.
c ax. 1.
d prop. 28. 1.

§. I.

COROLLARIVM ex Orontio.

QVæ vni parallelarum eſt parallela, & alteri eſt parallela. *Quemadmodum quod vni æqualium eſt æquale, & alteri eſt æquale.*

§.II.

SCHOLION.

Ad vitandas fallacias captiosas.

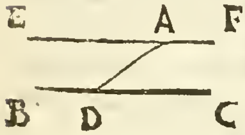
OBijciat quispiam, si vera est hæc propositio: quæ eidem sunt parallelæ, & inter se sunt parallelæ, *ergo pariter quæ eiusdem duplicia, & inter se sunt alterum alterius duplum; quæ eiusdem sunt sesquialtera, & inter se sunt sesquialtera. &c. Quæ quemadmodum falsa sunt, ita & propositio hæc 30 de parallelis &c. Respondet Proclus:* In illis locum habere videtur (*argumentatio*) quæcunque vniuersè conuertuntur in æqualitate, in similitudine, in identitate, & in paralleli positione. &c. *Non igitur in ijs respectibus, quos obiecit captiosus, sed in æqualitate quæ eidem æqualia, & inter se; in similitudine quæ eidem similia, & inter se &c. ita & in parallelis. &c. Idem Proclus reijcit & alias captiones, atq; addit:* Hæc non ab re, propter sophisticas importunitates, iuuenilesq; audientium habitus; gaudet enim vulgus huiuscemodi captiosas ratiocinationes inueniens, scientibusque vanam molestiam afferens.

In quibus respectibus valeant alia aliqua: quæ eidē, &c. & inter se &c.

Vulgus gaudet captiosis.

Propos. XXXI. Probl. X.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam ducere.



EX dato puncto A datæ rectæ BC oporteat parallelam ducere. Accipiatur in BC quoduis punctum D, iungāturq; A, D.[a] & constituatur ad A punctum rectæ DA angulo ADC æqualis DAE, ducaturq; ipsi AE in directum AF. [b] Quia ergo in duas rectas BC, EF recta AD incidens angulos alternos EAD, ADC æquales facit, erunt BC, EF parallelæ. Per datum ergo punctum, &c. quod facere oportuit

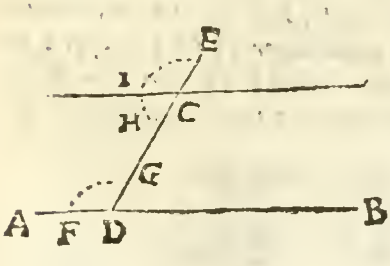
a prop. 22. 1.

b prop. 27. 1.

§. I.

PRAXIS I.

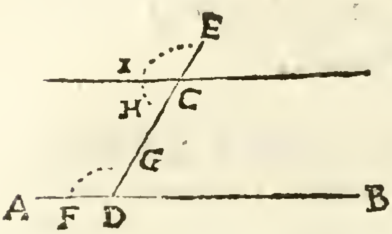
Per datum punctum, vel à dato puncto parallelam datæ lineam ducere aliter, quàm Euclides. &c.



EVclides hoc problema absoluit per vsū propos. 27, constituendo alternos angulos æquales. Potest etiam expediri per vsum prioris partis prop. 28 sic. Sit rectæ AB ducēda per punctum C parallela. Per C educatur ex quolibet puncto

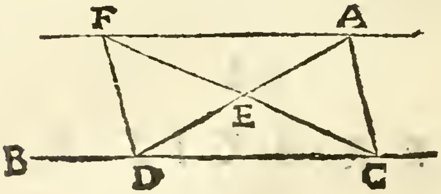
 D inter

D inter AB recta DE vltra C, ac faciens lubitos angulos vtrimq; ad D. Centro D signetur arcus subtendens alterutrum angulum, verbi gratia, arcus FG. Eàdem circini diductione, ac centro C signetur ad easdem partes arcus



EH tantus, vt ex E abscindi possit EI æqualis ipsi GF. Per I ducta CI erit parallela datæ AB. Patet demonstratio ex ipsâ cõstructione; nam anguli FDG, ICE internus, & externus ad easdem partes æquales facti sunt, iuxta 28.

PRAXIS II.



D Vcenda sit per A parallela BC. Ex A deducatur obliqua AD lubitæ longitudinis, & bifariam diuidatur in E, per 10 prop. huius. Per E obliqua altera CF educatur à lubito puncto C, & interuallo EC secetur EF, per 3 huius. Recta ducta per FA erit parallela ipsi BC. Quoniam enim in triangulis FEA, DEC duo latera DE, EA, & duo CE, EF sunt æqualia, & anguli ad verticem æquales, per 15 pr. ergo, per 4 pr. erunt & bases FA, DC æquales, & anguli FAE, EDC æquales alterni; itẽ AFE, ECD, &c. Ergo per 27 pr. sunt parallelæ FA, BC.

§.II.

COROLLARIVM I.

Omne quadrilaterum, in quo ſe Diametri bifariam mutuo diſſecant, eſt parallelogrammum.

Satis eſt hîc nunc vt parallelogrãmi nomine intelligas quadrilaterũ habẽs oppoſita latera inter ſe parallela. Vide plura inferius ad prop. 34. Igitur ſi fingas iungi pũcta FD, AC rectis lineis, erit èadem ratio, ac demonſtratio, quæ in antec. 2 praxi, de triangulis FED, AEC æqualibus, & de angulis alternis FDA, DAC æqualibus, ac proinde baſes FD, AC ſunt parallelæ, ſicut oſtenſæ ſunt FA, DC.

§. III.

COROLLARIVM II.

Intra eaſdem parallelas quælibet rectæ bifariantes alias rectas mutuò bifariantur.

Mira eſt hęc proprietas rectarum ſecantium ſe intra eaſdem parallelas à nobis animaduerſa, & facta ex parte vniuerſalis (vide Schol. poſt hoc corollar.) & quæ vſui erit nobis in ſequẽtibus ad ſeqq. proſp. Eucl. Recta FC ducta vtcunq; obliqua ſecet bifariã in E alteram AD intra eaſdem parallelas; dico & ipſam FC bifariam ſecari in E. Patet per 26 prop. nam in triangulis FEA, DEC duo latera per conſtructionem ſunt æqualia, anguli ad verticem E ſunt æquales, & alterni CDE, EAF, vel DCE, EFA ſunt æquales, ergo & reliqua latera angulis æqualibus oppoſita erunt inter ſe æqualia, nempe FE, EC, &c. per 26.

SCHO-

SCHOLION.

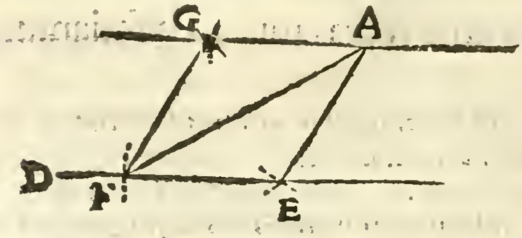
Vniuersalius corollarium 2 antecedens indicatum.

D*Ixi factam à nobis esse ex parte vniuersalem proprietatem rectarum se mutuo bifariantium, quia non adstrinximus intra parallelogrammi figuram, & abstraximus ab esse parallelogrammi, modo secent se intra parallelas; licet deinde ex ea bifariatione mutuà sequatur constitutio parallelogrammi.*

Vniuersalissimè vero pronuntiabimus, & demonstrabimus in lib.6 ad propos. 10 *Eucl.* Intra easdem parallelas rectæ secant se in eàdem proportione, *non solum in bifariatione, vt hìc.*

PRAXIS III.

Per vnicam Circini diductionem quater replicatam vnà cum demonstratione.

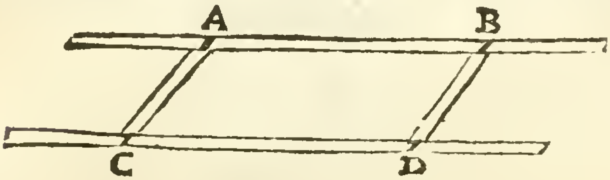


S*It rectæ DE ducenda parallela per A. Ex A quolibet interuallo secetur recta DE in E, & signetur arcellus ad partes G: ex E eodem interuallo fiat sectio in F: ex F eodem interuallo fiat mutua sectio arcelli in G; erit GA parallela ipsi DE. Si enim iungantur EA, FG, & diameter FA, fiet quadrilaterum, in quo duo triangula FGA, AEF habent latera opposita æqua-*

æqualia per constructionem, nempe GA ipsi EF, & GF ipsi EA, & basim FA communem; ergo, per 8 pr. anguli sub æqualibus lateribus sũt ęquales GAF, AFE alterni; ergo parallelæ sũt GA, DE.

PRAXIS IV.

Organicè vnà cum demonstratione.



Vlgatum quoddam instrumentum est instar parallelogrammi alterà parte lõgioris, cuius duo minora æqualia opposita latera mobilia sunt in extremis circa clauiculos tanquam centra. Eo instrumẽto datæ lineæ parallela facillimè ducitur per datum punctum, dùm ita constringitur, vel dilatatur parallelogrammum, vt alterum laterum longiorum aptetur datæ lineæ, alterum apponatur puncto, & iuxta id tanquam regulam ducitur linea datæ parallela.

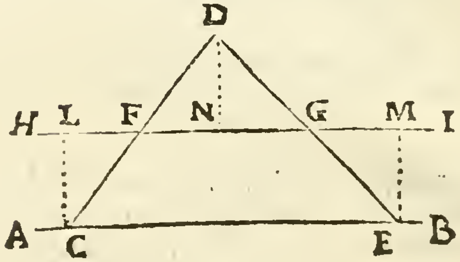
Demonstratio eius instrumenti pendet ex demonstratis nuper in praxi 3 antecedente. In eo enim instrumento seruatur semper idem quadrilaterum habens opposita latera æqualia mobilia circa A, B, C, D; ergo, per nuper demonstrata, id quadrilaterum est etiam parallelogrammum, & rectæ ductæ iuxta latera AB, CD sunt parallelæ.

§. IV.

PRAXIS V.

Ex Lemmate, quod est:

Recta, quæ duo trianguli latera bifariat, est basi parallela.



Sit AB data. super eà excitetur triangulum CDE ita, vt ex eius verticali angulo D demissa perpẽdicularis cadat intra triangulum. Latera basi insistentia CD, DE bifariam secẽtur in F, & G. Educta HI per F, G erit parallela ipsi AB.

Educantur perpendiculares ex C, D, E in L, N, M. Rectæ LC, ME, DN erunt, per 28, parallelæ, & anguli alterni LCD, CDN sunt æquales, & ad verticem F æquales, & latera CF, FD, per cõstructionem, æqualia, ergo & reliqua latera æqualia, & angulus reliquus ad N reliquo ad L æqualis, per 26; at N est, per constructionem, rectus, ergo & L; ergo rectæ HI, AB, quæ duos rectos internos, &c. L, & C continent, sunt parallelæ, per 29.

SCHOLION.

Post nostrũ hoc Theorema, & Lemma incidi in Cãpani simile, quod tamen nos hìc simplicius, & facilius demõstrauimus.

§. V.

§. V.

SCHOLION.

Proximè antecedentis Problematis ampliatio.

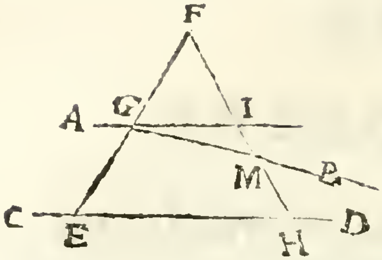
Licebit proximè antepositam praxim exercere per laterum CD, DE quamlibet aliam proportionalē diuisionem, verbi gratia, acceptà tertià, vel quartà, &c. parte lateris CD; item tertià, vel quartà, &c. lateris DE, ducere HI per diuisiones tertiarum, quartarum, &c. tunc enim erit èadem HI parallela ipsi AB, per secundam partem, seu conuersam 2 prop. lib. 6. Nos hìc tantum bifariationem laterum accepimus, quam in antecedentibus huius lib. 1 iam didicerunt Tyrones; omisimus sectiones proportionales, quas nondum ante 6 librum didicerunt.

§. VI.

SCHOLION.

Conuersum proximè antecedentis Lemmatis In §. 4. In triangulo recta basi parallela, quę bifariam secat alterum trianguli latus, bifariat & alterum.

Conuersam proximè antecedentis Lemmatis hìc appono, quia erit nobis vsui in sequentibus ad prop. 42, 43, 44 Euclid. Idq; hìc in loco facilè, ac breuiter expediemus per deductionem ad absurdum, iuxta præcepta Conuersionum



num Geometricarum, de quibus inferius ad prop. 39, & 40, § 1. Sint parallelæ AI, CD, & ipsa AI bifariet in G latus EF, dico bifariari & in I alterum latus FH ab eàdem parallela AI. Si enim recta AI non secat in I vbi est bifariatio, secet supra, vel infra I in M. Quoniã igitur FH cadit in parallelas AI, CD, faciet, per 29, ad easdem partes angulos duobus rectis æquales GIH, IHE. Rursus, quoniam eàdem FH cadit in rectam GMB (parallelam & ipsam, per suppositionem, ipsi CD, & per aduersarium, secantem in M) faciet angulos GMH, MHE æquales duobus rectis; detracto communi H, remanent æquales inter se GIH, GMH. At angulus GMH est externus, & angulus GIM internus, & oppositus respectu trianguli MGI, ergo angulus externus trianguli non est maior interno, & opposito, cōtra prop. 16 huius li. 1. Eucl. &c.

Igitur in triangulo recta basi parallela, quæ bifariam secat alterum trianguli latus, bifariat & alterum.

SCHOLION.

VNiuersalius etiam fieri potest theor. præced. § 6 de parallela non solum bifariante, sed secāte etiam in qualibet alia proportione, vt patebit in cit. lib. 6.

§.VII.

COROLLARIVM.

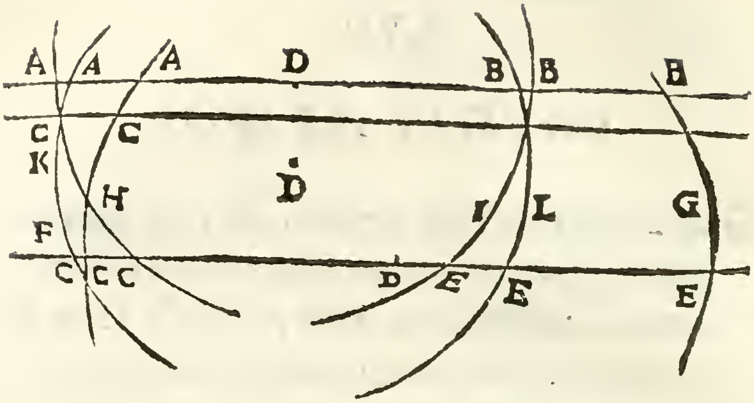
Si ad datam rectam lineam ab vno puncto extra ipſam poſito quotlibet rectæ deducantur, recta altera datæ parallela ſecat in eàdem proportione omnes deductas.

VNiuerſale fecimus corollarium dicendo : in eadem proportione,& intelligendo non ſolum de bifariatione, ſed & de ſectione qualibet eiuſdem proportionis , vt patebit in cit. 2 prop. lib. 6. Exemplum hic eſto pro Tyronibus in bifariatione. Nam in figura ſi fingas ab F quotlibet deductas in CD, quemadmodum probatum eſt ab abſurdo parallelam AI, ſi ſecet bifariam in G, ſecare etiam bifariam in I, ſic probabitur de qualibet aliâ, ab eodem abſurdo. &c.

§.VIII.

PRAXIS VI ducendi parallelam. &c.

QVamuis problema hoc (*inquit Clauius in lem. 4 Aſtrolab.*) Euclid. lib. 1. prop. 31 confecerit, & nos ibidem eiuſdem rei varias praxes tradiderimus, occurrit tamen nunc alia praxis meo iudicio longè facilior, ſiue punctum datum ſit propinquum datæ rectæ, ſiue non, quam hoc loco inſerendam eſſe cenſui, propter frequentem eius vſum tum in Aſtrolabio, tum in alijs rebus Geometricis. Sit ergo datæ rectæ AB per punctum C ducenda parallela. Ex quolibet puncto accepto D, quod à C diſtans ſit, ſiue intra datam lineam, ſiue extra, vt centro deſcribatur per datum punctum C circulus ſecans datam rectam in punctis A, B; (Non eſt autem neceſſe, vt totus circulus

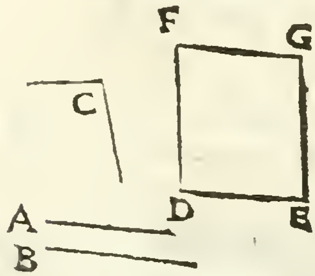


describatur, sed satis est, si duo eius arcus rectam datam secantes delineentur, ita tamen vt oculorum iudicio arcus BE arcu AC minor non sit, veluti in figura apparet) & arcui **AC** æqualis beneficio circini abscindatur arcus BE. Recta namq; ducta per C, E, parallela erit rectæ AB, vt ex eis constat, quæ in Schol. prop. 27. lib. 3. Eucl. demonstrauimus, propter arcus **AC**, BE æquales. Commodius autem res peragetur, si punctum D, non in linea, sed extra sumatur, ita tamen, vt fer è medium locum occupet inter datam lineam, & parallelam ducendam, quod sola æstimatione, plus minus, accipiendum est. Ita enim fiet, vt arcus descripti minus obliquè datam rectam, & parallelam ductam intersecent. In figura arcus AFC, BGE, ex centro D, remotissimo à linea data **AB**, descripti sunt: arcus vero AHC, BIE, ex centro D in datà lineà assumpto: arcus deniq; **AKC**, BLE ex centro D in medio fermè duarum linearum existente, quod omnium ad problema efficiendum est aptissimum.

§.IX.

PROBLEMA.

Conſtituere parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehēdētia datis duabus rectis lineis ęqualia.



Sint datę rectæ A, B, oporteatq; conſtruere parallelogrammū habens angulum ęqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulū rectis A, B æqualia. Sumpta recta DE, quæ rectæ A ſit æquâlis, fiat angulus EDF angulo C, & recta DF rectæ B æqualis. Deinde per E agatur recta EG ipſi DF parallela, & per F recta FG ipſi DE parallela ſecans EG in G. Quoniam ergo & latera DF, EG, & DE, FG parallela ſunt ex conſtructione, parallelogrammum erit DEGF. Quod cum ex conſtructione habeat angulum D angulo dato C æqualem, & latera DE, DF circa dictum angulum D datis rectis A, B æqualia, factum erit quod proponitur.

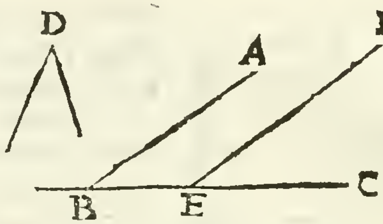
Hoc problema vnà cum ſequenti apud Clauium ſunt in ſchol. ad hanc 31 prop.

§. X.

§. X.

PROBLEMA alterum.

A puncto extra datam rectam lineam proposito lineam rectam ducere, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem.

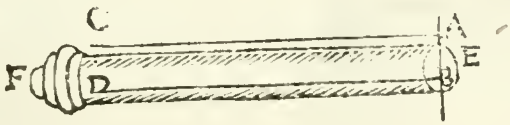


Sit enim datum punctum A, extra rectam BC, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A ad rectam BC ducere lineam rectam, quę cum ea angulum dato angulo D ęqualem cõprehendat. Sũpto quolibet puncto E in linea BC, constituatur in eo angulus CEF angulo D æqualis. Si igitur recta EF per datum punctum A transeat, factum erit, quod iubetur. Si verò non transeat per A, educatur per A recta AB ipsi EF parallela secans BC in B. Dico angulũ ABC angulo D æqualem esse. Cum enim parallelæ sint AB, EF, erit angulus CEF externus interno ABC ex eadem parte opposito æqualis. Cùm ergo & angulus D angulo E, per constructionem, sit æqualis, æquales inter se erunt ABC, & D. quod est propositum.

§. XI.

§. XI.

Vſus parallelarum in re militari, & agraria, nempe pro exploratione eiaculationum e bombardis ad ſcopum, & pro ducendis in alto vel lineis, vel planis libellatis. &c.

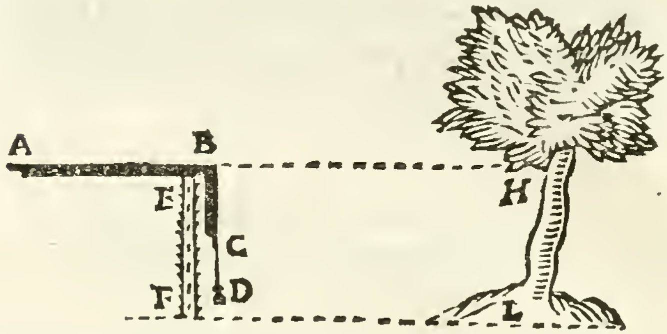


SI habeas inſtrumentum e ferreis haſtis ita compactum, vt angulos ad A, & B. rectos, vel duobus rectis æquales conficiat, hoc eſt ipſæ AC, BD ſint parallelæ; & alteram haſtam BD ingeras in cauum tormētum EF, & aptetur ipſa BD lateri interiori tormenti, tum videas etiam AC extra tormentum æquè diſtare lateri exteriori tormenti, pronuntiabis tormentum illud non eiaculari pilas ad ſcopum ſpectatum iuxta dorſum tormenti. In ea enim exploratione per parallelas, apparet craſſitiem lateris caui tormenti eſſe eiuſdem vbiq; quantitatis, ac ſi quis dirigat radium viſualem per dorſum tormenti exterius ad ſcopum, faciet lineam parallelam cum linea eiaculationis è tormento, præſertim ſi eiaculatio fiat ad ſpatium proximum; ergo non concurret in vllo puncto linea eiaculationis cum linea viſionis: ergo nullum habet ſcopum, ad quem ex deſtinatione oculi. &c.

At ſi ſit dorſum tormenti ad partes F craſſius, quam ad partes vergentes ad os tormenti, ac appareat accedere magis ad partes in C. quā ad partes in A alterius haſtæ parallelæ CA, tūc fiet inclinatio viſualis lineæ directè iuxta dorſum tormenti ad lineā eiaculationis &c. vt patet ex ijs, quæ philoſophati ſumus ad axioma 11. Eadem erit exploratio circa dioptras, per quarum vertices nō debet ire haſta ſuperior AC, nec ab illarum verticibus æquidi-ſtare,

stare, sed altior esse debet dioptra, quæ in dorso tormenti, quam quæ ad oram oris.

II Si lubeat chordam ducere, vel iuxta illam planum erigere, quod ad libellam horizonti æquidistet, vtere norma simili modo, quo docuimus vtendum ad mõtium cultellationes in Apiar. 2. pro-



gym. 2, propos. 1, & 2, cum perpendiculo &c. vt vides normam ABC cum perpendiculo BD innixam baculo perpendiculari EF. Radente perpendiculo latus BC, linea visualis defertur per AB in H, atque ipsa BH, siue planum per BH, est perfectè libellatum, ac parallelum horizonti. Nam ex demonstratis ab Euclide in hisce propositionibus de parallelis, anguli interni ad E, & ad F sunt recti, ergo duæ rectæ BH, FL sunt parallelæ; quidquid sit de arbore HL ad horizontẽ non perpẽdiculari. &c. Plura alia tute adde. &c.

§. XII.

Plurimi, atque insignes parallelarum vsus in omni genere Mathematicarum scientiarum, præsertim ex Apiarijs.

1 *LOngum esset percẽsere quàm multa operentur lineæ parallelæ præsertim in Geometrica Philosophia. Non nihil tantùm indico in lib. 1, & 6 horum elementorum. Ope parallela-*

rum

rũm lineam diuides in quotlibet partes siue æquales, siue proportionales iuxta ea, quæ habes apud Clauium in Scholijs post prop. 40. li. 1. Eucl. & in Schol. ad prop. 10, li. 6, & in libello Machometi Bagdedini, & Federici Cõmandini de superficierum diuisionibus. De figuris intra, & per parallelas mira docentur li. 1. à prop. 35. per sequentes, & li. 6. prop. 1, 2, 3, 4, &c. Præsertim ex corollario prop. 4. propter parallelam basi ductam &c. aperitur inde campus vberrimus ad vniuersam Geodesiam. Est enim optica propositio: Si radij optici per extremitates duarum parallelarum incedant, radiorum longitudines magnitudinibus sunt proportionales. *Exempla babes facillima apud Euclidem in opticis Theorem. 8, 20, 21. Sed de his vberius, & clariùs nos suo loco, nempe ad propos. 4. li. 6. quò hæc propriè spectant, nec demonstrari possunt nisi ex ea propos. 4. Ex parallelis prodit vniuersa ratio picturæ opticæ, ac Scenographicæ, quarum rerum exemplũ habes in instrumentis parallelogrammis, de quibus alij, ac nos etiam in Apiario, nostro Scenographico.*

2 Hic interim etiam ex aliquibus nostris Apiarijs ad ornandas hasce propositiones Euclidis de Parallelis, habe sequentes vsus varios, ac singulares.

I.

In aranearum tela, in qua lineæ omnes pręter centrales, sunt parallelæ, est vsus, & cognitio proportionum omnium geometricarum, & modi omnes argumentandi e lib. 5. Euclidis exercentur.

Apiar. 1. Prælibam. 2. Proposit. 1, & 2.

II.

Per parallelas facilius, & vniuersalius, quàm Euclid. lib. 6, præcipua problemata proportionum exercentur. &c. ex aranea.

Ibidem propos. 3. 4. 5. &c. vbi vide exempla, præsertim modum facillimũ construendi super data recta dato polygono simile, similiterq; positũ, per parallelas, &c. Vnde & picturæ opticæ ratio.

III.

Montium perpendiculares altitudines, & latentes sub montibus latitudines, & turrium altitudines &c. per parallelas metiri.

Apiar. 2. Progym. 2. propos. 1. & sequent. sed expressius vide ad proposit. 33. ex qua demonstratio in loco. &c.

IV.

Duas rectas producere, quæ cũ tertia incidente contineant angulos internos minores duobus rectis (.i. nõ sint parall.) nec tamen etiam in infinitum productæ, coincidant. &c.

Apiar. 3. Progym. 2. proposit. 1. & 2. &c. vbi nõ vnum exemplum est. Vide & alia in Analectis ad 4 edit. Apiariorum.

V.

Infinitum in finito multipliciter ex parallelis. lineæ breuissimæ numquam exhauribiles. &c.

Ibidem, Propos. 4, 5, & corollar.

VI.

Dies perpetua in perpetuo solis motu ad occasum. Aurora perpetua in perpetuo accessu Solis ad ortum. &c. Demonstr. ex parall.

Ibidem in corollar. 2. ex propos. 5. & in Apiar. 8. Progym. 5. Proposit. 8, & in corollario.

VII.

Senis Parallelis vniuersæ Gnomonicæ Philosophiæ vsus ad horaria. &c. expeditur.

In Apiar. 9 toto. Nam ibi senis parallelis per vnicam circini diductionem ductis, horarium particulare, & vniuersale (immo & duodena) mobile construimus, & instrumentum vniuersale ad immobilia omnia horaria, & præcipua Astronomica problemata exercemus.

VIII.

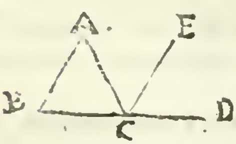
VIII.

Graue casurum appenso pondere grauiori in partem, in quam casurum est, non cadit.

Machinarium hoc portentum demonstramus nos in Apiar. 4, Progym. 1. Propos. 1, ex 28. Propos. Euclidis de parallelis. &c. Prædicta omnia, & citata è nostris Apiarijs vide vna cum suis figuris; Inuenies omnia facillimè in primis, ac breuiter exposita.

Propos. XXXII. Theor. XXII.

Omnis trianguli vno latere producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis; & tres interni duobus rectis sunt æquales.



Sit triangulum ABC, & vnum eius latus BC producatur in D. Dico angulum externum ACD æqualem esse duobus internis, & oppositis CAB, ABC; & tres internos ABC, BCA, CAB duobus rectis æquales [a] Ducatur per C ipsi AB recta parallela CE. Quia ergo in AB, CE parallelas cadit AC, [b] erunt anguli alterni BAC, ACE æquales. Rursus quia AB, CE parallelæ sunt, & in ipsas cadit recta BD, [c] erit externus angulus ECD æqualis interno, & opposito ABC: ostensus est autem & ACE æqualis BAC, totus ergo ACD æqualis est duobus internis, & oppositis BAC, ABC. Apponatur communis ACB: & erunt ACD, ACB æquales tribus ABC, BCA, CAB: [d] sed ACD, ACB æquales sunt duobus rectis, ergo & ACB, CBA, CAB æquales sunt duobus rectis. Omnis ergo trianguli, &c. Quod oportuit demonstrare.

a prop. 31. 1.

b prop. 27. 1.

c prop. 28. 1.

d prop. 13. 1.

§. I.

SCHOLION.

Propositio, & demonstratio hæc 32 ab Aristotele, atq; ab alijs Philosophis commendatæ, & in exemplum potissimæ demonstrationis aduocatæ, & à nobis cõtra ageometrarum calumnias propugnatæ.

Esse duobus rectis æquales tres angulos in triangulo, est per se & secundum quod ipsum.

1 PRoclus in Comment. ad hanc: Internos angulos duobus rectis æquales habere, per se, & secundum quod ipsum triangulo inest, idcirco & Aristoteles in tractationibus de demonstratione, hoc exemplum habet in promptu, secundùm quod ipsum considerans. Quemadmodum igitur omni figuræ terminatam esse per se, & primum inest, ita rectilineæ, licet non omni, figuræ internos tres angulos duobus rectis æquales habere.

Omni figuræ conuenit per se, & primũ terminari.

2 *Aristot. ipse cum sæpe alibi aduocat in exemplum hanc 32 prop. Eucl. tũ præcipuè lib. 1. Prior. analytic. text. 3. cap. 1. & lib. 1. Poster. tex. 23, & tex. 39. & 2 lib. Physic. tex. 89. Ac 9 Metaph. t. 20. Quorum locorũ aliqua illustrabimus in sequentibus ad hanc 32. Aliqua loca sunt, in quibus ipsemet Aristoteles affert hãc prop. 32, & eius demonstrationis modum, & trianguli proprietatem de tribus angulis duobus rectis æqualibus pro exemplo perfectissimæ, ac scientificæ demonstrationis habentis proprietatem conuenientem subiecto per se secundum quod ipsum, necessariò connexam cũ subiecto, & medio termino, vniuersalem, &c. Verba aliqua è citatis locis Philosophi affero:* Per se nãq; triangulus habet duos rectos &c. *&*: vnumquodq; autem scimus non secundum accidens, quãdo secundum illud cognoscimus secundum quod inest ex principijs illius secundum quod illud; vt duobus rectis æquales habere, cui inest per se, quod dictum est ex principijs huius. *&*: est autem necessarium in Mathematicis, & in his quæ secundum naturam fiunt

Apud Aristotelẽ propos 32 pro exemplo scientificæ demõstrationis.

fiunt quasi eodem modo. Quoniam enim hoc rectum est necesse est triangulum tres angulos habere æquales duobus rectis. *nempe ab angulo externo recto æquali duobus internis oppositis, & ab altero deinceps recto, & interno fit necessario vt demonstrentur tres interni æquales duobus rectis; iuxta ab Eucl demonstrata.*

Necessaria in Mathematicis quæ sit.

3 Ex prædictis à Philosopho elice Ageometras aliquos suo magistro contradicere, dum, non imbuti scientia Philosophiæ Geometricæ, quam callebat Aristoteles affirmant demonstrationem de tribus angulis trianguli æqualibus duobus rectis esse ab extrinseco, nempe vel a lineà ductà parallelà lateri trianguli, vel ab angulo externo facto ex productione vnius lateris trianguli. Ageometricæ sanè id hebetudinis est nescientis distinguere in demonstrationibus geometricis constructionem à medio termino potissimo, & à vi demonstrationis. Eductiones illę linearum præstructiones sunt, è quibus pateat facilius medius terminus. Qui quidē est in hac 32 prop. quia, vt acutè vidit Aristoteles, tres interni anguli triāguli æquāt spatium angulorum ad vnum punctum, &c. iuxta 13 prop. li. huius 1 Euclid. vel iuxtà à nobis inferius addenda, quia tres anguli trianguli ęquantur spatio duorum angulorum inter paralleias, qui duo, per 29, sunt æquales duobus rectis. &c.

Peripatetici aliqui istis oppositis, & Philosophiæ Mathematicæ inscietissimi.

Ageometrica hebetudo, & eccuitio quorūdam

Aliud est constructio, aliud medius terminus in Geometricis demonstrationibus.

4 Quod autem aliqui Ageometrici ferre non possunt Aristotelem afferre mathematica exempla, præsertim ex hac 32. pro veris, & potissimis demonstrationibus, ac blaterant non requiri veritatem in exemplis, atq; ab Aristotele quasi parabolicè induci hæc exempla, ceu in parabolis, & fabulis moralibus, &c verè parabolicè isti fabulantur. Quis enim vnquam sanæ mentis affirmarit quando Aristoteles explicat conditiones perfectissimæ demonstrationis, & affert in exemplum demonstrationem aliquam Mathematicam, afferre exemplum, quod ipsi doctrinæ sit aduersarium? Æquè ac si quis diceret in exemplum veræ demonstrationis afferri falsam demonstrationem, & pro demonstratione ab intrinsecis, ac neceßarijs afferri ab extrinsecis, & per accidens.

Ineptissimū effugium quorumdā contra Aristotelem, & veritatem Geometricam pertinaciam.

Risum teneatis amici?

Satius esset vt Ageometrici isti exemplo sui præceptoris Aristotelis discerent Philosophiam Mathematicam, quam si scirēt admirarentur, ac laudarent; quam dum ignorant satius silerent, nec loquerentur de ijs, quorum sunt ignorantes, nec suam proderent ignorantiam Philosophis doctioribus, atq; in primis ipsis Mathematicis irridendam. Relege § 13 ad 1 propos.

Amicū morituā aduersantibus Aristoteli, & Geometricæ Philosophis.

§. II.

§. II.

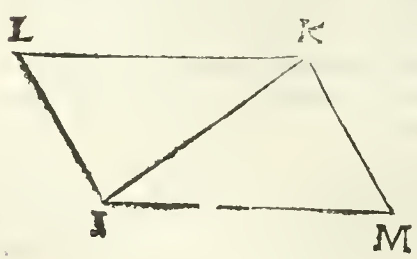
Geometricæ ſolertiæ vſus in varia, & multiplici demonſtratione huius prop. 32 Euclidis.

IVcundæ vſus exercitationis eſt ad Geometricum habitum cõparandum hanc Eucl. 32 propoſit. varijs modis demonſtrare; Cuius rei ſpecimen aliquãdo nos exhibere conſueuimus noſtris Auditoribus. Aliqua hic ſcriptis prodemus, & compendio etiam aperiemus fontes, vnde illa demonſtrationum vbertas dimanet, atq; vnde alij alias plures demonſtrationes procudant.

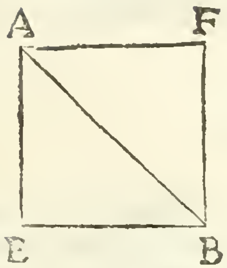
Quoniam vero Eucl. in hac 32 prop. duo quęſita demonſtrat, primum de angulo externo æquali duobus internis oppoſitis, ſecundum de tribus internis æqualibus duobus rectis, nos varietatis gratia primo ſecundum quæſitum, ſecundo loco primum variè demonſtrabimus; atq; —

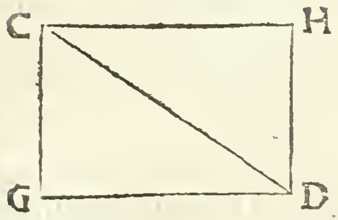
— Aliter, quàm Euclides, I.

SIt quodlibet parallelogrammum quadrilaterum, (nam etiam pluſquam quadrilatera ſunt aliqua, vt videbis ad propoſ. 34) vel Rhombus, &c. vel Rhomboides LM conſtitutum ex 31 prop. anteced. vel quadratum EF, vel altera parte longius GH, & ad oppoſitos angulos ducantur diametri AB, CD, IK, diuiſumq; ſit parallelogrammũ in duo triãgula, dico vtriuſlibet triãguli (in exẽplo, & fig. rhõboidis) LIK, vel KMI tres angulos, L, & LKI, & KIL eſſe æquales duobus rectis. Quoniam enim parallelę per conſtructionem LK, IM, vel LI, KM internos ad



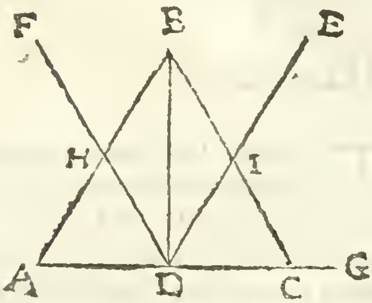
L,





L,& I duobus rectis æquales faciũt, item internos ad K,& M duobus rectis æquales, per 29 huius, erunt quatuor anguli ad L, I, M, K quatuor rectis æquales. Et quoniam LK cadit in parallelas LI, KM, LK, IM, facit, per eandem 29, angulos alternos inter se æquales LKI, KIM, & LIK, IKM, & latus IK, quod æqualibus adiacet angulis, est commune, ergo per 26, sunt in triangulis LIK, KIM reliquus angulus, & reliqua duo latera reliquis æqualia. Vel, ex octaua prop. huius, si suppo-nas per constructionem opposita latera æqualia, & est commune IK, ergo sunt æqualia triangula &c. Igitur ipsum parallelogrammum LM, & quatuor eius anguli recti sunt diuisi à duobus triangulis in duo æqualia, ergo vtrumlibet triangulum obtinet dimidium quatuor rectorum, idest duos rectos Quod erat demonstrandum. Idem in, & de EF, GH. &c.

Aliter II.

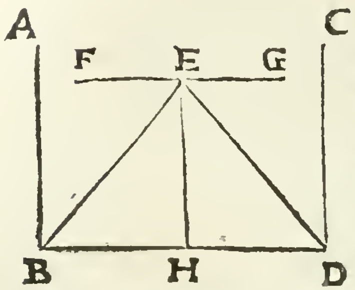


SIt triãgulum ABC. Ex quolibet puncto D basis intra triangulum educãtur duæ parallelæ vtriq; laterũ, ipsa DE parallela lateri AB, DF lateri BC. & iungatur DB. In parallelas DE, BA cadunt AC, BD, ergo, per 29, externus CDE æqualis est interno DAB, & alternus EDB alterno DBA. Itẽ in parallelas DF, BC cadunt eædem AC, BD, ergo internus ADF interno DCB, & alterni FDB, DBC sunt æquales, ergo anguli quatuor ad D sunt æquales duobus A, C, & duobus ad B, hoc est tribus angulis trianguli ABC. At quatuor ad D sunt

æqua-

æquales duobus rectis, per 13 huius, ergo tres anguli trianguli sunt æquales duobus rectis.

Aliter III.



AB extremis lubiti lateris, siue basis BD excitentur duæ parallelæ BA, DC, & à vertice E demittatur tertia parallela EH: interni duo anguli CDH, HBA inter parallelas BA, DC sunt, per 29, duobus rectis æquales. Cadente ED inter parallelas HE, CD, sũt alterni HED, EDC æquales; item cadente EB inter EH, AB, sunt æquales duo ABE, BEH, & sunt communes EBH, HDE, ergo tres BED, DBE, EDB sunt æquales rectis duobus ABH, HDC.

Aliter IV.

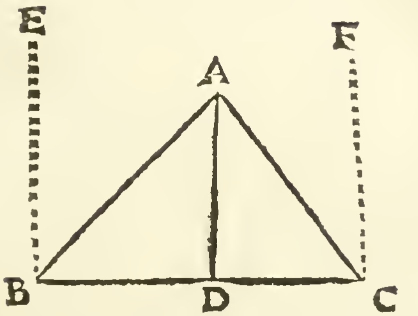
PEr lubiti Anguli verticem E ducatur basi BD parallela FG. Alterni FEB, EBH, & GED, EDH sunt æquales, & BED communis, ergo tres anguli trianguli BED sunt æquales tribus FEB, BED, DEG, hoc est, per 13, duobus rectis.

Aliter V.



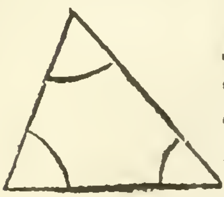
TRianguli ILM vni laterum LM educatur vel minima parallela IK ab angulo I; KIL, ILM alterni, per 29, sunt æquales, & duo LIM, IML cõmunes, & duo inter parallelas interni KIM, IML duobus rectis æquales, per eandem 29; ergo & tres MIL, ILM, LMI, &c. Sine vsu, vt communiter alij, prop. 13.

Aliter VI.



EX communibus notionibus, vt affirmat Proclus, patet tres angulos trianguli æquales esse duobus rectis. Nam si fingas rectas EB, CF facere cum tertia BC angulos duos ad B, & C vel rectos, vel duobus rectis æquales, quantùm rectæ EB, CF inclinãt se ad triangulum in A, & imminuunt de duobus EBD, DCF, tantumdem acquirunt ad angulum A; Ac proinde spatium duorum rectorum, quod includebatur à duabus EB, EF parallelis, concluditur ab iisdem inclinatis in triangulum BAC.

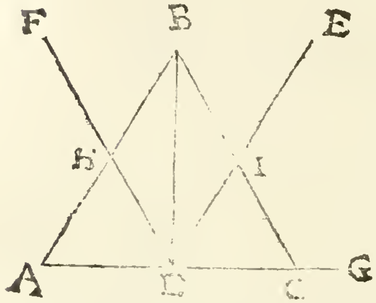
Aliter VII.



ALiqui etiã pro rudioribus in Geometrica Philosophia semimechanicè ostendunt duobus rectis æquales tres angulos in triangulo. Scilicet vt vides in appositâ illiteratâ figura, factis centris tribus verticibus angulorum, & eàdem circini diductione arcubus subsignatis. Si enim tres illos arcellos ex eodem centro simul iunxeris, siue in peripheriâ circuli ducti ex eàdem circini diductione secueris tribus iis arcellis partes æquales, comperies ex partibus iis confici dimidium peripheriæ circularis. Cum ergo, ex dictis ad 9 propos. huius, tota circuli peripheria intelligatur subtendi quatuor angulis.

gulis rectis ad centrum, iuxta 13 huius, semicirculus, siue arcelli conficientes semicirculum, indicabunt quantitatem duorum rectorum.

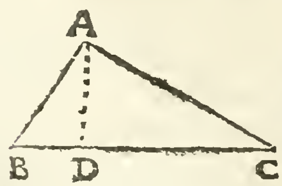
Aliter VIII.



EX ipsomet Euclide, & in hac hic figura, nẽpè trianguli ABD producto latere AD in C, & eductà DE parallelà lateri AB; nulla tamen à nobis factà mentione, vt Euclides, vel suppositione angulũ externum esse æqualẽ duobus oppositis internis. Spatium igitur trium angulorum ad D cum æquiualeat duobus rectis, & externus CDE sit æqualis interno DAB, & alternus ED B alterno DBA, & ADB sit communis, ergo tres interni anguli trianguli absorbent spatium duorum rectorum.

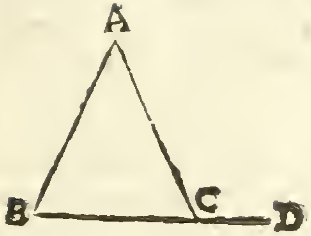
Aliter IX, & X.

SI secundam demonstrationem, siue secundum modum demonstrandi in antecedentibus supponas pro lemmate, satis erit ab angulo trianguli cuiuscunq; deducere in basim rectam, siue perpendicularem, siue obliquam. Itaq; in triangulo ABC, quoniam, per secundam nostram ex antecedẽtibus, angulus BDA est æqualis duobus DAC, ACD; Item angulus ADC est ęqualis duobus DAB, ABD, ergo, ex 13, tres B, C, BAC sunt ęquales duobus ad D rectis.



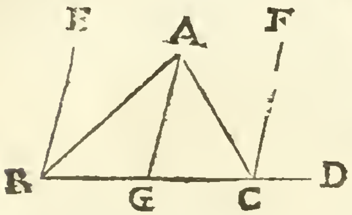
Pariter si loco lemmatis vtaris octauo modo ex Euclide, sine vlla eductione parallelæ vlli alterum, satis erit (iuxta id, quod innuit Aristoteles, vt inferius videbis) tantillum protrahere ad

ex.



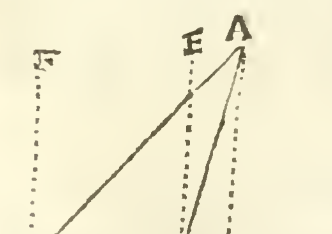
exteriores partes vnũ è tribus triãguli lateribus, ceu vides, trianguli ABC producto latere BC in D; quoniam, per 8 modum ex antecedentibus, ACD est æquale spatium duobus A, B, & ACD communẽ, &c.

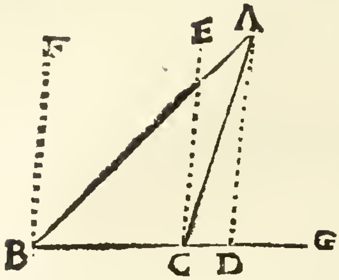
Aliter XI.



QVod autem pertinet hîc apud nos secundo loco ad secundum quæsitum ab Euclide primo loco demonstratum, nempè de angulo externo æquali duobus internis oppositis, nos sic ratiocinamur. Triãguli ABC producto latere BC in D, educantur parallelæ siue obliquæ, siue perpẽdiculares à singulis trianguli angulis, nempè ex B ipsa BE, illiq; educantur parallelæ ex A, & C ipsæ AG, CF. Propter BD, quæ cadit in parallelas BE, CF, angulus externus DCF est æqualis interno EBG, & propter BA, quæ cadit in parallelas EB, GA, anguli alterni EBA, BAG sunt æquales, ac proinde FCD est æqualis duobus GBA, BAG. Rursus propter AC, quæ cadit in parallelas AG, CF, sunt æquales GAC, ACF; ergo totus extrinsecus ACD est æqualis duobus intrinsecis CBA, BAC.

Sin autem triangulum ita sit obliquum (vt vides in apposita altera figura) vt è tribus parallelis ea, quæ educta fuerit ab angulo verticali cadat extra triangulum, velut in punctum D producta basis BC ad G. Sic ratiocinabimur. Alterni FBA, BAD sunt æquales: BAD constat ex duobus BAC, CAD, ergo sunt æquales duo BAC, CAD vni FBA; addito communi ABC, sunt æquales duo FBA, ABC tribus CBA, BAC, CAD. Sed propter BD cadẽ-

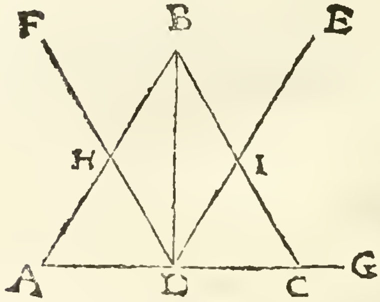




tem in parallelas BF, CE, sunt æquales FBC, ECD, ergo & ECD est æqualis tribus CBA, BAC, CAD. Sunt autem etiam æquales alterni ECA, CAD; ergo, ijs detractis, remanent æquales duo interni CBA, BAC externo ACD.

Si triangulum sit rectãgulum expeditur demonstratio, per eductam parallelam vni laterum constituentium angulum rectum modo persimili eius, quem nunc vniuersalem subyciam etiam ad triangula non rectangula.

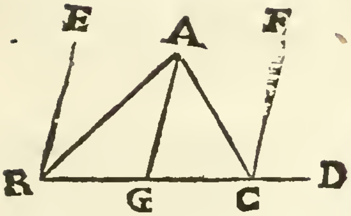
Aliter XII.



IN figura secundæ nostræ antecedentium demonstrationum facta constructione, vt ibi præceptum est, dico externum BCG æqualem esse internis A, & ABC. Nam in parallelogrammo BHDI alterni HDB, DBI, IDB, DBH sunt æquales; ergo totus HBI toti HDI æqualis. Externus CDI est æqualis interno DAB: Ergo totus CDH hoc est tres HDB, BDI, IDC sunt æquales tribus DAB, ABD, EDC, hoc est duobus DAB, ABC. At externus GCB est, per 29, æqualis interno conflato ex tribus, nempè ipsi CDH, ergo & idem GCB æqualis est duobus internis CAB, ABC.

Aliter XIII.

PAucioribus etiam lineis expediamus quod variè possemus pluribus, nempè eductâ vnicâ parallelâ vni laterum trianguli.



guli, ceu trianguli BAG lateri (contra quam Euclides) alteri constituentium angulum AGC externum, nempè ipsi AG factà parallela BE, statim patet demonstratio; nam angulus EBA æqualis est ipsi BAG, & externus AGC interno EBG, ergo & duobus internis oppositis GBA, BAG.

Varios deinde casus in singulis demonstrationum modis ponere possemus, ac præterea varias conuersiones, & earum varios modos addere; sed ne nimia geometrica fæcunditas pro voluptate satietatem pariat, sat esto specimen iam exhibitum.

§. III.

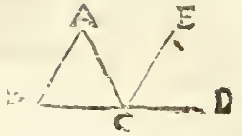
Corollaria multiplicia è 32 prop. Eucl.

COROLLARIVM I.

Aristoteles ex hactenus variè demonstratis elucidatus, proprie atq; aptissimè è quinta nostrarum antecedentium demonstrationum.

1 LIb.9 *Metaph. textu* 20: Cur triangulus duo recti? Quia qui circa vnum punctum anguli duobus rectis æquales sunt. *Indicat rationem, quam Euclides hic ad finem demonstrationis in prop. hac* 32, *& nos in secundo modo demonstrandi, & in alijs antecedentium vsurpauimus è* 13 *propos. huius. Sunt enim*

(in



(in figurà Euclidis) circa punctum C anguli tres BCA, ACE, ECD duobus rectis æquales, & ijsdem tribus demonstrantur æquales tres anguli interni B, A, C triãguli BAC.

Pergit ibidem Philosophus : Si igitur quæ ad latus educeretur, videnti mox esset manifestum. *Affirmat exemplis geometricis patere demonstrationes, earumq; primarias rationes, eductis in actum aliquibus, quæ latebant in potentia. Qua de re inferius etiam nos vide ad hanc 32, vbi eius vsum habemus in demonstrando angulo recto in semicirculo. Pro exemplo hic igitur ab Aristotele indicato vide figuram Euclidis, in qua dum educitur CE parallela lateri AB, & producta est basis BC ad D, manifesta fit ratio ex 13, & ex 29 propositionibus, cur sint in triãgulo ABC tres æquales duobus rectis, iuxta prædicta, & demonstrata ab Euclide, & à nobis. Inspice etiam pro elucidatione Aristotelis figuram secũdi, & duodecimi nostri modi, & applica illi, & explica ex ea verba Philosophi.*

2 Cæterum quoniam illæ figuræ, & figura etiam Euclidis duas lineas educunt in actum, alteram parallelam lateri trianguli, alteram ex basi AC productà ad G, Philosophus autem affirmat patere rationem demonstrationis per eductam ad latus, nempè parallelam, nec meminit productæ basis; ideo aptiorem censemus verbis, & menti Philosophi explicandis figuram quinti nostri modi, in qua, educta tantum tantillà parallelà IK vni laterum LM trianguli ILM, statim quasi quædam clauicula proditur, qua facillimè aperitur demonstratio. Ex particula enim parallela IK patet (vt habes ibi à nobis demonstratum per solam 29, sine vsu prop. 13) duobus inter parallelas IK, LM rectis angulis æquales esse tres internos trianguli ILM.

COROLLARIVM II.

Tres anguli cuiuslibet trianguli æquales tribus cuiuslibet, &c.

APud Orontium: Hinc fit manifestum cuiuslibet triãguli tres angulos æquales esse tribus angulis alterius cuiuscunq; trianguli: nempè quod eisdem, vt potè binis rectis vtrobiq;, sint æquales. *Mira proprietas cuiuscunq; trianguli, quæ prodit è iam demonstratà altera miriore, nempe quàcunq; formà, vel quantitate in quocumq; triangulo constituãtur anguli, in isoscele, siue in variè scaleno, in æquilatero, in rectãgulo, obtusangulo, acutangulo. &c. semper retinent simul sumpti eandem quantitatem duorum rectorũ, nec minuunt, nec augent.*

COROLLARIVM III.

Cuiuscunq; rectilineæ figuræ externi omnes anguli simul sumpti sunt æquales omnibus externis angulis simul sumptis alterius cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

1 *PLanè mira etiam hæc proprietas (cuius eductionem ex hac 32 Eucl. mox videbis) qua fit vt figuræ rectilineæ laterum numero minimæ, velut triangularis, externi tres anguli sint æquales infinitis externis, qui fiunt in qualibet figurà laterum numero plurimorum; productis nimirum singulis lateribus ordinatim versus eandem partem.*

Prodit hocce corollarium immediatè, ac primò ex ea mira proprietate, quæ iam pridem vulgata habetur apud Proclum, Campanum, Commandinum, Clauium, &c. Quam & hic à nobis habe apud Griembergerum in eius Euclide, vbi paucis complectitur quæ

sunt

ſunt apud alios fuſiora.

2 Omnis *figura rectilinea diſtribuitur in tot triãgula, quot ipſa continet latera, demptis duobus, ita vt anguli triangulorum conſtituant angulos figuræ.*

Quoniam autem anguli cuiuſcunq; trianguli ſunt ęquales duobus rectis, erunt omnes anguli figuræ rectilineæ æquales bis tot rectis, quot ipſa habet latera, demptis duobus. Quot autem habet latera, tot habet angulos internos, & externos. Ergo interni ſimul cum externis ſunt ęquales bis tot rectis quot ſunt latera; quia quilibet externus cum ſuo interno æquiualet duobus rectis, per 13. Interni autem ſoli ſunt æquales bis tot rectis quot ſunt latera, dēptis duobus, quibus reſpondent quatuor recti; demptis igitur omnibus internis, remanebũt externi quatuor rectis æquales. & ideo omnium figurarũ anguli externi ſimul ſumpti ſunt æquales ſimul ſumptis. &c.



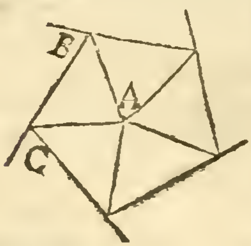
Verba Griembergeri pōderato, & ſententiam probè percipito, ac figuræ illuſtratæ (ob conſilium, quod leges in coroll. 6) hìc appoſitę applicato. Omnes interni & externi ſunt bis tot recti quot latera. ſingula latera cum altero producto conſtituunt duos rectos. Interni omnes ſunt bis tot recti quot latera, demptis duobus, ideſt demptis externis quatuor rectis, quos duo latera conſtituunt. &c.

CO-

COROLLARIVM IV.

Aliter, ac facillimé geometricé demonstrare, cuiuſcunq; figuræ rectilineæ omnes angulos externos ſimul ſumptos æquales eſſe angulis externis ſimul ſumptis cuiuſcunq; figuræ, &c.

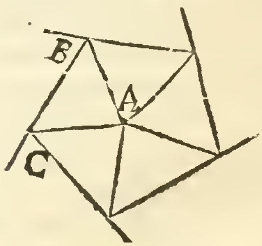
SI ſuper ſingulis datæ figuræ lateribus erigantur triangula habentia vertices ad commune punctum intra figuram, vt ad A, in eà figurà omnes interni anguli ad baſes, vnà cum angulis ad verticem A, ſunt æquales bis tot rectis, quot habet ea figura latera, vel angulos; quia ſuper ſingulis lateribus extructa ſunt ſingula triangula, quorum anguli ſingulorum ſunt æquales duobus rectis, ex hac 32 Eucl. Item productis lateribus ad eaſdem partes, omnes anguli interni datæ figuræ vna cum angulis externis B, C, &c. ſũt æquales bis tot rectis, quot habet ea figuræ latera, vel angulos; quia ſingula latera cum ſingulis extra productis faciunt duobus rectis æquales angulos ad puncta productionum B, C, &c. per 13 prop. lib. 1. Eucl. ſublatis ergo internis angulis communibus ad baſes, remanent æquales inter ſe anguli omnes externi, & anguli omnes ad verticem, ſeu punctum A. At ad A omnes ſunt æquales quatuor rectis, per corollarium ex 15 prop. ergo & omnes externi æquantur quatuor rectis.



COROLLARIVM V.

Facillima, & expeditiſſima ratio in qualibet figura cognoſcendi quot angulos rectos internos contineat.

E Proximè antecedēti corollarium prodit & hoc nempè, datæ figuræ rectilineæ numerus angulorum internorum, vel laterum, à quo denominatur, dūplicetur, & ex eo detrahatur numerus 4, qui eſt angulorum externorum, & reſiduū erit numerus rectorum in eà figura.



Dato, exempli gratia, pentagono A, numerus angulorum internorum, ſiue laterum, à quo denominatur, nempe 5 duplicetur, fiatq; 10, atq; ex duplicato, hoc eſt 10, detrahatur 4, (qui numerus eſt vel externorum angulorum B, C, &c. vel, angulorum intra figurā ad punctum A (qui non ſpectant ad internos, ac proprios figuræ angulos conſtitutos ab ipſius figuræ lateribus) eritq; reliquus numerus 6 angulorum rectorum, quibus æquales ſunt omnes anguli interni conſtituti à lateribus pentagoni.

§. IV.

COROLLARIVM VI.

Ariſtotelis locus perobſcurus explicatus vbi de demonſtratione vniuerſali, è corollario 4 antecedentium.

D Vm 4 antecedentium corollarium in appoſita figura ita demonſtrauimus, vt neq; figuræ nomen, neq; angulorum, atq; la-

laterum numerum proderemus (quod tamen fecimus in exemplo 5 corollarij antecedentis) consultò id fecimus, vt non solum propositionem vniuersalem, & abstractam à peculiari figura demōstraremus, sed etiam Aristoteli lucem afferremus, præsertim in cap. 18 lib. 1. poster. resolut. dum demonstrationem vniuersalem particulari esse præstantiorem confirmat exemplo petito à corollario 4 ex antecedentibus, atq; ait. Quando igitur cognoscimus quod quatuor exteriores sunt æquales, quoniam æqui crus, adhuc deficit propter quid æquicrus? quoniam triangulus: & hoc quoniam figura rectilinea, si autem hoc, nō amplius propter aliud erit, tunc maximè scimus, & vniuersale est tunc, vniuersalis igitur melior est. *Hoc est: si quis demōstret externos tres angulos triāguli æquilateri esse æquales quatuor rectis ita, vt de ea triāguli specie id affirmet, scientiam facit imperfectam, & quasi indiuidualem de ea peculiari figura, nempe de solo æquilatero; quærat enim aliquis: quare æquilateri externi anguli tres sunt æquales 4 rectis? an soli æquilatero ea proprietas competit? deficit, & accisa scientia est ista peculiaris, quia ea proprietas competit æquilatero non soli, sed omni etiam triangulo. deficit adhuc in hac specie, nisi ad genus vniuersale scientiam, & proprietatem abstrahas, atq; affirmes, ac demonstres non solùm æquilaterum, & omne triangulum, sed & omnem rectilineam figuram id habere vt omnes eius anguli externi simul sumpti sint æquales 4 rectis. Atq; ideo nos in exemplo demonstrationis 4 antec. corollar. ita versati sumus, vt vniuersaliter demonstraremus cum abstractione à nomine figuræ ibi appositæ.*

COROLLARIVM VII.

Ad praxes insignes cuiuscunq; regularis figuræ dati anguli quantitatem facillimè, nec vnico modo deprehendendi, vnà cum corollario theorico miræ cuiusdam proprietatis.

1 P*Raxeωn aliquot insignium exempla iam vidisti ad prop. 23, quibus inseruiunt hìc apposita. Itaq; in exemplo pen-*

tagoni regularis A dato angulo B, quantus nam est ille angulus? idest, factà comparatione ad rectum, quotam recti partem, vel quot rectos, ac recti partes obtinet? Iam ex antecedentibus nosti omnes pentagoni angulos internos æquales esse 6 rectis; habet enim bis tot rectis æquales quot habet latera, idest duplicato numero laterum, habet 10, ac detractis 4, reliqui sunt 6. Numerum rectorũ internorum 6 partire per numerum laterum 5, & in quotiente habebis $1\frac{1}{5}$, hoc est quilibet angulus pentagoni regularis est æqualis vni recto, & quintæ parti vnius recti. Exempla experire in alijs quibuslibet regularibus figuris planis rectilineis, & regulam vniuersalem elice.

2 Facilitatis etiam maioris gratia, etiàm sine vsu partitionis logisticæ, si Tyro eius sit ignarus, statim se sic expediat. Numero angulorum rectorum internorum datæ regularis figuræ supponat numerum laterum, vel angulorum eiusdem figuræ, & numerus ille fractus indicabit, ac numerabit partes recti anguli, quibus æquiualet angulus datę regularis figuræ. In exemplo, datum triangulum regulare, hoc est æquilaterum, habet internos omnes æquales bis tot rectis, quot habet latera, idest 6, detractis 4, idest habet 2 rectis æquales; Numero ergo angulorum internorum rectorum 2 subscribe numerum laterum trianguli, scilicet 3 sic; $\frac{2}{3}$ Indicat, & nominat quantitatem cuiuslibet anguli in triangulo æquilatero esse duas tertias vnius recti. Sic in pentagono numero rectorum 6 suppositus numerus laterum 5, idest $\frac{6}{5}$, significat angulum pentagoni cõtinere sex quintas partes vnius recti, hoc est $1\frac{1}{5}$, vnum rectum, & vnam quintam recti, si rectum in quinq; partes diuisum fingas. In hexagono $\frac{8}{6}$, vel $1\frac{2}{6}$, vel $1\frac{1}{3}$. &c.

Mira affectio, & effectio.

3 Est verò cũ admiratione notandum quòd si facta fuerit partitio arithmetica, & quotiens habuerit numerum integrum angulorum rectorum, fractiones, quæ superfuerint in diuisione, habent superiorem numerum, qui semper est minor inferiore quatuor vnitatibus, quemadmodum in omni figura numerus rectorum internorum semper est minor quatuor vnitatibus quàm sit numerus duplicatus laterum. sic in pentagono quotiens est $1\frac{1}{5}$, in hexagono $8\frac{2}{6}$, ac sunt 1 ipso 5, & 2 ipso 6 minores quatuor vnitatibus. Sin autem lubeat fractiones ex diuisione reliquas ad minimos, ac primos numeros redigere, tunc hìc facta animaduersio deficit. sic in numero quotiente indicante quantitatem anguli $1\frac{2}{6}$, si fractionem $\frac{2}{6}$ redigas ad simpliciorem, hoc est ad $\frac{1}{3}$, tunc 1 superior non est minor ipso 3 quatuor vnitatibus.

CO-

COROLLARIVM VIII.

Cur soli anguli trianguli, quadranguli, sexanguli regularium impleant spatium ad vnum punctum.

Habes ex antedictis apertos fontes demonstrationum, quibus geometricè scias ea, quæ ex Proclo, & Pappo attulimus ad corollarium Euclidis post 15 prop. huius. Relige verba eorum Authorum, & ea exige ad hìc traditas in antecedentibus regulas cognoscendi quantitatem dati anguli regularis figuræ.

Ac præterea vide nos copiosè in nostris Apiarijs, Ap. 1. Prælibamento 1, vbi miram Apum solertiam geometricè demonstramus, &c. ne hìc eadem repetamus.

COROLLARIVM IX.

Ab eodem puncto ad eandem rectam vnica tantum perpendicularis duci potest.

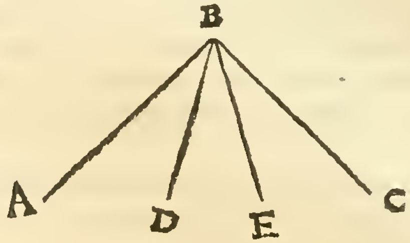


Quod demonstratum est in antecedẽtibus ab absurdo contra 15 propos. hìc etiam breuiter demonstremus ab absurdo contra 32 propos.

Igitur si duæ, vel plures deduci possunt perpendiculares ab A, fient triangula, quorum ad bases duo anguli B, C, vel C, D, erunt æquales duobus rectis propter perpendiculares AB, AC, AD. & præter duos rectos exuberabit angulus ad verticẽ A, eruntq; trianguli tres anguli maiores duobus rectis, quod est absurdum contra hanc 32 prop. Euclid.

COROLLARIVM X.

Rectum angulum in tres partes æquales demonstratiuè diuidere ex antecedentium corollar. 7.



Habes propositum problema solutum apud Pappum lib. 4 prop. 32 A quo Clauius. Nos varietatis alicuius gratia damus iuxta Vitellionem lib. 1 Optices, prop. 28. Esto angulus rectus ABC diuidendus in tres partes æquales. ad vtrumuis laterum puta AB fiat angulus ABC æqualis angulo trianguli dati, vel cõstructi æquilateri, per 23, seceturq; bifariam à lineà BD, per 9, eritq; rectus ABC diuisus in tres partes æquales, nam angulus ABE æquilateri obtinet duas tertias vnius recti, per corol. 7. antecedens; ergo reliqua pars EBC est tertia vnius recti; est verò ABD dimidium ipsius ABE, hoc est tertia vnius recti, ergo tres recti partes æquales sunt ABD, DBE, EBC.

Acuti, & obtusi angulorum tripartitio apud Pappũ.

Acutum, & obtusum angulos etiam tripartitur citatus Pappus ibidem, sed ea tripartitio excedit elementarem institutionem. Vide apud Pappum.

Nos inferius in § 11 exponemus modum perfacilem tripartiẽdi angulum rectilineum etiam non rectum.

Ali-

Aliter II.

Angulum rectum diuidere in tres partes æquales.

RElege ad 9 Proposit. § 2, num. 2, vbi eodem semidiametri interuallo diuiditur in tres partes æquales arcus quadrantis subtendens angulum rectum.

Aliter III.

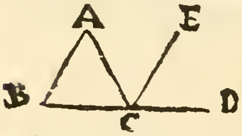
RElege § 8 ad propos. 9, & , vt ibi, simili modo interuallum arcus quadrantis subtendentis angulum rectum interpone inter 60, & 90 in circino proportionum, vbi chordæ arcuum, &c. deinde accipe interuallum inter 30, & 30, quod erit tertia pars eȩti. Vel aliter: interpone inter 60, & 60 semidiametrum, siue alterutrum latus concludentium inter se arcum quadrantis, deinde accipe interuallum inter 30, & 30. &c.

SCHOLION.

OMnes isti modi reducuntur ad quandam constructionem æquilateri, vt factum est geometricè in modo: 1. nam semidiameter est vnum latus, interuallum 30 graduum in quadrante relinquit, ad complementum graduum 90, gradus 60, quos subtendit latus hexagoni, idest semidiametri; tertium latus est & ipsa semidiameter eiusdem quadrãtis. Applica prædicta figuræ alicui à te cõstructæ iuxta primum modum trifariationis in angulo recto, vt videas veritatem in hoc Scholio prælatam.

COROLLARIVM XI.

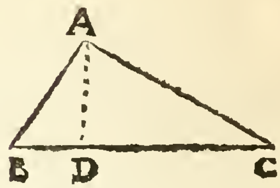
Externum angulum trianguli ſtatim ſic diuidere, vt partes ſint ęquales altera alteri duorum angulorum internorum oppoſitorum.



PAtet problema in figura Euclidis. nã ab externo ACD ſi educatur CE parallela lateri AB, pars, ſiue angulus partialis ACE eſt æqualis alterno BAC, & alter partialis ECD eſt æqualis interno ABC. &c.

COROLLARIVM XII.

Dati trianguli angulum ita diuidere, vt alterutra pars cum altero adiacentium angulorum compoſita conficiat angulum rectum.



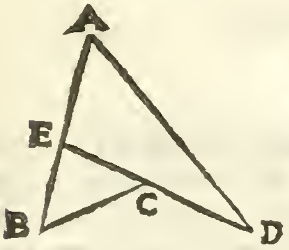
DAtum ſit triangulum ABC: ab angulo A, vel ab alio angulo diuidẽdo (ita tamen vt à diuiſione cadat recta intra triangulum) demittatur perpendicularis AD. Totalis anguli BAC pars DAC compoſita cum altero angulo adiacente ACD, itẽ altera pars BAD compoſita cum ſuo adiacente ABD conficiunt binæ angulum rectum. Nam ad D vtrinque recti ſunt, ergo reliqui duo DAC, ACD conficiunt rectum; item DAB, ABD. &c.

§.V.

PARADOXVM I.

Triangulum acidoides, siue cuspidiforme cilogonium, siue cauiangulum, & quadrilaterum habet angulum externum æqualem tribus internis, & tres internos minores duobus rectis.

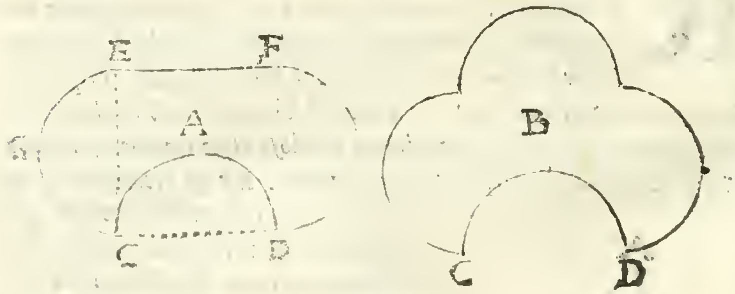
Relege quæ ex Zeonodoro, & ex Proclo attulimus ad definition. 24, 25, 26, & ad prop. 21 huius, de figuris cauiangulis in veterum geometria, vt verba inscriptionis in hac nostra propositione intelligas, nec sit quæstio de nomine, vel etiam de re. Non enim fictio nostra est, sed in Geometria reconditiore apud antiquos Philosophos Geometras patet dari eam eteroclitam speciem figurarum. Ex ijs triangulum hic cauiangulum, ac quadrilaterum esto ABCD, cuius vtrumuis laterum constituentium cauũ angulum, verb. gratia latus DC producatur rectà ad sectionem lateris AB in E, dico angulũ externum BCD esse æqualẽ tribus internis B, A, D. Nam angulus BCD externus respectu minoris trianguli BEC, est æqualis duobus internis CBE, BEC, per hanc 32 Eucl. item angulus BEC externus respectu trianguli EAD, est æqualis duobus A, & D. ergo BCD est æqualis tribus B, A, D. Quod erat demonstrandum. Dico præterea tres internos B, A, D esse minores duobus rectis. Recta enim BC, per 13 huius, facit ad C duobus rectis æquales cum rectà ED; ergo angulus BCD, vtpote pars, erit minor duobus rectis. At eidem BCD ostensi sunt æquales B, A, D; ergo sunt & ipsi minores duobus rectis.



PARADOXVM II.

Curuilineum, & mixtilineum binangula, quorum duo interni sunt æquales duobus rectis.

PLura in nostris Apiarijs, Ap.3. Progy.6, habes huiusmodi hìc proposita monstra geometrica; sed quoniam eorum aliqua supponunt aliqua è lib. 3 Eucl. ideò hìc vnam, vel alteram tantum formam exhibeo, cuius demonstratio statim pateat ex antecedentibus in hoc lib. 1.



Circa latera vel tria, vel quatuor occulti quadrilateri rectãguli ED si describantur æquales semicirculi vel tres, vel quatuor ita, vt vnus introrsum sit ad A, B, erunt cõstituta curuilineũ B, & mixtilineum è recta EF, & cæteris curuis, quorum anguli duo C, D curuilinei sunt æquales duobus rectis. Demonstrationem è primis solis principijs reuise in anterioribus vbi ante axioma 8, ex Proclo apud Clauium ostendimus angulos curuilineos æquales rectilineis. ne hìc eadem repetamus. Sic & hìc angulus EGCA æqualis est recto ECD, & alter curuilineus recto ad D.

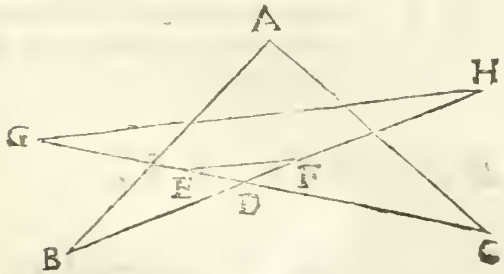
Sunt vero binangulæ hæ duæ figuræ à denominatione, & numero angulorum internorum, qui duo soli sunt ad C, & D.

PA-

PARADOXVM III.

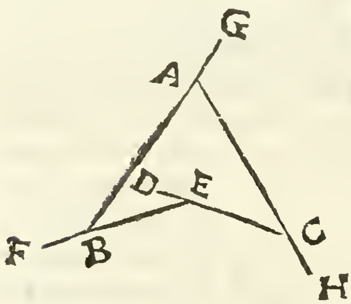
Si trianguli cauianguli duo latera cauum angulum conficientia, & introrſum producta iungantur rectà lineà, fit pentagonum, cuius quinq; anguli ſunt æquales duobus rectis.

Hoc theorema vniuerſaliſſimum eſt etiam de irregularibus pẽtagonis, & de productis rectà quantumlibet lateribus introrſum ſiue ſecantibus, ſiue non ſecantibus latera trianguli cauianguli. Sit cilogonium triangulum AB, cuius latera BD, CD cauum angulum D conficientia producta ſint introrſũ ſiue ad E, & F citra ſectionẽ laterum BA, AC, ſiue in G, & H vltra ſectionem laterum AB, AC, & iungantur EF, GH; dico quinq; angulos A, B, C, DEF, EFD, ſiue quinq; A, G, B, C, H eſſe æquales duobus rectis. Quoniam enim angulus BDG eſt externus reſpectu vtriuſq; trianguli DEF, DGH, erit, per hanc 32 Eucl. æqualis tam duobus E, F, quàm duobus G, H. Angulus vero cauus BDC, per antecedens paradoxũ, eſt æqualis tribus internis B, A, C; ergo duo GDB, BDE erunt æquales quinis B, E vel G, A, H vel F, C. At, per 13, duo GDB, BDC sũt æquales duobus rectis, ergo, & quini B, E vel G, A, H vel F, C ſunt æquales duobus rectis. Quod erat demonſtrandum.



PARADOXVM IV.

In triangulo cauiangulo, altero laterum cauum angulum conficientium introrſum tantillùm producto, quatuor interni anguli ſunt æquales duobus rectis.



IN triangulo cauiangulo ABEC productum ſit introrſum ad D latus CE, dico quatuor internos DEB, B, A, C eſſe æquales duobus rectis. Patet, quia per antecedentia, BEC eſt æqualis tribus B, A, C; & BED eſt complementum duorum rectorum ad E. ergo. &c.

PARADOXVM V.

Trianguli cauianguli productis ad eaſdem partes lateribus, anguli externi ſimul ſumpti ſunt æquales ſex rectis.

IN vſitatis triãgulis, & planis alijs rectilineis figuris, vt habes è corollarijs antecedentibus, omnes externi ſimul ſumpti ſunt æquales tantũ quatuor rectis; at in cauiangulo Triangulo productis, vt vides, lateribus, dico externos ABF, BEC, ECH, CAG eſſe æquales ſex rectis. Nam, per 13, ad puncta B, E, C, A sũt bini æquales duobus rectis, ideſt ſimul ſumpti conficiunt octo rectos; detractis ergo quatuor internis ABE, BED, ECA, CAB, qui, per antecedens paradoxum, ſunt æquales duobus rectis, remanent externi quatuor æquales ſex rectis. Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

SCHOLION.

Paradoxum 5 antecedens vniuersalius. hoc est: omnium cauiangularum rectilinearum figurarum externi anguli simul sumpti sunt æquales sex rectis. Et alia vniuersalia circa eas figuras.

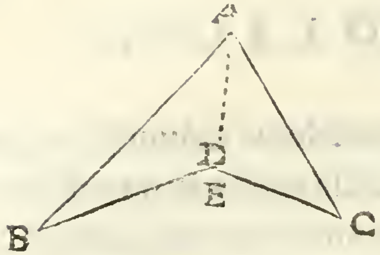
IN Apiar. 3. nostro, progym. 6. plura paradoxa demonstrauimus circa figuras cauiangulas non solum triangulares, sed & plurangulares. Et quasdam proprietates earum ostendimus non solum circa triangulas, sed etiam vniuersaliter circa multiangulas; qualis est hìc affectio indicata de omnibus angulis, qui sunt æquales sex rectis non solùm in triangulo, sed & in multiangula alia quauis figurà cauiangula. Hic tamen, ne lõgius diuagemur, continuimus nos circa figuras triangulas cauiangulas, quatenus habent eteroclita aliqua, & paradoxa, præter ea quę vulgata sunt in triangulis vsitatis ex hac 32 propos. & corollarijs ex ea. Plura igitur vide in citato Apiario, in primis cautiones, & exceptiones, quas ibi ponimus, vt videant Geometrici Tyrones quemadmodum hìc anteposita, & ibi alia exposita paradoxa cilogoniarum figurarum nihil incomodent Euclidianæ huic propos. 32.

Plura, & vniuersalicra circa cilogonias figuras in Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ.

PARADOXVM VI.

Angulus rectilineus maior duobus, aut tribus rectis confirmatus.

QVæ in antecedẽtibus probauimus vbi versati sumus circa definitiones angulorũ, & in ijs paradoxorũ, quæ exposuimus de angulo rectilineo maiore duobus, ac tribus rectis, hìc è corollarijs huius 32 propos. Eucl confirma-



mare statuimus. Sit ergo cauiangulum triangulum ABEC, dico non solum externum, citimum, & vt ita dicam, quasi cõcauum BEC, sed etiam internum, extimum, &, vt ita dicam, quasi conuexum BEC, esse & angulum, & maiorem duobus (aliquando etiam tribus) rectis. Iungatur enim recta à vertice A ad punctum idem indicatum à duabus literis alterà citima E, alterà extimà D. quoniam rectilineum ABEC est quadrilaterum, ergo potest resolui in simpliciores duas figuras rectilineas, nempe in duo trilatera, siue triangula ADB, ADC, iuxta scholia communia ad hanc 32 prop. Eucl. At è corollarijs antecedentibus, & Schol. ad eandem 32, omnis figura rectilinea habet angulos internos æquales bis tot rectis quot sunt triangula, in quæ potest resolui, ergo quadrilaterũ ABEC habet internos angulos æquales quatuor rectis, quandoquidem resoluitur in duo triangula. Per antecedentia paradoxa tres interni EBA, BAC, ACE sunt minores duobus rectis, ergo reliqui anguli interni, à quibus fit quantitas æqualis quatuor rectis, sunt duo partiales interni BDA, ADC, qui cùm conficiant vnum totalem BDC, ergo & ipse ingreditur censum angulorum, & est maior duobus rectis; quandoquidem in duos diuiditur, qui additi tribus B, A, C minoribus duobus rectis conficiunt in duobus partialibus triangulis omnes simul angulos æquales quatuor rectis.

2 *Confirmatur assertio de angulo interiore, ac extimo BDC. Ne scilicet effugium affectes, & dicas: licet duo ADC, ADB sint seorsim anguli, non tamen simul additi conficiunt vnum totalem BDC, quia, licet inclinationes ad punctum D rectarum CD, AD, BD contineant vtrinq; ad D singulæ seorsim angulum obtusum, non tamen excedunt duos rectos, at simul additæ in D excedunt duos rectos, quod spatium est extra spatium angulis præscriptum. Contra te, ac pro nobis sunt eæ figuræ quadrilateræ, & anguli dimitio. nam si quis concedat (nec potest negari etiam sensui) quadrilaterum esse ex quatuor rectis AB, BD, DC, CA, ac neget deinde angulum esse interiorem BDC, sibi ipsi contradicit, & negatione destruit suppositum. Si enim eius quadrilateri duo latera sũt recta*

ctæ BD, DC, ergo non ſunt in directum in D, hoc eſt non conficiunt vnam rectam lineam; ergo duarum eſt inclinatio, vel ſectio in D: ergo angulus vtrinq; conficitur in D. Nam ſi affirmes fieri angulum quidem BEC ex inclinatione citima E, ac proinde (iuxta definitionem anguli, qui dicitur inclinatio duarum. &c.) eſſe angulū BEC, caſdem ob cauſas & ego affirmo eſſe etiam angulum interiorem BDC. eſt enim inclinatio duarum BD, CD tam ad D, quam ad E punctum commune, & indiuiſibile; alioquin affirmes impoſſibile, ſcilicet rectas eaſdem BE, CE ſimul, & ſemel eſſe ad idem punctum inclinatas, & non eſſe inclinatas, nempè eſſe inclinatas dum faciunt angulum extimum BEC, non eſſe inclinatas dum negas ab ijs fieri angulum interiorem BDC. Igitur demōſtratiuè, & à contradictorijs, & ab ipſa anguli definitione, & eſſentià conſtat ſibi hoc paradoxum de angulo rectilineo maiore duobus rectis.

Paradoxū de angulo rectilineo maiore duobus rectis demōſtratū ab eſſentia anguli.

Erit verò angulus internus BDC maior etiam tribus rectis, ſi angulus citimus BEC ſit minor recto, iuxtà deducta ex prop. 13, & è coroll. prop. 15.

Relege, & huc appone, vel hæc appone ijs, quæ circa hoc paradoxum habes ad definitiones angulorum.

Vſus,

Vſus, & deductiones ex 32 propoſ. Eucl.

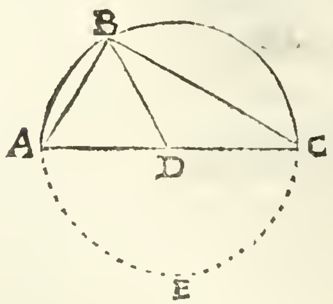
§. VI.

THEOREMA.

Angulus in ſemicirculo rectus eſt; aliter, quàm apud Eucl. in lib. 3.

1 *QVod non ſemel polliciti ſumus in aliquibus antecedẽtium propoſitionum praxibus hìc præſtabimus, nẽpè demonſtrationem primæ partis eius propoſitionis, quæ eſt apud Euclidem 32 lib. 3, qua nos in hoc primo libro egemus, vt conſtent Tyronibus demonſtratiuè aliqua magni momenti tum in antecedentibus, tum in ſequentibus, præſertim ad 47 huius lib. 1. Nec verò Tyrones fraudandi ſunt tã vtili propoſitione, cuius ſcientiam poſſunt indipiſci hoc primùm in loco ad hãc 32 propoſ. Eucl. Breuiter verò propoſitum hìc theorema expediemus, ac aliter (vt aliquid noui diſcant Tyrones) quã Euclides lib. 3. Qui in duplici demonſtratione vtitur angulis externis; nos vtemur tantum poſteriore parte huius 32 propoſit. eritq; noſtra demõſtratio aptiſſima loco perobſcuro Ariſt. explicando.*

Demõſtratio noſtra explicando Ariſtotele aptiſſima.



Suppono definitionem 8 ante lib. 3 Eucl. ex qua patet in circuli portione, hoc eſt in appoſitâ fig. angulũ ABC dici eſſe in ſemicirculo, dũ in dimidiæ portionis circuli (hoc eſt in ſemicirculi ABC) circumferẽtiâ à pun-

à puncto quolibet sumpto B ductæ sunt duæ BA, BC ad terminos A, C basis portionis semicircularis.

Sit igitur in semicirculo angulus ABC, quem affirmo esse rectum. Ex medio enim puncto ipsius AC, hoc est, iuxta defin. 17, & 18 ante hunc lib. 1. ex centro D in diametro educatur DB. Quoniã in duobus triangulis ADB, BDC latera AD, DB, DC sunt æqualia, hoc est æquales semidiametri à centro D ad circumferentiam, ergo, per 5 prop. lib. 1. erunt anguli ad bases sub lateribus æqualibus æquales inter se DAB, ABD, item DBC, BCD. ergo totus ABC est æqualis duobus BAD, DCB, per 1 axio. Sed trianguli ABC tres anguli sunt æquales duobus rectis ex hac 32 Eucl. ergo duo recti sunt diuisi in duo dimidia, siue in duo æqualia, quorum alterum continet duos A, & C, alterũ verò continet vnum ABC. Cum ergo ABC sit dimidium duorum rectorum, est vnus rectus, &c.

§. VII.

SCHOLION

De theorematibus localibus, & Praxis normæ examinandæ.

1 T*Heorema proximè antecedens vnum est e localibus apud Philosophos Geometras. Vide nos inferius ad 35 propositionem in loco, vbi Euclides primum specimen habet localis Theorematis. Mirũ est in toto loco, siue spatio peripheriæ semicircularis punctum omne id habere, vt ad id angulus semper sit rectus, &c.*

Norma geometricum examen.

2 Habes vnde normæ angulum rectum examines, si nempè eius latera ducas per extrema A, C donec vertex, siue punctum anguli normalis congruat alicui puncto in peripheria; si enim, tradentibus normæ lateribus extrema A, B, numquam vertex anguli normalis potest congruere cum vllo peripheriæ puncto, non erit angulus normæ rectus, sed vel maior, vel minor recto. Quod patebit suo loco. Hic interim sat esto scire demonstratiuè geometricè ex antec. theor. non esse, vel esse rectum.

§.VIII.

COROLLARIA Geometrica.

In triãgulo angulus æquiles duobus reliquis est rectus.

In triãgulo duo anguli æquales tertio cõficiãt summã vnius recti.

1 V*Ides in antecedenti demõstratione latère id, quod aliqui educunt pro corollario.* Si vnus trium angulorum in triangulo sit æqualis reliquis duobus angulis, rectus est. *&* : si duo anguli vnius trianguli sint æquales tertio, conficiunt summam vnius recti. *ex demonstratione § 6 antec.*

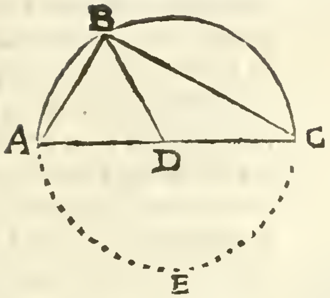
2 *Corollarij loco ex antecedentibus colligi potest id theorema, quod apud alios demonstratur ab absurdo contra 25 huius, nempè*: In triangulo rectangulo, si basis, siue latus oppositum ipsi angulo recto bifariam diuidatur, circulus descriptus circa id latus trãsibit per verticem anguli recti. *Applica verba figuræ demonstrationis antecedentis, & facilem hic geometricam solertiam exerce, mi Tyro.*

§.IX.

Aristotelis duo loca perobscura ex antecedentibus explicata.

In Geometria fiunt demõstrationes deducendo in actũ quod est in potẽtia.

P*Rimus locus est in lib. 9. metaph. cap. 6. vbi altero exemplo geometrico (præter id quod iam explicauimus in antecedentibus ad hanc 32 propos. Eucl) ostendit a Philosophis Geometricis demonstrationes fieri educendo in actum quæ latebant in potentiâ, & cum obscura breuitate sic scribit:* Cur in semicirculo vniuersaliter rectus? quia si tres æquales, & qui basis est duo, & qui ex medio supra stat rectus, videnti manifestum erit ei, qui illud sciat. *Hoc est in figura nostra. Quid est, quod ex potẽtia eductum in actum efficit vt Philosopho Geometræ statim pateat cur angulus ABC ad semicircularis peripheriæ quodlibet pũctum constitutus sit rectus? scilicet educta recta DB. Hic nos ex nostrà*



noſtrà antecedenti demonſtratione verba Philoſophi conſequentia aliter, quàm aliqui alij (quibus licebit & hæc apponere) explicamus. ſi tres æquales. *cùm enim ſint tres anguli triãguli ABC æquales duobus rectis.* & quæ baſis eſt duo, & quę ex medio ſupra ſtat recta. &c. *hoc eſt, & cum trianguli ABC baſis AC, vnà cum rectà DB eductà ex medio D, quæ ſtat ſupra AC, tres inquam DA, DB, DC conficiant duo triangula minora iſoſcelia DAB, DBC, quorum anguli ad baſes ſunt æquales, ſtatim apparet geometricè ſcienti tres diuiſos eſſe in duo dimidia, quorum alterum eſt ABC, iuxta nuper à nobis demonſtrata.*

2 *Alter Ariſtotelis locus eſt lib. 2. poſter. Analyt. capite 6. in cuius initio habet aliqua perobſcura ijs, qui noſtram demonſtrationem antecedentem non norunt. Quæ probat angulum in ſemicirculo eſſe rectum, quia ABC eſt dimidium duorum rectorum. Quam cauſam appellat Ariſtoteles materialem in exemplo, & materià mathematicà. Dimidium enim, & partes in quantitate ſunt materia, ex qua conflatur totum. &c. Itaq; ait Philoſophus in eo exemplo Geometricæ philoſophiæ de cauſa materiali:* propter quid, aut quo exiſtente (*tamquam materia*) eſt rectus in ſemicirculo? *mox :* duorum namq; rectorum dimidium eſt. *&c.*

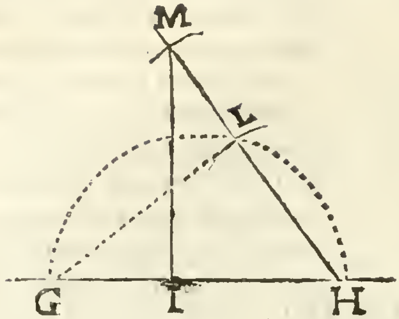
Cauſa materialis in Geometria

§. X.

SCHOLION.

Demonſtratio praxis ad 11 prop. pro excitandà perpendiculari, tum non vulgatæ è Villalpando, tum etiam vulgatæ, & per angulum in ſemicirculo.

D*Emonſtratio valebit & pro praxi ex Villalpando, & pro vſitata per angulum in ſemicirculo, vt præmonitum eſt in*



inscriptione. Suppono quæ iā præceßerunt in constructione figuræ, quam hic explico traductam ex § 2 ad 11 propos. Dispiciat Tyro geometricus duo triangula GLH, IMH. Per constructionem æquale factum est latus HL lateri HI, item latus HG lateri HM; & angulus ad H est communis vtriq; triangulo, ergo, per 4, sunt æquales bases GL, MI, & anguli, quibus æqualia latera subtenduntur, sunt æquales, nempe angulus ad M angulo ad G, & angulus L angulo I. At L est rectus in semicirculo, per paullo ante demonstrata in theorem. &c. ergo & angulus ad I est rectus; ergo IM est perpendicularis, iuxta 10 defin.

In praxi verò vsitatà, per quam fit ad datum punctum recta angulus in semicirculo, statim patet demonstratio. &c.

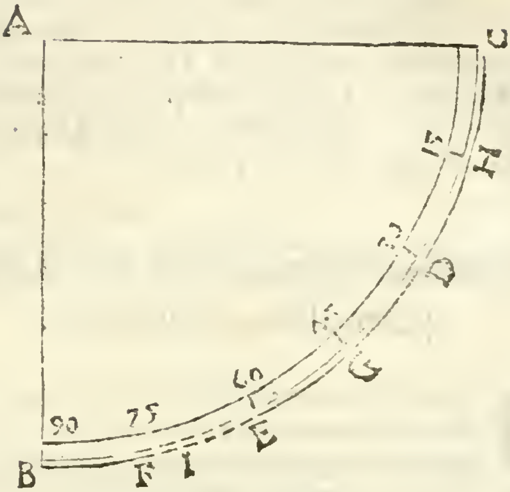
SCHOLIA Lemmatica.

I.

Quanti momenti sit in vniuersa Philosophia mathematica trifariatio in partes æquales anguli acuti.

IN hunc locum transtulimus solutionem celeberrimi problematis de trif. ang. acuti, quia in eius demonstratione supponitur theorema de angulo recto in semicirculo, quod in antecedenti § 6 à nobis est demonstratū sine necessitate lib. 3.

Quoniam vero vniuersæ Astronomiæ, atq; etiam Gnomonicæ operationes circa cælestia vel per instrumenta mechanica, vel per geometricas circulares figuras in pagina, supponūt diuisiones circulorum in particulas æquales ritè factas, hoc est (ceu, qui ritè geometritè philosophantur, exquirunt) geometricè demonstratas; atq; (vt vidisti ad 9 huius § 2, & 3) diuisio circuli fit per bifaria-



riationes, & trifariationes, & diuisiones in quinq; partes æquales, quæ diuisiones demonstratæ sunt geometricè omnes (vt indicatum habes ad cit. §§) præter postremam trifariationem spatij, siue anguli acuti sub FI; nos qui conamur geometricis hisce elementis, quasi firmissimis fundamentis, inconcussè fulcire, ac firmare moles ingentes, atq; admirandas, quibus Mathematici Philosophi ad altissima efferuntur, nullo modo patiemur hanc lacunam in diuisione circuli, quin eam geometrica, & facillima demonstratione impleamus.

Præterea in Philosophià machinaria, atq; in vniuersæ Geometriæ theorijs, ac praxibus, cùm sæpe sit opus angulos non solum rectos, sed obtusos, & acutos eleuationum, inclinationum, ac multiformium figurarum diuidere demonstratiuè non solum in tres, sed etiam in alterius cuiuscunq; proportionis partes æquales; cùm etiam pro militaris, & ciuilis Architecturæ, & Geometricis alijs operationibus necesse plerumq; sit quamcumq; regularem figuram describere, siue circulo inscribere; at verò figurarum vniuersalē eam descriptionem, & eam anguli dati in quascumq;, & quotcūq; partes adhuc desideratam geometricè demonstratam diuisionem cùm nos (vt paullo post hic inferius videbis, & ad 9 prop. lib. 6) deducamus è demonstrata trifariatione acuti anguli in partes æquales facta in circulo, proptereà hic eam geometricè demonstrandam

dam

dam suscepimus; vt & præterea videas, ingenuè lector, theoremata, & problemata geometrica, quæ in hoc Ærario apud nos habes, non solum se ipsis parere scientiam mirè iucundam, sed etiam plurifariè, atq; vniuersè vtilissimam. Vide etiam consectarium vniuersale vtilitatum in vniuersa Geometria è trifariatione anguli, ad propos. 13 lib. 6 post inuentionem duarum mediarum proportionalium. Vide & coroll. in seq. § 13.

II.

Hypothesis de geometricè ritè facta descriptione lineæ conchoidis.

Qvamuis linearum mixtarum descriptiones apud Philosophos Geometras vt plurimum fiant vel punctuatim, vel instrumentis parum certis, & operosioribus, ac propterea merito ab Antiquis Geometricis Philosophis reijciātur à firmitate demōstrationis in problematibus geometricè peragēdis; tamen mixta linea à Nicomede inuēta, & conchoïs per analogiam, &c. appellata (cuius vsus præcipuus est pro inuentione duarum mediarum proportionalium, & diuisione anguli dati in tres partes æquales) ab Antiquis admissa est in geometricam demonstrationem, quia non solum per puncta, sed etiam continuato ductu per instrumentum facillimum, ac non minus firmum, ac certum, quam sint vsitata circinus, norma, regula, &c. describitur. Quibus conditionibus, & firmamentis cum careant aliæ mixtæ, itq; in primis Dinostrati mixta quadratrix, iure reiecta est ab Antiquis ab vsu problematum geometricè demonstratorum, velut à diuisione anguli, circuli, &c. vt videbis apud nos ad prop. 9. lib. 6.

Eius formam, descriptionem geometricam, & organicam, demonstrationē, &c. vide apud Eutocium in cōmentar. in 2. lib. Archim. de sphæra, & cylindro. Apud Pappum lib. 4. post propos. 22, &c. atq; apud alios recentiores. Vide etiam nos in Apiar. 3, Progym. 1. ac prætereà in huius Ærarij tomo 2 ad propos. 9, & 13 lib. 6. vbi etiā sine conchoide, atq; aliâ mixta lineâ, geometricè id peragimus, quod veteres per conchoiden peregerunt, vt etiam paullo post hic inferius videbis. Prædicta circa mixtam eam lineam Nichomedis hic supponimus, quæ hic non sunt iteranda, dum ea habes etiam apud nos in cit. Ap. 3.

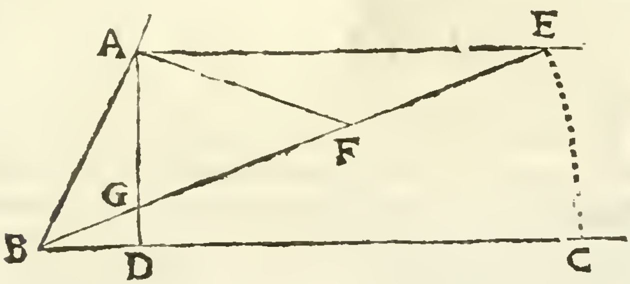
Pap-

Pappus lib. 4. cit. Instrumentaliter posse lineam (*scilicet eam mixtam*) describi (*mox:*) Nicomedes ipse demonstrauit, & nos in Analemma Diodori, cum vellemus angulũ tripartito secare, prædicta linea vsi sumus. *Non extat ea Pappi tripartitio anguli per conchoiden. Accipe hic eam à nobis inferius ex Clauio nostro l. 8 Geom. pract. Propos. 25. Problema id idem Pappus soluit in propos. 32 cit. lib. 4 non per conchoiden, licet eàdem ferè formà demonstrationis, quà Clauius, sed lemma à Pappo suppositum obscurius est, & difficilius, quam quod hic supponitur à nobis, & à Clauio, qui etiam facilius obtusum diuidit, quàm Pappus.*

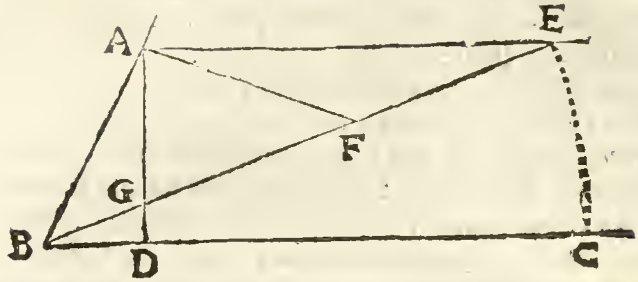
§. XI.

Angulum datum rectilineum in tres æquales partes partiri.

PRoblema hoc veteres Geometras diu, multumq; exagitauit, neq; ab vllo ad hanc vsque diem geometricè est solutum. Pappus Alexandrinus inter alios illud soluere conatus est per descriptionem hyperboles. Nos idem absoluemus per lineam Conchoideos, quam lib. 6. propos. 15. huius ex Nicomede descripsimus, hoc modo.



Sit datus angulus acutus ABC: Demissa autem ex quouis puncto A ad BC perpendiculari AD, sumatur ipsius AB dupla DC; Et polo B, interuallo autem DC, describatur linea Conchoideos CE, secans rectam AE ipsi BC ductam parallelam in E, ducaturque recta BE. Dico angulum CBE esse tertiam partem dati anguli



li ABC, hoc est angulum ABE duplum esse anguli CBE, adeo vt, diuiso angulo ABE bifariam, totus angulus ABC sectus sit in tres partes æquales. Quoniam enim ex descriptione Conchoideos, recta GE ipsi DC æqualis est, ac proinde ipsius AB dupla; si secetur bifariã in F, erit vtraq; semissis ipsi AB æqualis. a Quia verò circulus ex F circa GE descriptus transit per angulũ rectum GAE, erit quoq; ducta FA vtriq; semissi FE, FG, ideoq; & ipsi AB, æqualis. b Igitur tam anguli FAE, FEA, quam AFB, ABF æquales erunt. c Est autem externus AFB duobus internis FAE, FEA æqualis: ideoq; ipsius FEA duplus. Igitur & ABF eiusdem FEA, hoc est alterni CBE, duplus erit.

a *sch.* 3.

b 5. *pri.*

c 29. *pri.*

Si angulus datus rectus est, diuidatur in tres æquales angulos, vt in scholio propos. 32. lib. 1. Euclid. tradimus.

Si vero est obtusus, secabimus eum bifariam, & semissem alterutrum in tres partes æquales, vt docuimus hoc loco. Nam duæ partes tertiæ illius semissis efficient propositi anguli obtusi tertiam partem, vt perspicuum est.

SCHOLION I.

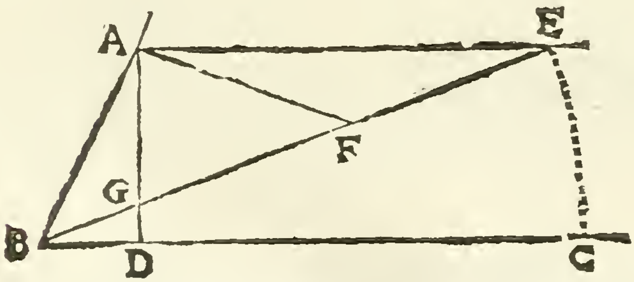
QVod pertinet ad Schol. citat. à Clauio ad 31 tertij, ne turbetur Tyro, quasi hic supponatur aliquid è lib. 3 nondum cognitum Tyroni versanti in lib. 1, ac proinde non tradi hic perfectam cognitionem, ac scientiam proposit. problematis. Quod enim ex F circa GE ductus semicirculus transeat per angulum rectum GAE, corollarium est probati hic paullo ante theorematis de angulo recto in semicirculo, vt habes in anteced. § 8. coroll. 2. Si enim triangulum GAE est rectangulum, & opposita angulo recto basis GE sit diameter, ergo (ducta semiperipheria) erit in semicirculo, ad punctum A semiperipheriæ, angulus rectus. &c.

§. XII.

§.XII.

SCHOLION II.

Etiam sine ductu cōchoideos, vel vllius mixtæ lineæ licet angulum rectilineum diuidere in tres partes æquales, non sine Veterum exemplo.



SI nimirum circino accipias interuallum DC, & (si velis) fixa acu perpēdiculariter in B, normæ, vel regulæ latus aptes ad B, & quasi circa polū regulam voluas donec secus latus GE altera circini cuspis punctū aliquod in ipsa AD tāgat, velut in G, dum simul, ac semel altera circini cuspis aliquod punctum tangit in ipsa AE, velut in E.

Vel sectà papyro secundum rectam, eiusq; orà aptata ad BDC, puncto gemino ad D, & C signabis extremā papyri oram congruentem ipsi BC. Mox radente, ac voluente se papyro circa polum B, puncta signata transferas ex D in G punctum ipsius DA, & ex C in E punctum ipsius AE. Sic enim aßequèris per simplicem, & facilem translationem eiusdem interualli, vel à circino (velut assolet in alijs operationibus geometricis, dum aliquod interuallum circino transfertur in lineam eo secandam) vel papyro id, quod pluribus ambagibus, licet certis, fieret per constructionem instrumen-

ti Nicomedei, & per ductum, licet continuatum, mixtæ lineæ conchoideos.

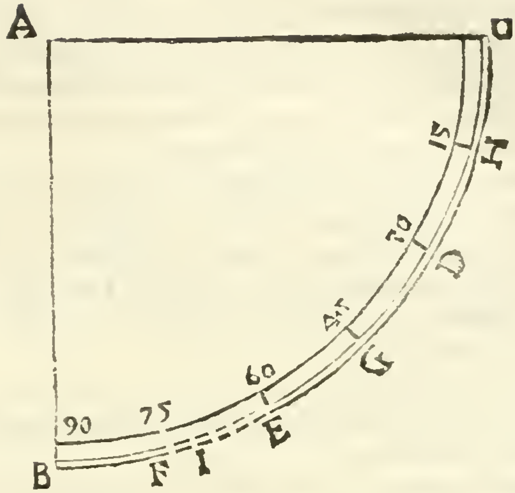
Nam quòd alij aliqui docent vel plures lineas à B ducere inter CE, vel per puncta signant ipsam CE, res est quæ à Veteribus, & exactioribus Geometris reijcitur à demōstratione geometricà, propter incertitudinem, & aberrationem punctorum à vero ductu cōtinuato conchilis lineæ. Vt prædictū est in Schol. 2 lemmatico ante hunc § 12, & videbis amplius ad 9 Sexti.

Modum hunc nostrum sine conchili transferendi spatium DC in GE ne quispiam contemnendum existimet, apponam duorum præcipuorum in Geometricis Philosophorum sententiam, in quam incidisse me gauisus sum postquam hæc scripseram. eorum verba figuræ hìc appositæ aptabo. Igitur Pappus prop. 23, lib. 4: Quidam verò commoditatis causa aptantes regulam ad punctum B, ipsam vsq, eò commouent quoad quæ interijcitur media inter AD rectā, & lineam EC experientia fiat datæ rectæ lineæ DC æqualis. *Commandinus ad ea verba:* Vide ne legendum sit inter AD rectam, & lineam AE. Illud enim hoc pacto absq; lineà cōchoide perfici potest. *Quod habes à nobis in antecedentibus præ[illegible]itum.*

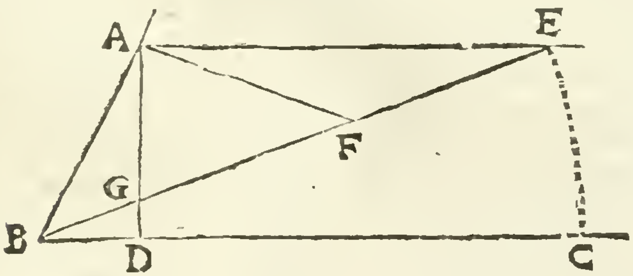
§. XIII.

Corollaria confirmantia diuisiones circuli Astronomicam, anguli cuiuscunq; rectilinei Geometricam in quot, & quaslibet partes, prolatis exemplis, & praxibus diuisorijs.

SIue igitur continuato organico ductu conchilem ducas, siue sine cōchili prędicto à nobis modo opereris, habes geometricè demonstratam tripartitionem in æqualia rectilinei anguli etiam acuti, & obtusi, atq; ex eo confirmatā demonstratiuè diuisionē circuli pro vniuersæ Astronomiæ operationibus, atq; aliarum scientiarum, de quibus prædictum est in Schol. lemmatico primo. Itaq; (ad praxim in exemplo) diuisurus spatium FI in tres gradus, confice seorsim angulum æqualem angulo subtēso à basi FI, eiusq;



iusq; anguli curuum arcellum ipsi F I æqualem diuide, applicando constructionem, quam habes hìc in fig. demonstrationis § 11 antec. angulus enim in eà figura, qui est A B C, est in quadrante pro angu-



lo F A I sub imaginatis duabus rectis A F, A I. Atq; à puncto imaginatæ A I versus A demittenda est perpendicularis ad imaginatam A F, vt in altera hìc figura factum est ex A in D. &c. Proportione perge, & applica cætera, mi Tyro, ne prouectiores nostram pro te diligentiam, & manuductionem circa peculiaria quasi nimiam contemnant.

Ex demonstrata porrò hac acuti anguli tripartitione pro Astronomica circuli diuisione, & ex traductis chordis graduum vnius quadrantis in rectam geminatam, & delineatam in circino proportio-

num prodit (vt prædictum est ad 9, & 10 prop.) diuisio anguli cuiuslibet rectilinei non solum in tres, sed etiã in quotlibet, & cuiuslibet inter se proportionis partes. Nec est quod iure possit opponi, præsertim supposita 4 propos. lib 6, qua nituntur omnes eius circini operationes, vt patebit melius in loco ad eam propositionem, atq; etiam, sine circino proportionum, ad 9 sexti § 13. At enim —

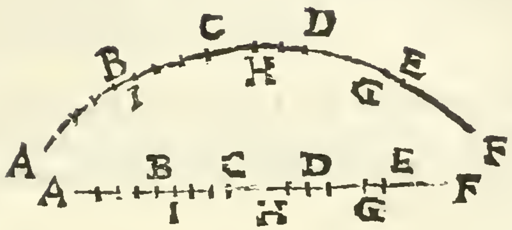
— Quì diuidas (opponat, finge, Tyro quispiam) datum angulum rectum in 7 partes? cùm numerus graduum quadrantis in circinum proportionum translatus, nempe 90, non sit diuisibilis per 7? & cùm 7 in 12 traductum non attingat 90, sed deficiat à 90, & producat 84, 7 vero in 13 excedat, & producat 91? Præterea quì diuidas exiguum gradum in 7 particulas?

Angulum vero obtusum, nempe subtensum arcu excedente varijs numeris numerum 90 quadrantis, quonam pacto diuidas per numerum quadrantis ex circino istoc?

2 *Respondeo profiteri me ex antedictis prorsus geometricam trifariationem dati anguli rectilinei, & ex eà completam prorsus geometricam diuisionem circuli, & quadrantis; at circulo præcisè geometricè diuiso, & in instrumentum partium traducto ad quaslibet alias organicas diuisiones, non consequi, nec me profiteri diuisiones eas organicas omnes prorsus fieri ab eo instrumento semper sine vlla physica oculorum æstimatione, quæ tamen nihil incommodet operationibus, quibus inseruit circinus proportionum in varijs artibus, & partibus Mathematicæ philosophiæ; quemadmodum Archimedes ad vsus mechanicos tradidit proportionem diametri cum peripheria esse trium diametrorum cum vna ferè septima diametri parte, scilicet accepta per æstimationem, &c. Sic ergo in exemplo peculiari diuisionis anguli recti, idest grad. 90 per 7, peruenitur ad 84, & reliquorum 6 graduum, vsq; ad 90, accipienda est pars septima per physicam diuisionem, & organicam operationem. Sunt tamen in quadrante plures alij numeri, qui præcisam septifariationem admittunt, vt videbis ad 9 propos. lib. 6. § 10, & in fine § 11.*

Diuisio minimi anguli in quotlibet partes æquales.

3 *Diuisio vero exigui arcus, velut vnius gradus in septem partes si in circino proportionum patiatur aliquam difficultatem prope centrum L (quæ tamen nulla erit in circino æreo, cuius vtraque linea LM, LN sit exactè diuisa etiam prope L) habes extra circinum proportionum remedium, & paradoxicum compendium geometricum in antecedentibus, scilicet in § 5 ad 10 propos. huius. Nam gradus ille, siue arcellus in 7 diuidendus seorsim in pagina signandus erit, ceu vides in po-*



posita figura arcellum A B, cui addendus erit arcus septem gradum, vt in figura est additus arcus 4 partium æqualium ipsi A B vsq; ad F. Deinde totus arcus A F sic auctus, & aptus diuisioni, diuidendus est, per antecedentia è circino proportionum, in 7 partes æquales. Tum cætera proportione peragenda sunt, ceu habes in cit. § 5 ad propos. 10.

4 Angulum etiam obtusum diuides in partes lubitas è circino proportionum, præter alios modos, etiam facilè sic.

Finge anguli obtusi arcum esse graduum 120, ac diuidendum in 3 partes. Accipe interuallum arcus quadrantis, scilicet graduum 90, illudq; interpone inter 90, & 90 numeros in circino proportionum; siue, iuxta dicta in § 8 ad 9 propos. hu. arcus dati semidiametrum interpone inter 60, & 60. Et quoniam diuisis 120 gradibus per 3, proueniunt pro tertia parte 40; immota diductione circini LMN (factà per interpositionem semidiametri arcus 120 inter 60, & 60) accipe interuallum inter 40, & 40, eoq; interuallo diuisus arcus 120 erit trifariatus in tres partes æquales, hoc est, angulus obtusus, excedens gradus 90 quadrãtis, erit diuisus è circino, in quo non sint nisi gradus 90. Applica verba hic dicta operationi, ne nos hic figuras multiplicemus. Atq; hoc exemplo facies diuisionem proportione in alias quascunque partes anguli obtusi.

Diuisio anguli obtusi in quotlibet partes, &c.

Quapropter non est, mi Tyro, quod dubites de facillima cuiuscunque anguli rectilinei quantumuis vel exigui, vel magni, acuti,

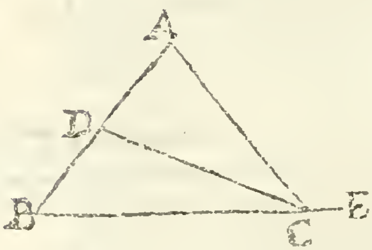
ti, obtusi diuisione in quotlibet partes æquales; quatenus tamen patiuntur materia, & quantitas physica, & operatio organica geometricam, & idealem diuisionem. neq; enim si pars quantitatis quasi atoma proponatur diuidenda, nec propter quasi insensibilem quantitatem subire possit physicam diuisionem, id imputandum est geometricæ, sed physicæ ineptitudini, dum geometricam demonstratam operationem etiam abstractam à materia inertia Philosophus Geometra securè tuetur.

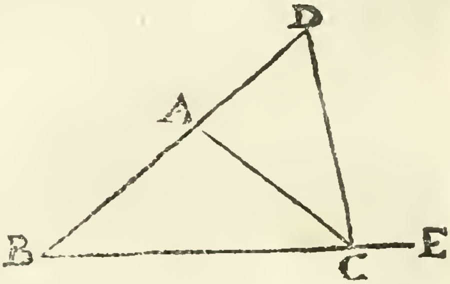
Vide ad proposit. 9. lib. 6. in 2 To. Aerar. reliqua, & complementum spectantium ad prorsus geometricam hanc diuisionem dati anguli rectilinei in quotlibet partes, &c. & ad inscriptionem cuiuscunque regularis figuræ in circulo.

SCHOLION III.

In supple. Geom. propos. 8. & 9.

Francisci Vietæ propositio lemmatica pro trifariatione dati anguli.





SI fuerit triangulum æquicrurum, & à basis termino ducatur ad crus linea recta ipsi cruri æqualis, angulus exterior factus à base, & ea, quæ ducitur è basis termino, triplus est vtriusque angulorum, qui sunt ad basim æquicruri.

Sit triangulum ABC habens AB, AC crura æqualia; & ab angulo ACB ducatur ad crus AB (idcirco si opus est continuandum) recta CD ipsi cruri AB, vel AC æqualis, & producatur BC in E. Dico angulum DCE esse triplum anguli ACB, seu ABC.

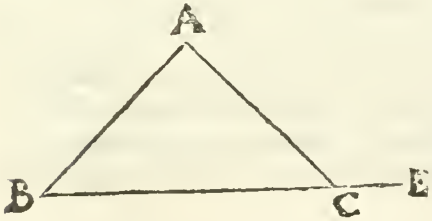
Quoniam enim æquicrura triangula sunt BAC, DCA, ideo angulus ACB angulo ABC est æqualis, & angulus ADC æqualis

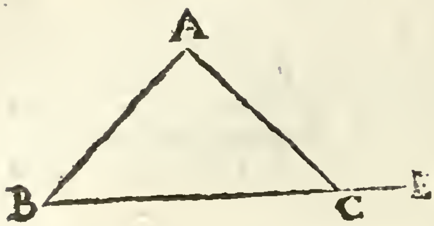
lis angulo DAC. Itaque qualium partium angulus ACB, vel ABC est vna, talibus duabus partibus excedit duos rectos angulus BAC, cuius exteriori æquatur angulus BDC. Talium igitur partium est duarum angulus BDC. Ex angulo autem DBC, & angulo BDC compositus est angulus DCE. Quare angulus DCE est earundem partium trium. Est igitur angulus DCE triplus anguli ACB, seu ABC. Quod erat ostendendum.

SCHOLIA
ad antec. lemma.

1 *HAec propositio, siue lẽma Vietanum est Corollarium ex antecedentibus apud nos. Nam si fingas in figura § 12. antecedentis rectam EA in directum productam ad partes A etiam vltra A, angulus exterior qui fieret ex producta ad A, & ex AB est triplus anguli FEA isoscelis AFE, in cuius latus productum EF in B educta est ab A extremitate basis recta AB æqualis vni laterum AF, iuxta conditiones lemmatis Vietani; quia inter parallelas AE, BC alterni sunt æquales AEB, EBD, item CBA, & angulus sub BA, & sub productà parellela EA ad partes A. Est vero ostensus in anteced. apud nos angulus ABD triplus anguli GBD.*

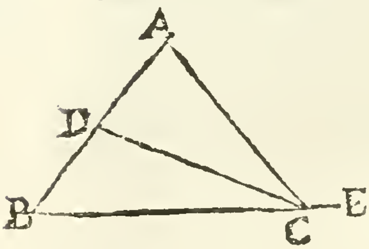
2 *Exempla in figuris Vietæ sunt in isoscelibus acutangulis, & obtusangulis. quid dicit de isoscele rectangulo? A cuius basis extremo educi non potest recta æqualis vni laterum incidens in latus productum, nisi coincidat in latus rectum angulum continens? Ab extremo enim C educta æqualis ipsi CA continenti angulum rectum CAB cum altero latere æquali AB, non potest non coincidere cum ipsa CA, quia angulus rectus non facit inclinationem lateris BA vel infra A, vel supra A. si angulus esset acutus, latus AB accederet extremo A, ac se toto ad CA ita, vt è C educta æqualis ipsi CA incideret in aliquod punctum inter AB. Si vero angulus A esset obtusus, latus BA productum vltra A ita-*

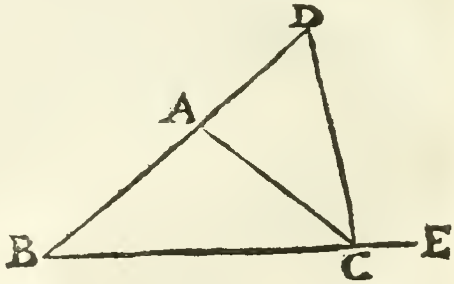




A inclinaret partes vltra A, ita vt è C educta æqualis ipsi CA incideret in aliquod punctum productæ BA vltra A. In isoscele rectangulo ABC educta è C coincidet in CA. Qui probas ACE esse triplum alterutrius B, vel BCA? Sic, ac facilè. per 32 huius, ECA æqualis est duobus A, & B, A rectus est duplus ipsius B semirecti. ergo ex A & B conficiuntur tres semirecti. ergo ECA æqualis tribus semirectis A, & B, est triplus semirecti vtriuslibet vel B, vel C. Vnde propositio : Isoscelis rectanguli angulus externus est triplus vtriuslibet ad basim.

3 *Demonstrationem Vietanam de acutangulo, & obtusangulo isoscelibus lubet tyroni apud nos extare in modum sequentem. Ac*





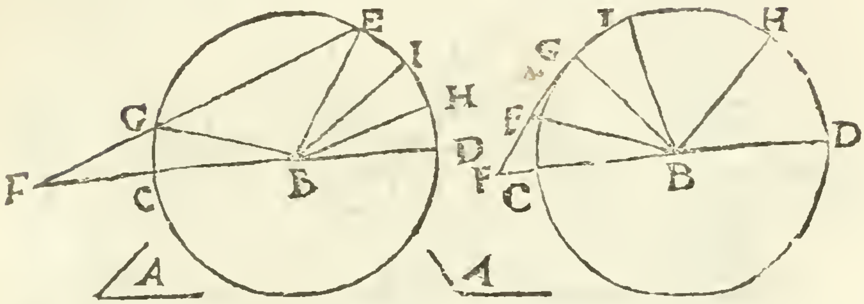
primo circa figuram obtusanguli, ECD est æqualis duobus D, B, at B est æqualis ipsi DAC, at DAC externus est æqualis duobus B, & BCA, ergo ECD est æqualis ipsi ACB, & bis ipsi B, hoc est triplus vtriuslibet, &c.

Circa vero figuram acutanguli, ECD est æqualis duobus internis B, & BDC; BDC externus est æqualis duobus internis DAC, ACD; DAC æqualis est ipsi ADC, ADC externus est æqualis duobus internis DBC, BCD; ergo à primo ad vltimũ angulus ECD est æqualis bis ipsi B, & duobus BCD, DCA componentibus totalem BCA, hoc est, est æqualis tribus æqualibus alterutri B, vel ACB, scilicet alterutrius triplus.

SCHOLION IV.

Propositio Vietæ.

Datum Angulum secare trifariam.

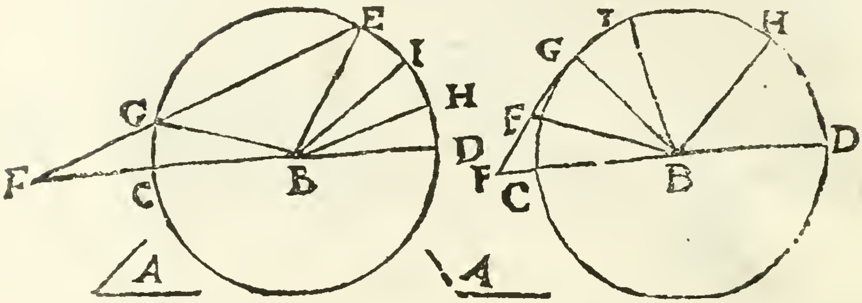


SIt datus angulus A, quem opporteat secare trifariam. Centro B, interuallo quocunq; describatur circulus, & agatur diameter CBD. Sumatur autem circumferentia DE definiens amplitudinem anguli dati, productaq; DBC indefinitè, educatur recta EGF secans diametrum continuatam in F, circunferentiam verò in G ita, vt FG æqualis sit BC, vel BD semidiametro circuli. Dico angulum EFC esse trientem anguli EBD, idest anguli A dati, & ipsum arcum GC esse trientis illius amplitudinem.

Iungatur enim GB. Triangulum igitur æquicrurum est FGB, à cuius basis termino B ducta est BE ipsi BG cruri æqualis. Quare angulus EBD triplus est anguli GBF, seu GFB. Ipsius autem anguli GBF amplitudinem definit arcus GC. Quocirca ab arcu DE abscendantur arcus DH, HI ipsi arcui CG æquales, & agantur rectæ BH, BI. Ergo angulus EBD, idest A datus, sectus est trifariam à rectis BH, BI. Quod erat faciendum.

SCHOLIA
ad antec. Propositionem.

Paralogistica trifariatio anguli. Remedia, & Monita.



1 EDucatur recta EGF secans diametrum continuatam in F, circumferentiam vero in G ita, vt FG æqualis sit BC, vel BD semidiametro circuli. *Hic latet anguis fallaciæ. Quî enim fiat sic conditionata sectio in G? Vnde id doces? supponis? At qua euidentiâ, vel certitudine? Quid est quod determinat punctum G in arcu CGE ita, vt recta ex E ducta per G habeat partem GF æqualem ipsi CB? An interuallum CB translatum vel ex G in F, vel ex F in G? At quî fiat ita, vt FGE sint in eâdem recta? Cum ex varijs punctis in arcu CGE vltra, vel citra G fieri possint variæ sectiones supra, vel infra F quarum vnica tantum constituet puncta F, G, E in vna recta? A, que illa vnica est sectio? qua certa regula eam inuenis, & efficis? Cum igitur non doceatur inuentio puncti G ita in directum ipsis F, & E, vt sectio in F faciat FG, CB æquales, problema non soluitur quod proponitur.*

2 *Remedia habes ab Antiquis, & à nostris in antec. § 11, & 12, scilicet vel ex ductu conchoideos Nicomedeæ, vel per translationem dati interualli per circinum iuxta regulam motam circa polum E. Applica exempla in citatis §§ huc. Lemma cui inseruit* Nico-

Lemma Nicomedis

Nicomedis cōchòis est hoc applicatum hic priori figuræ. Ex puncto E extra duas BG, BF angulum in B facientes ducere rectam EF ita, vt pars intercepta GF inter duas prædictas angulum facientes sit æqualis datæ rectæ, siue semidiametro CB. Quod fiet si, productà duarum angulum cōficientium alterà GB indefinitè, & ad eam eductà ex E rectà perpendiculariter secante, vltra sectionem, verbi gratia, citra B (si fingas EB esse perpendicularem ipsi GB in B) accipiatur æqualis datæ semidiametro, velut ipsi CB; tum polo E signetur organicè continuato ductu conchois, quæ secabit ipsam EG productam ita, vt GF sit æqualis datæ CB.

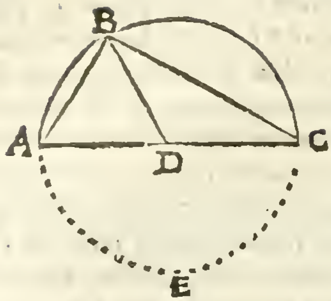
3 *Admittenda igitur veterum inuenta sunt, quæ de anguli dati tripartitione in æqualia habes in antec. § 11, & 12. Quibus meliora dum putāt aliqui se inuenturos, aliquando in paralogismos labuntur. Hinc videāt qui geometricè philosophari putāt esse ludū puerorum, quam ardui, & quodammodo supra vires humani sit ingenij aliqua vel inuenire, vel demonstrare in Geometrica philosophia, dum etiam ingeniorum apices ea non attingunt. Ac qui sibi nimium placent de fama, atq; etiam de scientia Geometricà modestè versentur circa aliena; apparet enim etiam in doctorum Geometrarum scriptis non omnia esse iusti ponderis demonstratiui, si quis prouocatus velit omnes eorum propositiones ad trutinā geometricam expendere.*

§. XIV.

PORISMA.

Dati circuli centrum aliter, quàm Euclides in lib. 3, inuenire geometricè, & organicè.

Nos aliter, quàm Euclides prop. 1. l. 3, quasi corollarij loco Porisma hoc exercemus, cuius vsus criberrimus est in Geometricis, in Astrolabicis, in Gnomonicis, &c. vt hāc hìc scientiam, vbi primò haberi potest, tam vtilis problematis Tyronibus impertiamur.



1 *Finge igitur circuli ABCE solam eſse peripheriã deſcriptam. Ex quolibet puncto · ducatur quælibet recta BC ſecans peripheriam in C. Ex puncto B educatur ad BC perpendicularis BA ita, vt intra peripheriam cadat; ſi enim , angulo recto ad extremum B constructo, altera rectarum, verb. gratia, BA non cadat intra circulum, educatur ex B altera ſecans ſupra, vel infra C, cum qua poſſit educta BA facere angulum rectum intra peripheriam; propterea enim diximus:* quælibet BC. *Itaq; BA perpendicalariter ex B educta, & producta intra circulum ſecet in A peripheriam. Iungaturq; AC, quæ cum ſit baſis portionis circuli, in qua portione angulus ABC eſt per conſtructionem rectus, erit ea circuli portio ſemicirculus, per antecedẽs theorema in § 6, & iuxta ibi præpoſitam definitionem. ergo AC eſt diameter. ergo bifariatio in D dat centrum, &c.*

Organica expeditiſſima inuẽtio Centri.

2 *Organicè verò inuenies centrum circuli expeditiſſimè ſi normæ angulum rectum aptaris ad quodlibet punctum concauæ peripheriæ, ac ſignaris duo puncta, vbi normæ latera ſecabunt eandem peripheriam. Iuncta enim recta per duo illa puncta, & bifariata dabit centrum, &c.*

§. XV.

SCHOLION.

Aristotelis in moralibus locus ad antecedens Porisma spectans, cùm morali corollario magni momenti.

1 PHilosophus lib. 2 Moral. Nicomach. c. 9., dum affert præcepta ad inueniendum medium morale, in quo sita est virtus: Probum esse difficile est, quippe cùm in vnaquaq; re medium inuenire sit difficile; vt circuli medium deprehendere non cuiuslibet, sed scientis solummodo est; sic quoq; & irasci, & dare pecuniam, & sumptus facere cuiuslibet est, & facile, at cui, & quantùm, & quando, & cuius causà, & quomodo oporteat eadem hæc facere non cuiuslibet, neq; facile est: siquidem rectè facere & rarum est, & laudabile, quemadmodum etiam honestum. *Satis apertus locus est. Dum vero affirmat non esse cuiuslibet centrum dati circuli inuenire, sed scientis scilicet primam propositionem lib. 3 Euclidis, multo difficilius esse affirmaßet idem centrum inuenire etiam aliter, quam Euclides.*

Vt scientis tantummodo est centrum inuenire, ita solius prudentis medium virtutis.

Rectè facere rarum, & laudabile.

2 *Sed à figura geometrica gradum faciamus ad lucrum ingens morale. Vin' modum facillimum inueniendi medij moralis, & bene moraliter agẽdi, quod tam arduum esse affirmat Philosophus? Vtère moraliter medio geometricè organico, quo nos in antecedenti porismate centrum inuenimus, qui fuit ab vsu, & applicatione normæ rectum angulum continentis. Quænam norma est moralis ex recto constans? nempè lex recta, & iusta, & eius præcepta, iuxta quorum applicationem, & vsum si vixeris, facilè, ac quasi nesciẽs medium illud morale attinges, quod longe difficillimum est prudentiæ oculo prospicere.*

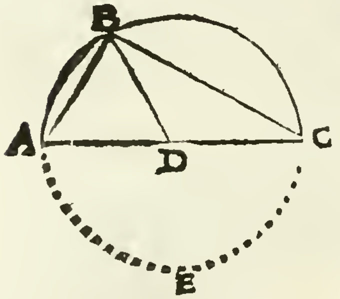
Ratio facillima inueniendi mediũ morale, vt centrum per normam, &c.

§. XVI.

§. XVI.

PORISMA Locale.

Data rectà terminatà, extra eam inuenire punctum, ad quod rectæ ductæ ab extremis lineæ datæ faciant angulum rectum.



SI animum referas ad § 6, & 7 anteced. facillimè tibi, mi Tyro, expedietur problema hìc propositum, etiam sine figura. Vide tamen fig. § 14, ex antec. hìc repositam. Nam si data recta AC bifarietur in D, & interuallo dimidiæ, centroque facto in D, semicirculus ABC super datâ si describatur, qualibet recta ductæ ab extremis AC datæ rectæ ad quodlibet punctum arcùs semicircularis ABC conficient angulum rectum, nempe in semicirculo, iuxta demonstrata in § 6 antecedenti. Eoq; modo repertum erit punctum extra datam, ad quod, &c.

Est verò id Porisma locale iuxta dicta in citat. § 6, & 7, & pluribus explicata inferius ad 35 propos. est enim extra datam non vnum, sed plurimum punctum, ad quod ducta ab extremis, &c. habentq; ea puncta numero infinita vagum locum in toto arcu semicirculari.

§. XVII.

§.XVII.

PROBLEMA.

Lineam rectam circulum tangentem aliter, quàm Euclides in lib. 3 ex antedictis ducere. &c.

PRopter vsus creberrimos in ijs omnibus operationibus, & in ijs omnibus partibus Philosophiæ Mathematicæ, in quibus exercentur problemata geometricè, appono hoc problema, cuius demonstratio pendet à proximè antecedentibus, ac peragitur à nobis per vnicam circini diductionem (saltem in ea parte, vbi ad datum peripheriæ punctum ducitur tangẽs) atq; aliter, quàm Euclides in propos. 17 lib. 3, cuius libri cognitionem ad hoc problema non arbitramur hîc Tyronibus necessariam.

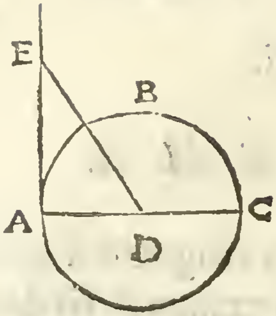
Præmittẽdum tamen est breue lemma, quod etiam Euclides initio propositionis 16 eiusdem libri 3 probat ex hac hîc antecedente 12, & corollarij loco habet post propos. citatam 16 lib. 3. Nos hîc varietatis gratia aliter, quàm Euclides id lemma ex Orontio demonstratum dabimus.

§.XVIII.

LEMMA.

Recta linea ab extremitate diametri excitata ad angulos rectos, extra circulum cadit. Aliter, quam ab Eucl. lib. 3.

1 ESto circulus ABC, & illius centrum D, dimetiens vero AC, ab A dimetientis extremitate ad angulos rectos excitetur



citetur A E, per vndecimam primi. Dico, quod A E recta extra ipsum cadit circulum. Suscipiatur enim in ipsà E A contingente aliquod punctum: Sitq; illud E. & connectatur E D, per primũ postulatum. Triangulum erit igitur E A D. omnis porrò trianguli tres interiores anguli binis rectis sunt æquales: per trigesimam secundam primi. rectus est autem qui ad A, per constructionem. Reliqui igitur qui ad E, & D sunt anguli, vni recto sunt æquales: & eorum propterea quilibet ipso, qui ad A recto minor. In triangulo autem maior angulus sub maiori latere subtenditur, per decimam nonam primi: maior est igitur D E ipsa A D, quæ est ipsius dati circuli semidiameter. Egreditur ergo D E circumferentiam ipsius A B C circuli: caditq; punctum E extra eundem circulum A B C. Haud dissimilis erit cæterorum punctorum ipsius A E demonstratio. Cadit ergo tota A E extra datum circulum A B C.

Sic Orontius, ac aliter, quàm Eucl. in priore parte dem. prop. 16. lib. 3.

SCHOLION.

De conuersà præcedentis lemmaticæ propositionis, nempe: linea circulum tangens est perpendicularis ad diametrum.

QVoniam in sequentibus, præsertim ad 47, egebimus hac conuersà, ideo hìc in loco indicanda fuit. Eaq; demonstratur ab Euclide in lib. 3. propos. 18, ex propos. 32, & 18 huius lib. 1. Qua propter à Tyrone nondum excedente cognitionem huius lib. primi facile cognosci potest. & hìc à nobis supponitur iam demonstrata ab Eucl. in citato lib. 3. Illuc eam vise, mi Tyro.

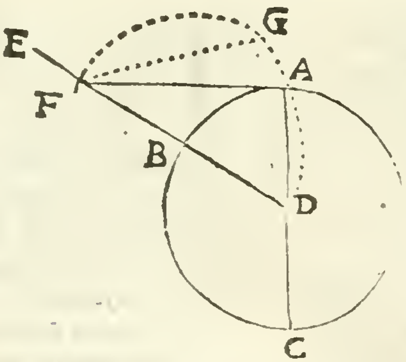
Sup-

Supposito igitur lemmate ex Orontio, venio ad problema, cuius duæ sunt partes.

Ad datum in circuli peripheria punctum vnica circini diductione tangentem ducere.

2 S*Vppono & corollarium ex antecedenti lemmate, & definitionem 2 lib. 3.* Recta linea circulum tangere dicitur quæ cõtingens circulum, & producta ipsum non secat. *Et ex lemmate, quia quæ ab extremitate dimetiētis ad rectos ducitur angulos circulum non secat, sed extra tota cadit, ideo est tangens.*

Quand sit linea tangens.



Ad datum quodlibet pūctum A in peripheria circuli ABC sit adducēda recta linea tangens. Sit circini diductio ad interuallum, exempli gratiâ, semidiametri DA. Centro A fiat sectio circūferentiæ in B, & ex D per B educatur recta infinita DE. centro B fiat sectio in F, iuncta FA erit tangens in A circulum. Nam, si centro B ducatur peripheria semicirculi FAD, angulus A in semicirculo est rectus, ac proinde recta FA, iuxta antecedentia supposita, est tangens. Indicare sat est, ne videamur eadem sæpius repetere. Iam partem secūdam propositi problematis expedio.

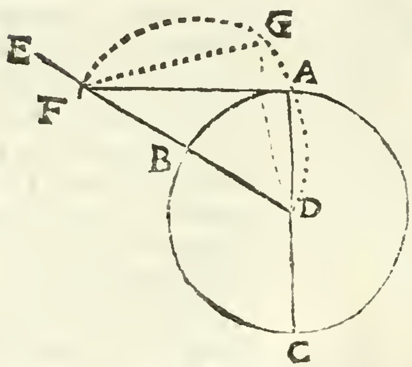
A dato puncto extra circulum adducere lineam rectam circulum tangentem.

3 S*It punctum F datum extra circulum, a quo adducenda sit recta linea tangens circulum ABC. Iungantur centrum D, & datum punctum F rectâ FD, qua bifarietur in E. Cētro E, & interuallo dimidia, velut EF, fiat sectio peripheria velut in A. Iuncta FA erit tangens. &c. Patet demonstratio eodem modo, quo in antecedentibus, ducto semicirculo FAD, & iunctâ DA, qua cum AF facit rectum in semicirculo. &c.*

§. XIX.

PROBLEMA

Super data lineà triangulum iſoſceles illicò conſtruere, cuius vterq; angulus ad baſim ſit ſemirectus.



PVta datam eſſe FD, ſuper quà triangulum propoſitum ſit conſtruendum. Biſarietur in B, & cẽtro B ducatur ſemicirculus FAD. Ex B erigatur occulta perpẽdicularis ſecans ſemiperipheriam in G. Iunctis FG, GD, conſtructum erit triangulum FGD, cuius angulus G in ſemicirculo cùm ſit rectus, erunt ex dictis ad hanc 32 propoſ. Eucl. conſequenter reliqui duo bipartientes rectum in duos ſemirectos, propter latera æqualia FG, GD. Quorum æqualitas, ſine vſu libri tertij, expediri poteſt ex 4 prop. huius lib. 1. ſunt enim per conſtructionem latera æqualia FB, FD, & occulta, ſiue imaginata BG latus eſt commune, & ad B vtrimq; anguli recti, ergò & FG, GD ſunt æquales. &c.

SCHO-

SCHOLION, In quo

PROBLEMA.

Super datà rectà triangulum ſtatim conſtituere, cuius duo anguli ſimul ſumpti æquales ſint tertio.

Hoc problema valde vniuerſale eſt, & tamen facillimum ex antecedentibus. Nam ad quodlibet punctum in ſemicirculi peripheria cõſtitui poteſt angulus rectus, eritq; abſolutum problema non ſolum in iſoſcele, vt in anteced. probl. ſed & in infinitè variatis ſcalenis. Cum enim tres anguli trianguli ſint æquales duobus rectis, ſi vnus eſt rectus, ergo reliquis duobus æqualis eſt.

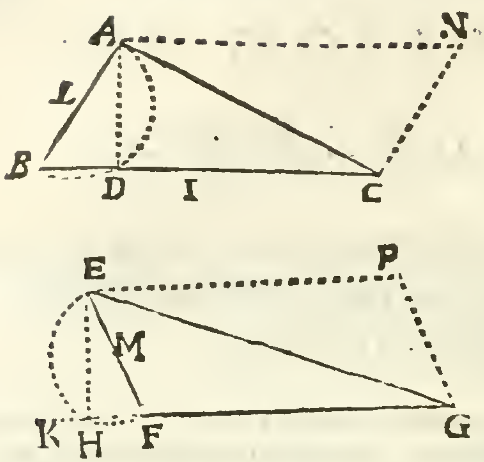
§. XX.

PORISMA.

Dato triangulo, inuenire punctum in baſi etiam extra triangulum, ſi ſit opus, productà, ad quod cadat perpendicularis à trianguli vertice deducta.

Ad praxim pro dimenſionibus arearum triãgularium, & ad plurima alia in Geometrià practica, & ſpeculatiua vtiliſſimum eſt hoc poriſma, quod facillimè exercetur, & demonſtratur ex antecedentibus.

In vtroq; triangulo non rectangulo ABC, EFG accipiatur pro ver-



tice quilibet angulorum, velut A, E. Vtrumlibet laterum continentium vertices A, E (esto in vtroq; triangulo latus breuius AB, EF) bifarietur in L, M, & duo semicirculi dicantur ALB, EHF ad partes quidem interiores trianguli, si perpendicularis à vertice casura videatur intra triangulum, ad partes verò exteriores, si extra triangulum casura est, iuxta corollarium 2 ex 17 huius. & producatur sub angulo acuto E basis FG ad partes versus K, & secet semicirculum in H. erunt puncta sectionum H, & D termini perpendicularium ab A, & E. Statim patet demonstratio, eò quod AD, EH sint perpēdiculares ad bases, quia AD, DB, & EH, HF constituunt angulos rectos in semicirculis &c.

In triangulis rectangulis nō est opus hoc problemate, sunt enim ad angulum rectum perpendicularia duo laterā, &c.

§. XXI.

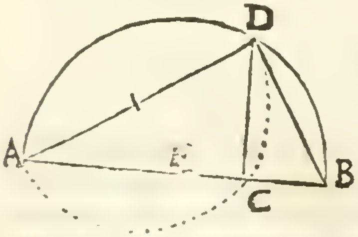
Plura in vno Problèmata soluta ex 32 prop. Eucl.

Triangulum rectangulum vnà cum perpendiculari ab angulo recto ad basim demissà destructum restituere ex duabus variè datis destructi lineis.

A Vil-

A Villalpando soluitur propositum problema etiam è lib. 6. Euclidis. At nos ijs contenti erimus, quæ solutionem habent à proximè antecedentibus in hoc lib. 1. ad hanc 32. propos. Euclid.

Sit ergo triangulum rectangulum ADB, & à D perpendicularis DC constituens duo basis segmenta AC, CB. Deinde finge in triãgulum esse laxatum, vel destructum, nec superesse ex eius partibus nisi duas aliquas, verbi gratia vel 1 basim cum alterutro laterum angulum rectum constituentium, vel 2 basim cum alterutro segmentorum; vel 3 alterutrum laterum angulum rectum constituentium cum perpendiculari, vel 4 latus alterutrum constituentium angulum rectum cum segmento adiacente; vel 5 perpendicularem cum alterutro segmentorum; vel deniq; 6 data esse sola basis duo segmenta. Ex binis ijs fragmentis sex modis, vt propositum est, variè datis affirmo facillimè, ac demonstratiuè restitui posse destructum triangulum rectangulum.



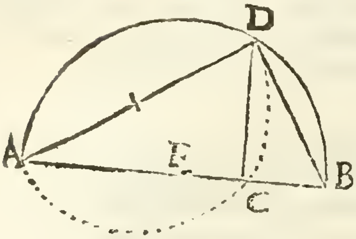
1 Sit data basis AB vnà cum alterutro laterum AD, DB, v.g. cum AD. Diuisa AB bifariam in F, describatur centro F circa AB semicirculus ADB, in quo applicetur recta æqualis ipsi AD, nectaturq; BD, quæ cum efficiat angulum rectum cum latere AD, erit triangulum ABD rectangulum, id quod construendum proponebatur. *Angulus vero rectus est in semicirculo, per nostrum § 6 ad hanc 32 lib. 1. Eucl.*

2 Basis AB detur cum alterutro segmentorum AC, CB, verbi gratia cum AC. Descripto semicirculo ADB, erigatur perpendicularis ex C, nempe CD, & nectantur AD, DB, factumq; erit triangulum ADB, quod quæritur. *Nititur eodem § 6. quemadmodum & reliqua in hoc § 21 sequentia nituntur theoremate demõstrato in citato § 6 ex antecedentibus ad 32 Eucl.*

3 Detur vnum laterum circa angulum rectum, v.gra. AD, vna cum perpendiculari. Describatur circa AD semicirculus ACD, in eoq; applicetur recta CD. Iuncta enim AC, erit constructum triangulum ACD, cui addatur triangulum CDB, erigendo ex D super AD perpendicularem DB, quæ cum AC protracta concurrat in B, ipsumq; triangulum ABD constructum erit.

4 Detur iterum vnum laterum circa angulum rectum. v.g. AD

vna



vna cum ſegmento baſis AC, quod eidem laterí adiacet. Vt ex his conſtituatur triangulum ADB, prius conſtituetur triangulum ACD, applicando in ſemicirculo ACD rectam AC, quemadmodum in anteced. applicata fuit perpendicularis DC, ac deinde adiungẽdum triangulum CBD, vt in antec.

5 Detur perpendicularis CD cum alterutro ſegmentorum, v.g. cum AC. coniungantur ad angulum rectum in C, ductaq; AD, erigatur ad ipſam perpendicularis DB, quæ cum AC protracta concurret in B, perficietq, triangulum rectangulum ADB.

6 Dentur duo baſis ſegmenta AC, CB. Deſcriptoq; ſemicirculo ADB, erigatur perpendicularis CD, iunctæ enim DA, DB conſtituent triangulum quæſitum.

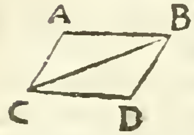
SCHOLION.

HOc, quod vltimum citatur in § 2 ad 9 propoſ. atq; hìc aſſcritur futura demonſtratio diuiſionis anguli recti in 3 partes æquales, transferendum cenſui in aptiorem locum in antecedentibus, ſcilicet in corollarium 10, vbi demonſtratur ex antecedentiũ corollario 7, anguli recti triſariatio per triangulum æquilaterum. Hoc monendum hìc cenſui, ne à citatione prædicti § te huc prouocante fallare, atq; vt hìc habeas indigitationem quò abeas.

Pro-

Propos. XXXIII. Theor. XXIII.

Lineæ rectæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad easdem partes coniungunt, & ipsæ æquales sunt, & parallelæ.



SInt æquales, & parallelæ AB, CD, easque ad easdem partes coniungant rectæ AC, BD. Dico & ipsas AC, BD parallelas, & æquales esse. Ducatur enim BC. Quoniã AB, CD parallelæ sunt, & in ipsas incidit BC,[a] erunt anguli alterni ABC, BCD æquales. Et quia AB, CD æquales sunt, communis addatur BC, erunt duæ AB, BC duabus BC, CD æquales, estque angulus ABC angulo BCD æqualis.[b] Quare & basis AC basi BD æqualis erit, & triangulum ABC triangulo BCD, & reliqui anguli reliquis, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur, æquales erunt. Est ergo angulus ACB angulo CBD æqualis. Et quia in duas rectas AC, BD incidens recta BC facit angulos alternos ACB, CBD æquales,[c] erũt AC, BD parallelæ: ostensæ autem sunt & æquales. Ergo lineæ rectæ, quæ æquales, &c. Quod oportuit demonstrare.

a prop. 27. 1.

b prop. 4. 1.

c prop. 27. 1.

§. I.

SCHOLION.

Cautiones circa verba propositionis ad vitandas hallucinationes geometricas.

Notanto Tyrones Geometrici tria requiri à Geometrà Philosopho in hac propositione circa lineas se mutuo iungentes. 1 vt sint æquales, 2 vt parallelæ, 3 vt ad easdem partes fiat iunctio. Circa tertiam conditionem nihil addo, præter iam vulgata ex Proclo, estq; ea conditio satis per se apta vt intelligatur. Si enim diametraliter fiat iunctio, & mutua diametrorũ sectio, patet diametros in reliquis quadrangulis (exceptis rectangulis) esse inter se inæquales, licet iungant æqualia latera. &c.

Circa verò 1, & 2 conditiones vide nos in Apiariis Philosophiæ Mathematicæ, Apiar. 5 Progym. 1, cap. 4, in quo lemma est, & figura, quorũ propositio quasi paradoxica huc facit: duas lineas ducere, quæ lineas æquales, & non parallellas iungant, ipsæ tamen sint inæquales, & parallelæ. *Æquales inæquales iungunt, parallelæ non parallelas, seorsim distributà vtràlibet conditione. Quam distributionem non admittit hìc Geometra, vt propositionis veritas consistet, sed necessum est in lineis iunctis vtraq; sit conditio, vt & iungentes vtramq; obtineant.*

Vide figuram in Apiario citato, vbi in triangulo isoscele ductà lineà parallelà basi, iunguntur quidem partes æquales vtriusq; lateris, sed quia iunctæ, licet æquales, non sunt parallelæ, ideo & iũgentes, licet parallelæ, non sunt æquales. In alteris ergo oppositis desit æqualitas, in alteris oppositis desit parallelismus. Et ergo iũgentes, atq; oppositæ vtraq; lineæ sint æquales, & parallelæ oportet quæ iũguntur sint & ipsæ æquales, ac parallelæ. Vide Apiar. cit.

§ II.

§. II.

VSVS

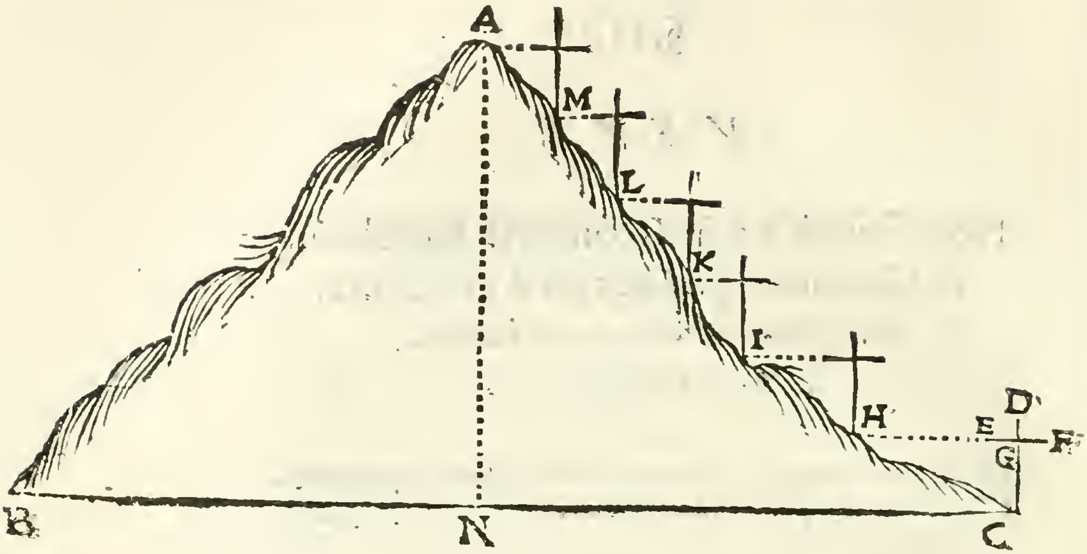
Propositionis 33 in Geometrià speculatiuà, in Geometrià practicà, in Agriculturà, in agraria iustitia, in re bellicà, in Architecturà. &c.

Propositorum vsuum aliquod hic tãtum libamen appono. Plura vide in Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ, Apiar. 2. Progym. 2.

PROBLEMA.

Latentes sub montibus perpendiculares altitudines, & horizontales longitudines, ac latitudines metiri demonstratiuè per hanc 33 Euclid.

1 *Sit mons (vide in fac. seq.) ABC cuius latentem perpendicularem altitudinem AN, & longitudinẽ item horizontalẽ, siue latitudinem BC pariter sub monte latẽtem metiri velis. Hastam DC perpendiculariter erige in C, atq; illi transuersoriũ EF mobile ad angulos rectos in G adiunge; oculo ad F apposito, iuxta FGE spectato montem in H, si quidem transuersarij lõgitudo facilè ipsa non pertingat in H. Refixam hastam fige in secunda statione ad H, in tertia ad I, in quarta ad K, in quinta ad L, in vltima ad M, ijsdem semper seruatis, quæ præcepta sũt in primà ad C. Numerus, in exemplo senarius, hastarum replicata-*



rum, accepta longitudine GC; dabit perpendicularem altitudinem AN sex mensurarum GC. Item interuallorum quantitates à loco stationum ad hastas, velut HG, &c. simul iunctæ dabunt quantitatem latentis planitiei linearis NC. Vt reliquam NB obtineas iteranda erit operatio cum hastis in opposità parte mõtani dorsi BA. Ad cognitionem ipsius AN satis est vna operatio alterutra vel per AC, vel per AB. Itaq; per æqualia scitur in hoc exemplo perpendicularis altitudo AN, per inæqualia vero longitudo, seu latitudo BC. Quam tamen si per æqualia etiam ipsam scire velis vide nos in citato Ap. 2, Prog. 2, prop. 1.

2 Demonstrationem ex hac 33 prop. Eucl. vide ibidem ad propositiones citati Apiarij. Hic interim Tyronibus indico vestigia ex hac 33. Si enim fingas rectas ab hastæ, atq; à transuersarij longitudine productas ad AN, & ad BC, erunt parallelæ, & æquales oppositæ iunctæ ad easdem partes, & in AN correspondebunt partes æquales parti GC hastæ replicatæ, in BC verò correspondebunt partes quantitatibus replicatis transuersarij producti, vel decurtati, vel cum radio visuali coniuncti iuxta montis deorsales inæqualitates.

§. III.

§. III.

SCHOLION.

De agraria apud priscos cultellatione.

Cultellare agros acclivies, &c. verbum agrarium priscis Latinis.

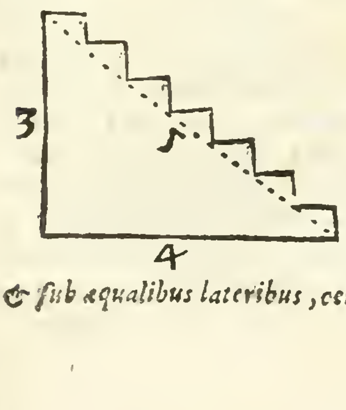
O*perationem, ac praxim prædictam appellabāt prisci Latinorum cultellationem. de qua vide plura, & expreßa cum antiquâ eruditione apud nos in cit. Ap. 2. in Scholio ad prop. 1. & præsertim in corollario 2. post prop. 5.*

§. IV.

COROLLARIVM I.

Altitudines turrium procul positarum, & ædificiorum, in quibus versamur, auctarij loco, & quasi aliud agendo metiri.

A*liud scilicet agendo aliud lucraberis, & auctarium non quæsitum cōsequeris in vsu præcedentis cultellationis, vel in domestico per scalas ascensu.*



Quemadmodum enim in citato Apiario, propos. 2 dū montes cultellauimus docuimus simul eadē ope ratione metiri turrim aliquā procul à monte positam, vt videre poteris in citata propositione nostra; ita & hic dum scalas domesticas ascendis, positis gradibus quasi triangulis rectangulis, & sub æqualibus lateribus, ceu vides in apposità figurà, etiam si sca-

Scalis domesticis immobilib. domorum altitudines metiri.

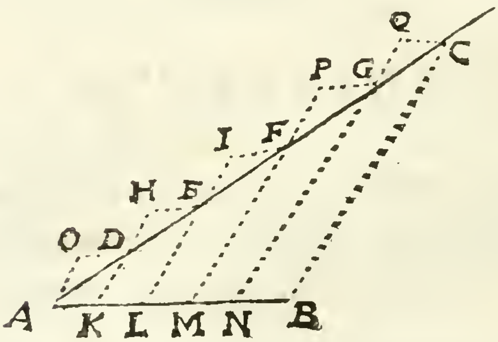
scalæ illæ domesticæ varijs pauimentis intercidantur, tamen addito inter se numero, & notâ mensurâ graduum vnà cum pauimentorum crassitie, fit summa, continens altitudinem domus, vel turris ab imo pauimento ad eum terminum, quo supremæ scalæ pertingunt. Tute hìc dicta figuræ applicato, mi Tyro.

Itē & turrium, quas ascēdimus &c.

§.V.

PARADOXVM, & Corollarium 2.

Rectam lineam in quotlibet partes æquales facilè, ac geometricè diuidere datà qualibet circini diductione.



REcta AB diuidenda sit, verbi gratia in 5 partes æquales, & data sit qualibet circini diductio, verbi gratia ea, quæ si quinquies replicaretur per rectam AB, excederet eius quantitatem, (vel etiam non expleret: exemplum tamen hìc esto in excedente). Ab alterutro extemo A ad libitum angulum educatur indefinita AC, producaturq; si sit opus, vsq; dū quinquies, & amplius per eam replicetur data circini diductio; sintq; partes æquales quinq; acceptæ AD, DE, EF, FG, GC, à quarū terminis demissæ parallelæ ipsi BC diuident subiectam AB in quinq; partes. Nam, quasi factis gradibus, si parallelæ KD, LE, MF, &c. producantur ad æqualitatem oppositarum, vt æquales sint KH, LE, item LI, MF, &c. & iungantur HE, IF, &c. Quoniam

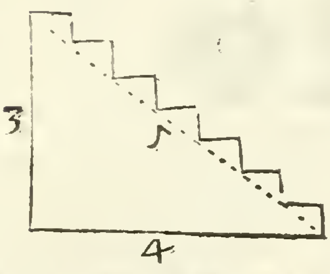
niam HE, KL, item IF, LM iungunt parallelas, & æquales, sunt & ipsæ inter se æquales, per hanc 33, atq; ita de reliquis. sunt autẽ omnes oppositæ superiores OD, HE, IF, PG, QC inter se æquales, per 26, 28, 30 propos. huius, ergo & oppositæ inferiores AK, KL, LM, MN, NB sunt inter se se æquales. Ne hic repetantur semel exposita, vide corollarium post prop. 1. Prog. 2, Ap. 2, quomodo ex citatis 26, 28, 30 demonstrentur æquales inter se oppositæ superiores.

Potest etiam Geometricus Tyro ex ijs propositionibus citatis hic sibi concinnare demonstrationem.

§. VI.

COROLLARIA 3, 4, &c.

De iustà æstimatione, & commutatione agrorum feracium in montibus cum agro in plano feraci.
De militibus, vel domibus in loco cliuoso maiore non pluribus, quàm in subiecto plano minore.



3 Ordiamur à paradoxo, & saltem indicemus quæ proposita sunt à nobis in inscriptione huius 3 corollarij.

Reuise figuram scalarum § 4 antec. ac finge latus 5 esse dorsũ obliquum, & ferax dati alicuius collis, latus vero 4 esse agrũ planum item feracem. exemplum affero de arboribus fructiferis, atq; affirmo in dorso longiore 5 non posse progigni plures arbores, quàm in breuiore, ac plano 4. Cum enim arbores enascantur, & edu-

In exemplo scalarũ ſ. tendere nõ plures arbores enaſci in obliquo montis dorſo, quã in ſubiecto plano.

& educantur, quaſiq; educentur perpendiculariter, ſi fingas gradus illos ſeptenos obliqui lateris 5 eſſe totidem obtruncatas arbores à parte ſuperiore, productas verò ad inferiorem partem in latus 4, erunt totidem, atq; eiuſdem magnitudinis arborum trunci explentes totam lineam 4, itaq; ſit vt ab eodem truncorum, vel arborum numero abſumantur & minus 4, & maius 5 latera, ſintq; quaſi totidem parallelogrammata æqualium oppoſitorum laterum, iuxta prædicta ad hanc, & ex hac 33 prop. Eucl. Quare apparet propter obliquitatem ipſius lateris 5 maiores quidem eſſe ſeptenas partes, in quas diuiditur, quàm ſint latera graduũ, non tamen ferre plures gradus, quam qui correſpondent totidem, ac æqualibus partibus in inferiore, ac breuiore latere 4. Habet eandem vim Geometrica ratiocinatio applicata arboribus, quæ hic verſatur in exemplo ſcalarum, & graduum.

In eodem exemplo ſcalarum de ciuitatibus in montibus, exercitu, &c.

2 Si gradus eoſdem fingas eſſe vel domorum, vel hominum inſtar, diſces in obliquo colle 5 poſita vel ciuitatem, vel exercitum non eſſe maiora, quam poſita in plano 4. Circa quæ hic indicata vide plura, & expreſſiora cum ſuis figuris in cit. Ap. 2. prog. 2. corollar. 1, & 2, & poſt ea Scholion.

Nota ad iuſtitiam.

3 Plus ergo agri feracis montani non eſt pluris æſtimandum, quàm minus agri plani feracis, cæteris paribus, & plus agri feracis montani commutandum eſt cum minore agro feraci plano.

Item ad iuſtitiam.

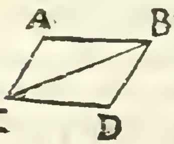
4 Vt autem fiat æqua vel æſtimatio, vel permutatio, fiat per modos antecedentes cultellatio geometrica ex hac 33 propoſ. Euclid. demonſtratà, qua cognoſcitur obliquo 5 deberi tantùm planum 4, &c.

Pro-

Propof. XXXIV. Theor. XXIV.

Parallelogrammorum ſpaciorum quæ ex aduerſo & latera, & anguli ſunt inter ſe æqualia, èaq; diametrus biſecat.

ESto parallelogrammum ACDB: diametrus BC. Dico parallelogrammi ACDB, quæ ex aduerſo, latera, & angulos æqualia eſſe, eaq; diametrum BC bifariam ſecare. Cùm enim AB, CD parallelæ ſint, & in ipſas incidat BC, [a] erunt anguli alterni ABC, BCD æquales. Rurſus cum AC, BD ſint parallelæ, & in illas incidat BC, [b] erunt & anguli alterni ACB, CBD æquales. Duo ergo triangula ABC, CBD habent duos angulos ABC, BCA duobus BCD, CBD æquales, alterum alteri, & vnum latus vni lateri, quod adiacet angulis æqualibus, vtriq; commune BC. [c] Quare & reliqua latera reliquis, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo æqualem habebunt. æquale ergo eſt latus AB lateri CD, & AC ipſi BD, & angulus BAC angulo BDC. Et cum tam anguli ABC, BCD, quam CBD, ACB æquales ſint, [d] erit & totus ABD toti ACD æqualis. oſtenſus eſt autem & BAC æqualis BDC: Parallelogrammorum ergo ſpaciorum quæ ex aduerſo & latera, & anguli inter ſe æqualia ſunt. Dico & diametrum illa bifariã ſecare. Cum enim AB, CD æquales, & BC communis ſit, erunt duo latera AB, BC duobus CD, BC æqualia, alterum alteri, & angulus ABC æqualis angulo BCD: [e] erit ergo & baſis AC baſi DB æqualis, & triangulum ABC triangulo BCD. Diametrus ergo BC parallelogrammum ABCD bifariam ſecat. Quod oportuit demonſtrare.



a prop. 27. 1.
b prop. 27. 1.
c prop. 26. 1.
d ax. 2.
e prop. 4. 1.

§ I.

SCHOLION I.

Definitio, siuè nominis notio parallelogrammi hìc primum ab Euclide appellati.

Cur ab Euclide nō sit posita inter figuras quadrilateras definitio parallelogrammi.

Cur hic primum vsurpatum ab Euclide nomen parallelogrammi.

Figura, quæ à parallelis cōtinetur, parallelogrammum est.

INter figurarum quadrilaterarum definitiones non est posita ab Euclide definitio parallelogrammi, quia, vt arbitror (ac vt inferius in paradoxo videbis) etiam extra quadrilateras figuras parallelogrāma sunt. Nomen tamen parallelogrāmi nunc primùm circa quadrilateras figuras vsurpat Euclides, accipiendo (inquit Proclus) occasionem ex præcedenti theoremate. Cum enim ostendisset quod rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt, ipsæ quoq; æquales, & parallelæ sunt, perspicuum est quòd latera quidem, quę ex opposito sunt tum ea, quæ coniungunt, tum ea, quæ coniunguntur, parallela esse pronuntiauit. figuram verò, quæ a parallelis continetur iure parallelogrammum appellauit, quemadmodum & eā, quæ à rectis comprehenditur lineis, rectilineam nuncupauit.

§. II.

SCHOLION II.

In vsus geometricos vestigia geometrica, quibus agnoscas demonstratiuè figuram aliquam esse parallelogrammum.

VNiuersalem hanc nostram propositionem proposuimus non solùm de quadrilateris figuris, vt alij, sed etiam de aliquibus

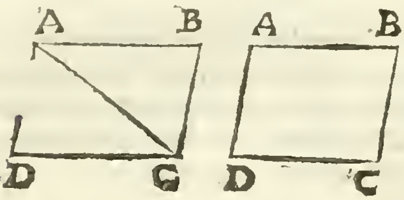
bus plurilateris, vt inferius videbis in paradoxo. Est autem magni vsus hæc propositio in Geometricis, vt statim pronunties aliquas lineas esse parallelas, vel figuram aliquam esse parallelogrãmum, cum opus est hoc assumpto aliquid in demonstrationibus cõfirmare.

1 Primum ergo vestigium, vnde pronunties, lineas aliquas esse parallelas, vel aliquam figuram esse parallelogrammum, esto corollarium 1, quod eduximus in antecedentibus, vbi praxes varias protulimus ducendi parallelas, § 2 ad prop. 31. Nempè si in quadrilatero aliquo agnoscas diametros sese mutuò bifariam secãtes, pronuntiabis eße parallelogrammum, per ea, quæ ibi facile, ac breuiter demonstrauimus. Secundum vestigium esto ab angulis, vel lateribus oppositis æqualibus, hoc est ex conuersâ huius 34 propofit. quæ apud Proclum, ex quo alij posteriores corraserunt. Accipe à Griembergero breuiter.

In Parallelogrammis diametri mutuo se bifariãt in partes æquales.

2 Omne quadrilaterum habens latera opposita, vel angulos oppositos æquales est parallelogrammum.

In parallelogrammũ anguli, & latera sũt æqualia.



Sint primo AB, CD, & AD, BC æquales. Ducta igitur AC, erunt duo latera AB, BC æqualia duobus CD, DA, & AC basis erit communis. Vnde per. 8, non solum angulus B angulo D, sed & ACB æqualis erit ipsi CAD, nimirum alterno alternus, atq; ideo, per 27, AB erit parallela CD, & AD ipsi BC.

3 Secundo. Angulus A sit æqualis C, & B ipsi D, eruntque duo A, B æquales duobus C, D, & duo A, D æquales duobus C, B. Sunt autem omnes quatuor æquales quatuor rectis, per Schol. 32, ergo tam A, B, quàm A, D erunt duobus rectis æquales, & ideo, per 28, AB, CD, & AD, BC erunt parallelæ.

4 Ex priore parte huius demonstrationis constat Quadratum, Rhombum, & Rhomboiden esse parallelogramma. Ex posteriore constat idem de Quadrato, figurà altera parte longiore, & Rhomboide.

Quadratũ Rhombus, Rhobides, figura altera parte longior sũt parallelogrammata.

§. III.

SCHOLION III.

A Diametro bifariatio etiam extra parallelogrammata.

Non solum parallelogrãmata, sed & circulos, ellipses, &c. hyperbolas, parabolas diametri diuidunt bifariam.

NOtabis, in geometricum lucrum cum Proclo, à diametro diuidi bifariam non solum parallelogrammata, sed etiam alias figuras, circulos, ellipses, & regulares aliquas figuras, vt infrà videbis in paradoxo; sed & semifigurarum, vt ita dicam, siue linearum è conicis sectionibus, quæ spatium vndiq; non concludunt, paraboles, hyperboles sunt suæ diametri (de quibus Apollonius) quæ plana spatia sub ijs lineis in æquales partes dispescunt.

Etiam nõ diametri bifariant parallelogrãmata.

Recole problema Aristotelicum de diametrì appellatione, cur indita lineæ tantùm, quæ ex oppositis angulis bifariam diuidit parallelogrammum. Videbis inferius in vsu aliquo, & applicatione huius propos. 34 Euclidis alias lineas, quæ bifariant parallelogrammum non per angulos, nec diametri appellantur.

§. IV.

SCHOLION IV.

Quibusnam in parallelogrammis diametri sint æquales, vel inæquales, ac secent, vel non secent bifariam oppositos angulos.

1 *QVandoquidem diameter in parallelogrammo diuidit semper figuram in duas partes æquales, non abre videtur si*

quis

quis Tyro quærat vtrum etiam diuidat angulos oppositos semper in partes duas æquales; ac vtrum duo diametri in parallelogrãmo se mutuo secantes ab oppositis angulis ductæ sint semper inter se se æquales. Quæstiones hasce omnes distinguit, & partim geometricè demonstrat, partim sine geometricis figuris absolutè doctè, vt semper, Proclus, à quo alij longioribus easdem ambagibus diducunt. Accipe hìc à Procl breuiarium absolutorium propositarum dubitationum primò sine figuris geometricis; mox, ac secundo loco geometricis figuris applicationes à Griembergero dabimus.

2 Vt itaq; paucis rem complectar in quadrangulo quidẽ *(id est in quadrato)* & dimetientes æquales sunt propter angulorum rectitudinem, & anguli bifariam a dimetientibus secantur propter laterum æqualitatem, & area bifariam per diagonium diuiditur propter communem parallelogrammorum proprietatem: in parte altera longiori verò dimetientes quidem æquales sunt, eo quod rectangulum est, anguli autem à dimetientibus bifariam non secantur, eò quod non est æquilaterum, spatiorum verò in partes æquales diuisio huic quoq; inest quatenus parallelogrammum est. In Rhombo autem inęquales quidem dimetientes sunt, quoniam non est rectangulum, ab his verò non solum spatia bifariam secãtur, quoniam est parallelogrammum, sed anguli etiam quoniam æquilaterum est; in reliquo verò, nempè in Rhomboide, & dimetientes inæquales sunt tamquam non rectangulo, & anguli ab his in partes inæquales secantur tamquam non æquilatero; sola autẽ spatia, quæ sunt ad vtrasq; diagoniorum partes, æqualia fiunt, tãquam parallelogrammo existente.

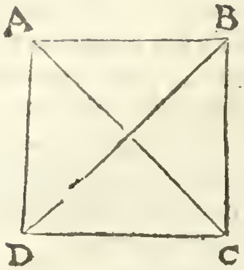
Nota non solum regulas, sed & regularum rationes doctè, ac breuiter indicatas.

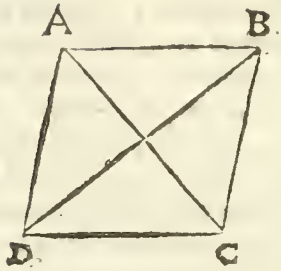
Vbi ergo in parallelogrammis angulorum est inæqualitas, est & diametrorum. dum enim oppositi duo anguli in Rhombo, & Rhomboide dilatantur in obtusos, duo arctantur in acutos, hi producunt, illi breuiant diametrum.

Nostra etiam epitome cũ rationibus.

Dum vero in parallelogrammo altera parte longiore, & in Rhomboide latera sunt inæqualia, ijs anguli subtensi ad bases, siue ad diametrum vtrinq;, sunt & ipsi inæquales, &c.

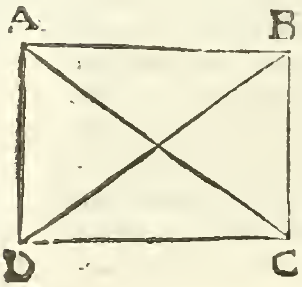
3 Figuris applicatas geometricas demonstrationes accipe,

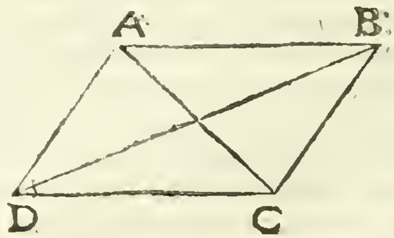




In Quadrato, & Rhõbo anguli secãtur bifariã à diametris.

Dico primo in quadrato, & Rhombo angulos A, C secari bifariam à diametro AC. Latera enim CA, AD æqualia sunt lateribus AC, AB, & basis CD basi CB. ergo, per 8, angulus CAD angulo CAB.





In Oblõgo, & Rhõboide anguli non secãtur bifariam.

Dico secundo in oblongo, & Rhomboide angulos A, C secari à diametro AC non bifariam. Est enim angulus BAC minor angulo BCA, per 18, & per 29 BCA est æqualis alterno CAD. ergo BAC minor est CAD.

In quadrato, & oblõgo diametri se mutuo secantes sunt æquales.

Dico tertio in Quadrato, & oblongo diametros AC, BD esse æquales, per 4. quia circa æquales angulos, nempè rectos, latera DA, DC, sunt æqualia lateribus BC, CD.

In Rhõbo, & Rhõboide diametri sũt inæquales.

Dico quarto in Rhombo, & Rhomboide diametrum AC, quæ subtendit minorem angulum D, minorem esse diametro BD, quæ subtendit maiorem C. Sunt autem D, & C inæquales, quia simul sunt æquales duobus rectis, per 29, & per definitiones neuter est rectus. Cum enim latera DA, DC sint æqualia lateribus CB, CD, & angulus D minor angulo C, ex hypothesi, erit basis AC minor base BD, per 24.

§. V.

§. V.

SCHOLION.

De Geodesia. In eà vsus ex hac 34 prop. &c.

Geodesia versatur circa figurarum diuisiones.

GEodesia pars ea est propriè Geometriæ practicæ, quæ versatur circa figurarum diuisiones, quæ ortū habuit ab Aegyptijs, quorum campos ac terminos Nili confundunt alluuiones; aquis deinde recedentibus, necessitas iustæ diuisionis eam Geometriæ praxim produxit. Extat ingeniosissimus libellus de planarum figurarū diuisionibus, qui Machometo Bagdedino Arabo tribuitur. Addidit Commandinus in eodem argumēto libellum alterum acutissimum.

Ortum habuit à Nili innundationibus.

Libri de Geodesia, & Authores, &c.

Ii verò authores figuras planas triangulares, quadrangulares, ac plurilateras varie diuidunt non tam in æqualia, quàm secundum datas proportiones per lineas vel ab angulis, vel à lateribus ductas, atq; etiam per æquidistantes vario modo lateribus figurarum diuidendarum. Cæterum quoniam eæ diuisiones apud eos Authores excedunt Tyronum institutionem, ac egent alijs sequentibus libris Euclidis, nos contenti erimus terminis hic ab Euclide in hoc 1. lib. positis, & simplicioribus, ac paucioribus aliquot exemplis tantùm circa parallelogrammata; & inferius ad propos 38 circa triangula vsum, & applicationem aliquam Eucl. expediemus. Modi autem nostrarum diuisionum deduci possunt aliqua ex parte à modis, quibus vsi sunt prædicti Authores Geouetæ.

§. VI.

§.VI.

PROBLEMATA Geodetica in Parallelogrammis quadrilateris.

Nam, vt videbis inferius, sunt & parallelegrammata etiam plusquam quadrilatera.

PRIMVM PROBLEMA.

Aream, siue campum parallelogrammum bifariam diuidere per rectam lineam ab vno angulorum deductam.

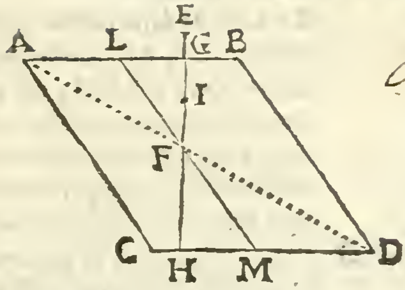
PAtet praxis ex hac 34 proposit. Eucl. ductà diametro per angulos oppositos.

SECVNDVM PROBLEMA.

Aream, siue campum parallelogrãmum duas in partes æquales dispescere per lineam rectam eductam è loco vel extra, vel intra campum, vel in aliquo laterum sumpto.

FInge pro campo parallelogrammo figuram ABCD, & locum datum extra campum bifariandum esse in E, vnde iuberis bipartiri campum ABCD. Per oppositos angulos, ceu per A, D duc chordulam diametralem, & per medium eius pũ-

ctum



ctum F duc ab E palo alligatam alteram chordulam secantem latus AB in G, & productam vsq; in H oppositi lateris CD; mox ducto sulco GFH, dico bifariatum esse campum in duas partes æquales, ACHG, GHDB.

Quoniam enim in triangulis AGF, FHD anguli ad verticem F sunt æquales, & alterni GAF, FDH, & AGF, FHD æquales, & per constructionem rectæ AF, FD æquales, quæ æqualibus angulis adiacent, ergo, per 26, erunt & reliqua latera, quæ æquales angulos subtendunt, æqualia AG, HD, & GF, FH; ergo triangula æqualia erunt AFG, HFD. Addito communi trapezio GFDB, erit totale trapezium GH DB æquale totali triãgulo DAE; at hæc est dimidium parallelogrammi ACDB, per hanc 34, ergo erit trapezium GHDB dimidium eiusdem ACDB.

§.VII.

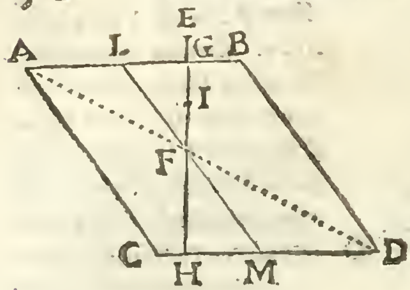
COROLLARIVM I.

Recta linea vndecunq; ducta secans parallelogrammi vnum latus ita, vt secet diametrum bifariam, secat & parallelogrammum bifariam.

Patet ex antecedenti demonstratione hoc lucrum geometricum vniuersale.

Aliter secundum antecedẽs problema exequi.

SI neutra ducta sit diameter, satis est vt quælibet alia sit linea bifarians parallelogrammũ, velut LM, quæ ducta sit per puncta



cta L, & M bifariantia latus vtrunq; AB, CD. nam anguli alterni GLF, FMH, & ad verticem F, sunt æquales, & LF, FM æqualiter secta in constructione, siue operatione, ergo per 26, æqualia sũt triãgula LGF, FHM, & commune GFMDB appositũ ipsi FHM est æquale quadrilatero LMDB, quod, per suppositionem, est dimidium parallelogrammi ACDB bifariati ab ipsâ LM.

§.VIII.

LEMMA.

Recta linea diuidens bifariam opposita parallelogrammi latera diuidit & parallelogrammum bifariam.

QVod autem ipsa LM bifarians latera AB, CD in L, & M, bifariet etiam parallelogrammum ACDB, patet ductâ diametro AD. Nam quadrilaterũ LMDB est æquale triãgulo ADB. Sunt enim æqualia AFL, FMD propter angulos alternos LAF, FDM, & ALF, FMD æquales, & latera illis adiacentia AL, MD æqualia secta.

§.IX.

§. IX.

COROLLARIVM II.

Recta linea vndecunq; ducta secans parallelogrammum ita, vt secet bifariam aliam quamcunq; lineam (licet non diametrum) bifariantem parallelogrammum, secat & parallelogrammum bifariam.

Corollarium hoc secundum adhuc vniuersalius est antecedente corollario primo. Neq; enim adstrictum est bifariationi solius eius rectæ parallelogrammum bifariantis, quæ per oppositos angulos ducta sit, & propriè diameter appellatur; sed vagatur per infinitas alias lineas, quæ per infinita laterum puncta traductæ possunt parallelogrãmum bifariare. Patet hoc Corollarium ex § 7 anteced. vbi aliter exequimur secundum problema.

Prædicta duo problemata, & corollaria diduximus, licet aggerari potuißent in vnicam propositionem; tamen ad maiorem facilitatem, & distinctionem pro Tyronibus ita digessimus, vt paulatim à minus vniuersalibus ad magis vniuersalia recto naturæ ordine gradum faceremus.

§. X.

PARADOXVM.

De figuris etiam vltra quadrilateras parallelogrammis.

ID, quod ad definitionem de parallelogrammo, & in antecedẽtibus ad hanc 34 indicauimus, hic propositum paradoxum paucis exponamus, & antecedentia omnia demonstremus, & vsurpemus etiam in infinitis (quæ fieri possunt) alijs figuris vltra quadrilateras. Sit ergo. —

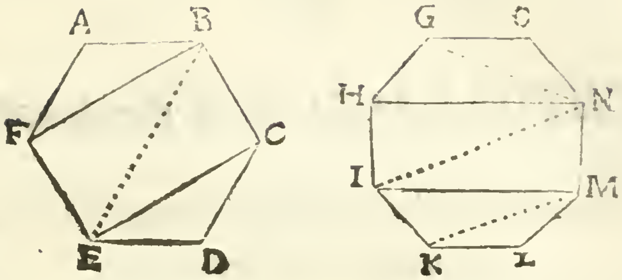
— THEOREMA.

Omnis figura plurilatera regularis, & pari laterũ numero est paralellogrãmum.

Omnis figura plurilatera regularis, & Pari laterum numero est in oppositis lateribus parallelogramma.

1 *QVod Proclus, & alij post eum, è corollarijs propos. 32, & ex inuestigatione quantitatis angulorum in infinitis figuris regularibus, nos aliter, ac simplicius expediamus, atq; inuestigemus è vestigijs geometricis antepositis § 2. Esto regularis fig. pari numero laterũ hexagona ABCDEF. Opposita latera æqualia BC, FE iungant rectæ FB, EC. Quoniam triangulorum AFB, ECD anguli A, D, & latera FA, AB, ED, DC, per supposita, sunt æqualia, erunt & reliqui anguli F, B, F, C tum inter se, tũ reliquis alterius trianguli æquales, per 4, & 8 prop. Ac præterea bases FB, EC, & triangula inter se æqualia. Ab æqualibus ergo angulis ABC, BCD, DEF, EFA detractis æqualibus ABF, AFB, DEC, ECD, remanent æquales FBC, BCE, CEF, EFB; ergo, per hanc 34, parallelæ sunt BC, FE.*

Eodemq;



Eodemq; modo de reliquis oppositis lateribus demonstrabitur in Hexagono.

2 In octogono, & alijs figuris regularibus laterum numero pari proportionaliter per plura triangula demõstrare licebit parallelismum binorum oppositorum laterum. In octogono GHIKLMNO iunctis ad oppositorum laterum extrema rectis HN, IM, & factis triangulis NGO, NHG, MKI, MKL, triangula isoscelia NGO, MKL sunt, per 4 pri. æqualia lateribus, & angulis, &c. Ex totalibus vero angulis æqualibus HGO, IKL si detrahantur æquales partiales OGN, MKL, remanent æquales HGN, IKM comprehensi sub HG, GN, & sub IK, KM; quæ latera sunt æqualia alterum alteri, & reliqui anguli reliquis æquales. ergo pari modo, vt in Hexagono, ex æqualibus ONM, NML, KIH, IHG detractis ONH, IML, qui sunt ex partialibus æqualibus compositi, atq; inter se æquales; item detractis æqualibus GHN, KIM, relinquuntur æquales IHN, HNM, NMI, MIH oppositi in parallelogrammo HM.

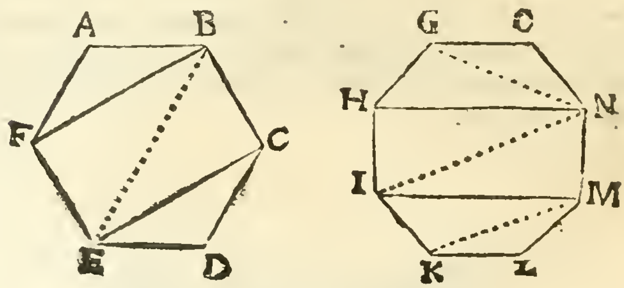
§.XI.

THEOREMATA, & Problemata Geodetica circa diuisiones parallelogrammorum plurilaterorum.

EXercitationis geometricæ gratià pro Tyronibus iuuat applicationes, & vsus antedictos de quadrilateris, etiam in plurilateris parallelogrammis saltem indicare.

THEOREMA I.

Parallelogrammata plurilatera bifariam secat ducta diameter per oppositos angulos.



IN Hexagono, & Octogono, &c. diametri FB, IN dispescunt in æqualia vtrinq; triangula tum parallelogrammata quadrilatera FC, HM, tum reliquas figurarum partes, ex hac 34 pri. Eucl. & ex antemonstratis à nobis ad eam.

Theo-

THEOR. II.

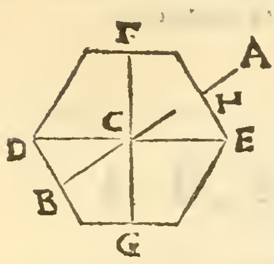
In parallelogrammis plurilateris recta bifarians opposita latera, bifariat & totam figuram.

Patet ex lemmate posito in § 8, & eodem modo quo indicatũ est de bifariatione factà à diametro ad oppositos angulos.

§. XII.

PROBLEMA.

Parallelogrammata plurilatera bifariam diuidere ex puncto quolibet extra, vel intra figuram dato.



Exemplum esto in hexagono, quod Tyrones pari proportione deducant ad octogona, decagona, &c. Ex A extra dato duc rectã AB ita, vt bifariet in C, vel diametrum DE, vel aliam FCG bifariantem hexagonum; eritq; ab HB pariter diuisa figura in duas partes æquales HBGF, HBDF. nã HBGEH est æqualis alterutri dimidio vel DEGBD, vel FGEHF. Quod probatur paribus modis, quibus vsi sumus in § 6 antecedentiũ circa secundũ problema, &c.

Sunt enim triangula DCB, HCE æqualia, per 26 pri. Nam, vt probatũ in § 11, parallelæ sunt DE, HF, & anguli alterni EHC, CBD æquales, item ad verticem C æquales, & latera DC, CE diametri DE, (bifariatæ per constructionem à rectà AB in C) sunt æqua-

ęqualia, & opposita æqualibus angulis H, B. Cōmuni ECEGB apposito, fit ęquale HBGEH dimidio DECBD.

Eadem erit ratio in operatione, ac demonstratione si punctum datum sit vel in latere, vel intra figuram. nam ducta per id recta bifarians rectas in C bifariabit & aream figurę.

§. XIII.

Praxis organica expedita, & vniuersalis pro diuisionibus parallelogrammorum.

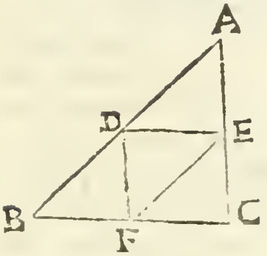
QVę hactenus demonstrata sunt ad hanc 34 Eucl. à § 6 inclusiuè per reliqua sequentia hucusq; possūt breuissimo, & expeditissimo compendio organicæ praxis exerceri, si regula aliqua lignea puncto sui medio apponatur ad punctum, vbi sit bifariatum aliquod filum ductum ad oppositos angulos figuræ ligneæ, vel alteriuscūq; materiæ parallelogrammæ etiam plurilaterę ex earum genere, de quibus in antecedētibus. Regula enim gyratilis circa clauiculum fixū in bifariatione fili, bipartietur semper in duo æqualia figuram parallelogrammam, quomodocumq; regula voluatur circa clauiculum. &c. Ex anteaictis theorematibus applica tute, mi Tyro, praxim hanc figuris. Satis nobis est hìc indicare quod facilè patet ex antedictis.

§. XIV.

PROBLEMA.

Datum triangulum expeditissimè diuidere in quatuor æqualia, & æquiangula triangula.

1 *PErtinet hoc etiam problema ad Geodesiam, & demonstratur ex hac prop. 34 Eucl. licet sit de trianguli, non de parallelogrammi quadrilateri, vel plurilateri diuisione. Nos id hìc*



hic soluemus sine vsu 2 prop. lib. 6. Euclidis, qua vtūtur alij. Dati triāguli ABC latera singula bifarientur in D, E, F, & iungantur lineis puncta bifariationum. Dico 1 ABC esse diuisum in quatuor triangula inter se se æqualia ADE, EDF, FDB, FEC. Sunt enim trianguli DEF latera parallela basibus, siue lateribus triāguli ABC, nempe DE ipsi BC, & DF ipsi AC, & FE ipsi BA, per ea quæ demonstrauimus ad 31 propos. Euclid. § 4 in vsibus ducendarum parallelarum per bifariationem duorum laterum trianguli, vt & hic factum est. Igitur parallelogrammata sunt ADFE, BDEF, FDEC, & per hanc 34 Euclid. ea bifariam diuidunt diametri DE, DF, FE. Ergo triangula BFD, DEA, EFC sunt singula æqualia quarto FDE Ergo totum ABC in quatuor æqualia, &c.

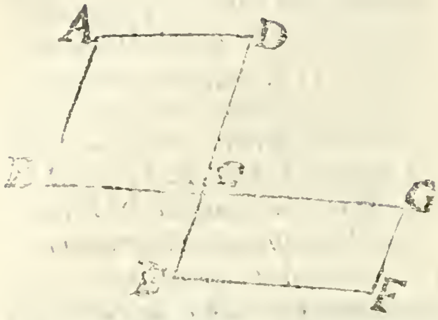
Dico 2 eadem quatuor triangula esse æquiangula, quod patet per 29, & corollar. ex 32 li. 1. sunt enim in parallelogrammis alterni anguli ad diametros bini binis æquales, & reliquus tertius reliquo tertio. Tu applica, mi Tyro, & utere aliquà industriâ tuâ, Ideo hic indico, non expono,

§. XV.

THEOREMA.

Parallelogrammata, quæ habent vnum vni angulo æqualem, æquiangula sunt etiam in reliquis angulis,

P*Arallelogrammata BD, EG habeant angulos C æquales, Dico habere & reliquos D, G; A, F; B, E æquales inter se, ac proinde esse æquiangula. Angulis C ita iungantur parallelogrammata vt latera DC, CE; BC, CG conficiant duas rectas DE, BG, iuxta praxes ad prop. 14, & 15 lib. 1. Angulis igitur ad verticem C æqualibus, etiam, ex hac 34, oppositi F, A erunt*



A erunt æquales iisdem ad verticem, & inter se. Rursus, quoniam in parallelogrammorum latera AD, EF eidem CG, & inter se parallela, per 30 huius, cadit recta DE, ergo angulos alternos ADE, DEF facit æquales, per 29 huius: ergo iis oppositi, & per hanc 34, æquales B, & C sunt & inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

§. XVI.

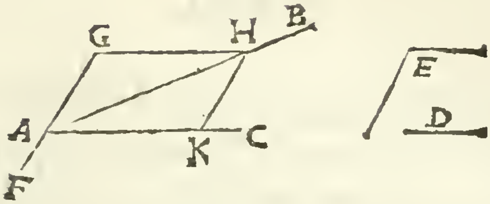
Dignum est non omissione problema, quod Peletarius apponit, & soluit ex vsu huius 34 propos.

PROBLEMA.

Inter duas lineas interminatas ad angulum datum coniunctas, lineam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri angulo dato æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis esse minores.

Sint duæ lineæ AB, & AC, constituentes angulum datum BAC, sed quæ sint interminatæ ex parte extẽsionis earum: sitq; linea data D: angulusq; alter datus E. Volo inter duas AB, & AC collocare lineam æqualem lineæ D, quæ cum altera illarum faciat angulum æqualem angulo E dato, Modo tamen duo anguli A, & E sint minores duobus rectis. Alioqui fieri non posset Triangulum, per decimam septimam.

Pla-



Placet ergo vt angulus constituendus sit super lineam AC. Super pūcto A facio angulum CAF æqualem angulo E dato, per vigesimam tertiam Propositionem: & ex altera parte produco FA ad punctum G, sic vt AG sit æqualis lineæ D datæ, per secundam: Et per punctum G duco, per trigesimamprimam, GH parallelam ipsi AC: quam produco eousque vt concurrat, siue secet AB in puncto H: itidemque per punctum H duco HK parallelam ipsi GF, quæ secet lineam AC in pūcto K. Dico iam lineam HK cōstitutam inter duas AB, & AC, esse æqualem lineæ D, & angulum K esse æqualem angulo E dato.

Quoniam enim ex constructione, AGHK est Parallelogrammum: erit KH æqualis AG, per trigesimamquartam Propositionem: quapropter & ipsi D lineæ æqualis, Quod est prius.

Et quoniam AK in duas parallelas FG, & KH incidit: erit angulus AKH æqualis angulo FAK, per primam partem vigesimę nonæ: quum sint alterni: quapropter & idem K angulus ipsi E angulo dato æqualis. Linea igitur HK inter duas AB & AC collocata, & lineæ D æqualis, facit angulum K æqualem angulo E dato, quod erat constitutum. *Prædicta Peletarius.*

SCHOLION.

QVandoquidem Peletarius antecedens problema apponit huic 34 propos. Eucl. tanquam ex ea soluendum, ac soluit alteram partem de æqualibus D, & KH, quia ex hac 34, opposita latera sunt KH, AG in parallelogrammo æqualia, &c. debuit, pro instituto, probare etiam æqualitatem angulorum E, & AKH, quia in parallelogrammo GK anguli oppositi AKH, AGH sunt æquales, est verò G internus æqualis externo FAK, qui constitutus est æqualis dato E.

V u u *§. XVII.*

§. XVII.

Vsus parallelogrammorum in antiquo aptissimo instrumento librandis aquis. Vsus etiam normæ pro ijsdem aquarum librationibus.

1. *DVm in lineis parallelis, & in parallelogrãmis theoricè cum Euclide iam pridem per aliquas Propositiones versamur, ac per alias etiam versabimur, & ad propos. 31, præter alios parallelarum linearum vsus, docuimus etiam libellationes in aere per parallelas, aquum, ac vtile pariter censuimus hic ad finem huius prop. 34 (vbi primum figuram sub parallelis vocat parallelogramma) parallelogrãmorum etiam vsum indicare circa librationes aquarum, quas Antiqui egregiè peragebant instrumento quodam parallelogrammo, cui nomen:* Chorobates. *Cuius formam, & vsum Vitruuius lib. 8. cap. 6 describit sic.*

Chorobatis instrumenti aquarum librarij descriptio.

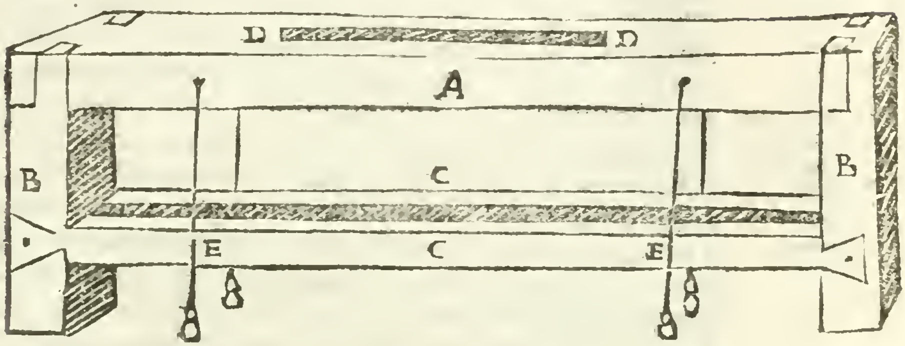
Chorobates est regula longa circiter pedum viginti, ea habet ancones in capitibus extremis æquali modo perfectos, inq; regulæ capitibus ad normam coagmẽtatos, & inter regulam, & ancones à cardinibus compacta transuersaria, quæ habent lineas ad perpendiculum rectè descriptas, pendentiaq; ex regula perpendicula in singulis partibus singula, quæ, cum regula fuerit collocata, eaq; tangent æquè, ac pariter lineas descriptionis, indicabunt libratam collocationem. Sin autem ventus interpellauerit, & motionibus lineæ non poterunt certam collocationem facere, tunc habeat insuperiori parte canalem longum pedes quinq;, latum digitum, altum sesquidigitum, eoq; aqua infundatur, & si equaliter aqua canalis summa labra tanget, scietur esse libratum. Ita eo Chorobate, cum perlibratum ita fuerit, scietur quantum habuerit fastigij.

Obiectio contra librationes factas in aquis.

Fortassis qui Archimedis libros legit dicet non posse fieri verã ex aqua librationem, quòd ei placet aquam non esse libratam, sed sphæroides habere schemma, & ibi habere centrum, quod loci ha-

habet orbis terrarū. Hoc autem (siue plana est aqua, siue sphæroides) necesse est extrema capita canalis regulæ pariter sustinere aquam. Si in autem procliuatus erit ex vna parte, quæ erit altior, non habebit regulæ canalis in summis labris aquā. Necesse enim est quocunq; acua sit infusa, in medio inflationem, curuaturāq; habere, sed capita dextra, ac sinistra inter se librata esse.

Solutio obiectionis.



2 *Schema Corobatis, quod apud Vitruuium desideratur, hic accipe iuxta ipsius verba ex eruditissimo Daniele Barbaro. Regula longa circiter pedes 20 est quæ notatur à nobis literà A. Ancones vbi B. Transuersaria C. Canalis, in quem aqua infundenda, inter DD. Est id instrumentum facilitate, magnitudine, certitudine non solum à perpendiculis, sed etiam ab aquai æquilibratione aptissimum aquarum librationibus.*

Librare verò aquas nil aliud est, quam (vt rectè Hermolaus) altitudinem loci sumere, in quo aqua est, eamq; comparare, & referre ad eius loci altitudinem, ad quem producenda est. Cui negotio mirificè inseruit Chorobatis parallelogrammum, quod & compactum est è regulis ligneis parallelis, atq; oppositis, ac præterea etiam alterum partiale parallelogrammum habet sub perpēdiculis parallelis. &c.

Quid sit aquas librare.

3 *Iam verò oppositæ hic figuræ verba Vitruuij aptato, mi Tyro, vt & eorum intelligentiam, & instrumenti vsum à Vitruuio indicatum aßequare. Nihil enim nobis superest Vitruuij verbis addendum. Si Chorobatem forma minore construxeris, habebis instrumentum certißimum pro libellationibus horizontalibus, id est quo explores plana an sint horizonti parallela, non solum ex communi vsu perpendiculorum, sed etiam ex vsu aquai æquilibratæ in canaliculo D. Igitur siue in planorum libellationibus, siue in*

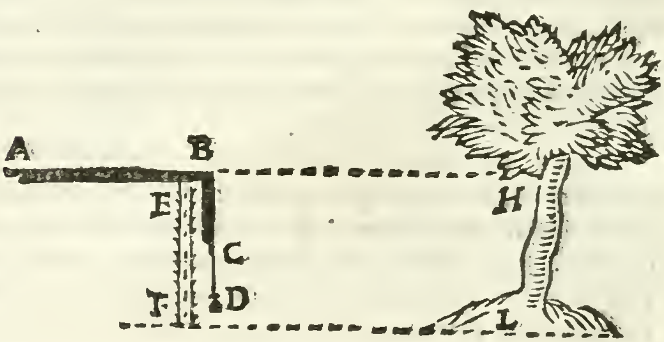
Chorobates pro libellationibus planorum horizontalium.

aquarum librationibus, cum & planum horizonti æquidiſtat, & Fons æquè altus eſt, ac locus ad quem adducenda eſt aqua, Chorobates cum perpẽdiculis exhibet parallelogrammum rectãgulum; cum verò non rectangulũ exhibet, indicat & planum non æquidiſtare horizonti, & alterum duorum terminorum, qui ſpectantur iuxta regulam A, depreſſiorem, vel altiorem eſſe, depreſſiorem eum qui eſt ad partes regulæ A, vbi perpendiculi filum facit angulum internum obtuſum. &c. Itemq; ad alterum extremorum D, & ad partes, ad quas aqua in canaliculo altior eſt.

Vſus Chorobatis in libellationibus, & in aquarum librationibus.

4 Vt vero, factà libràtione, aqua educatur, incilia, ſiue tubi, per quas fluere debet, inclinanda clementer ſunt, ne nimis inclinata in præceps cum damno aquam profundãt, ac effundant. Affirmant harum praxeωn periti, lineam, quæ terræ ſphæricam ſuperficiem tangat, productam ad vnum milliarium, in ſui extremo diſcedere à terræ ſuperficie ſpatio vnius pedis, ſiue decem digitorum. Itaq; in librationibus, ac eductionibus aquarum incilia, & canales non in rectam æquilibrationem, ſed in inclinatam facienda ſunt, iuxta prædicta, per ſingula milliaria ſenſim ad ſpatium vnius pedis deſcendentia. &c.

Linea terram tãgẽs quantũ efficiat angulum cõtactus.



5 Licebit & normà cum perpendiculo vti etiam ad aquarum librationes (præter vſum, quem docuimus §. 11 ad prop. 31) vt vides in repoſità hic figurà, ſi fingas in H eſſe fontem aquarum. Nam ſi perpendiculum BD radet rectangulum normæ latus BC, erit locus in B, vel F, ad quem deducenda erit aqua, æquè altus, ac fons in H, ac propterea incile ab L ad F inclinandum erit leuiter, vt aqua profluat. Sin autem perpendiculum BD recedat à latere BC

Vſus normæ pro librationibus aquarum.

ver-

versus H, erit fons depressior; sin autem perpendiculum cadat intra latus BC versus E erit fons altior, &c. itaq; aqua deductæ fluet. &c.

Quod si canalem rectangulum excauatum, & aquà infusum affigas ad normæ latus alterum AB, habebis & ab aqua certam explorationem, vt in Chorobate, pro librationibus aquarum ex nouo normæ vsu.

6 Circa negotium librationis aquarum minutiora persequi non est huius loci, vbi potius Euclidis elementum pro tyronibus spectamus, & ea indicamus; quæ apud alios fusius exposita pro eorum instituto extant. Scimus & à neotericis vsurpari pro librationibus aquarum varia alia instrumēta diuersa à Chorobate. nos id exposuimus ex occasione figuræ parallelogrammæ ad Euclidis hasce propositiones, & vt lucem adderemus illustri scriptori Vitruuio pro iis, qui antiquam eruditionem amant, & Veterum ingeniosè inuenta demirantur.

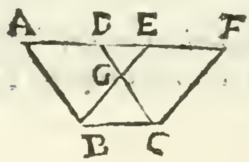
Quod pertinet ad nominum Chorobatis, inciliorum, &c. interpretationes, videat Tyro nomenclatores; nec a nobis requirat pro Geometricà Philosophia Grammaticam.

Tre-

Propos. XXXV. Theor. XXV.

Parallelogramma in eadem basi; & in iisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SVnto parallelogramma ABCD, EBFC in basi BC, & in parallelis AF, BC constituta. Dico ABCD æquale esse ipsi EBFC. Cum enim ABCD parallelogrammum sit,[a] erunt BC, AD æquales: eandem ob causam EF, BC æquales erunt:[b] vnde & AD ipsi EF æqualis erit; & communis est DE: [c]ergo tota AE toti DF æqualis est. Est [d] verò & AB ipsi DC æqualis: duæ ergo EA, AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, sed & [e] angulus FDC angulo EAB æqualis est, externus interno:[f] quare & basis EB basi FC æqualis erit, & triangulum EAB triangulo FDC. Commune DGE auferatur, & erit[g] reliquum trapezium ABGD reliquo EGFC æquale. Apponatur communis GBC triangulus:[h] totii ergo ABCD parallelogrammum toti EBFC æquale erit: ergo parallelogramma in eadem basi, &c. Quod oportuit demonstrare.



a prop. 34. 1.
b ax. 1.
c ax. 2.
d prop. 34. 1.
e prop. 29. 1.
f prop. 4. 1.
g ax. 3.
h ax. 2.

§.I.

SCHOLION.

Quænam sint apud Geometras theoremata, & problemata localia, additis exemplis illustrata.

Theoremata sequentia 35, 36, 37, 38, & 41 sunt localia plana. Et primum exemplum eiusmodi localium planorum theorematum apud Euclidem est hæc 35 propositio. Ad cuius rei intelligentiam huc aliqua (præter ea, quæ ex Pappo attulimus §4 ad 1 propos huius) conferemus partim ex Eutocij Ascalonitæ commentario in epistolam Apollonij ad suos libros de Conicis, partim ex Procl. ad hoc 35 theor.

Species locorum à Geometricorum, & quot singula sint.

Loci apud Geometras alij sunt in lineis, alij in superficiebus. Qui in lineis alij plani, alij solidi. Locus in lineis, & in superficiebus appellatur situs, qui nõ est determinatus in vnico aliquo puncto lineæ, vel in vnicà determinatà lineà superficiei, sed est in tota lineà, vel superficie, vnde propositionis proprietas, & affectio cõficitur. Loci lineares plani sunt qui in lineis, quarum simplex intelligentia in plano, vt rectæ sunt, ac circulares. Loci lineares solidi sunt in lineis, quæ fiunt e sectionibus solidorum corporum, vt conicæ sectiones, cylindricæ, &c. Omitto exempla in locis planis solidis, & in superficiebus, quia extra rem nostram sunt. Exemplum loci plani esto apud Eutocium in rectà lineà: Datà rectà, inuenire extra eam pũctum, à quo lineæ ad eius extrema ductæ inter se sint æquales. In hoc nõ vnum duntaxat est punctum problema efficiens, sed locus, quem continet linea à puncto medio lineę datæ ad rectos angulos ducta. Nam si data linea bifariam secetur, & ab eo puncto linea ad rectos ducatur angulos, quodcunq; in ipsà sumpseris punctum faciet illud, quod proponebatur.

Quid sit locus geometricus.

Exemplum loci plani linearis apud Eutocium.

Finge tibi figuram, mi Tyro, iuxta verba Eutocij, atq; in ea exerce problema ab eo propositum, ne nos in facillimis nimium immoremur.

Sic

Sic & in hisce theorematibus Euclidis vagatur licentia sumendi in qualibet parte alterius lineæ parallelæ (etiam in infinitum productæ) æqualem basi pro parallelogrammo, vel punctum quodlibet pro vertice trianguli; eruntq; parallelogrammata duo, vel triangula super eadem, vel æqualibus basibus inter eas parallelas semper æqualia, quantacunq; varientur obliquitate ad varios superioris parallelæ locos.

2 Omitto hìc exempla locorum planorum in lineis circularibus, qui in lib. 3. sunt, ceu sunt propos. 21, & 31. de angulis in eodem segmento æqualibus; item de rectis in semicirculo, de quo theoremate in 16, & 7 ad 32 huius Veritas eorum theorematum vagatur per locos, & puncta omnia eiusdem segmenti, & semicirculi. &c. Omitto & exemplum pertinens ad propos. 13. Sexti, de inuentione mediæ proportionalis, quod ab Eutocio vide apud nos ad proposit. cit. libri 6.

Exemplum loci plani linearis in l. b. 3 Eucl.

Prædictorum enim exemplorum de localibus theorematibus, & problematibus aliqua, licet non excedant sex libros priores Euclideorum elementorum, tamen hìc excedunt cognitionem Tyronum geometricam, quam suis in locis inferius adipiscentur, vt proposita exempla percipiant.

Adde, si lubet Eutocio, & Proclo Pappum in anteloquio libri 7 vbi de locis planis.

Loci plani in superficiebus exemplum videbis à nobis ad prop. 38 huius, §. 10.

§. II.

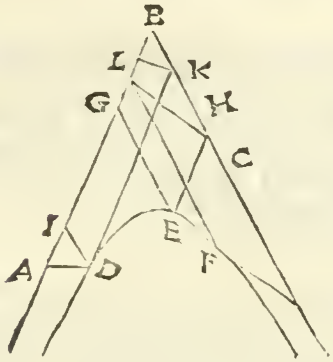
PARADOXVM-

–Theorematis localis de parallelogrammis æqualibus inter lineas asymptotos, & hyperbolen.

EGregium est exemplum theorematis localis solidi, quod innuit Proclus ad hanc propos. 35 Euclidis: Eorum localium theorematum, quæ solida vocantur, tale sit examplũ. Parallelogramma, quæ in lineis non coincidentibus, & hyperbole inscribuntur, æqualia sunt.

De-

Demonstraionem geometricam huius theorematis, quia pendet ab ijs, quæ sunt extra elementarem institutionem huius lib. 1. pro tyronibus, hic omitto, & sepono in Analectis ad 3 Apiar. in editione quarta meorũ Apiariorum, quæ iam pridem vulgata est. Hic tantum indico paradoxum in figura.



Hyperbolica sectio (cuius nomen, & naturam explicabimus ad propos. 29 lib. 6. Eucl.) sit DEF, ad cuius latera quantumuis producta sint asymptoti rectæ BA, BC, quæ scilicet (iuxta alibi à nobis explicata) in infinitum productæ, ac sẽper magis ad hyperbolicam sectionem accedentes, nunquam tamen eam cõtingent; à quocumq; puncto hyperboles DEF eductis rectis parallelis alterutræ asymptoterum, & factis parallelogrammis, ea omnia parallelogrammata sunt inter se æqualia, licet sint diuersiformia, nec intra easdem parallelas, nec super eàdem, aut æqualibus basibus. Quod est paradoxum, & extra conditiones parallelogrammorum æqualiũ ab Euclide demõstratorum in hac 35 propos. Ac sane mira est affectio spatij inter asymptotos, & hyperbolen, vt in eo parallelogrammata fieri non possint, quæ non sint omnia inter se se æqualia.

Sic ex puncto D eductà DK parallela ipsi asymptoto AB, & iũctis AD, LK parallelis, vel DI parallela ipsi BK. Item ex E eductis EG, EH parallelis vtraq; asymptoto. Item ex F eductà FL parallelà asymptoto BC, & ex F iunctà parallelà ipsi LH, vides quatuor parallelogrammata DALK, DIBK, EGBH, & FC, quæ omnia (& infinita quæcumq; alia cõstituenda à punctis infinitis hyperboles infra, & vltra D, & F) demonstrãtur inter se se æqualia.

Mirum quidem minus videtur super eadẽ basi DK, & inter easdem parallelas AB, DK, iuxta hic ab Eucl demõstrata, esse æqualia duo DALK, DIBK; at esse æqualia constitutis intra alias parallelas, & super alijs, ac diuersis basibus? velut ipsis EG BH, & ipsi FC sub FL, LC & lateribus oppositis parallelis, &c. hoc enim vero insolens est extra hanc 35 Eucl. ac mirè paradoxum. Demonstrationem vide in cit. Analectis nostris.

§.III,

SCHOLION.

De paradoxis Geometricis; & eorum exempla indicata apud Antiquos, & in Apiar. Philos. Math. speciatim spectantia ad hasce propos. Eucl.

Est hoc Theorema (*inquit Proclus*) & quod de triangulis sequitur, ex eorum numero, quæ admirabilia theoremata in Mathematicis disciplinis appellantur. Executi sunt enim Mathematici quoq; in Theorematibus, quemadmodũ stoici in argumentis, locum, qui admirabilis vocatur. & ponunt hoc etiam theorema è numero eorum esse, quæ huiuscemodi sunt, stupetq; Vulgus statim cum longitudo multiplicata spatiorũ æqualitatem non destruit, eàdem existente basi.

Apiaria tota sunt in Paradoxis Mathematicis.

Apud Pappum Alexandrinum habes exempla aliqua Paradoxorum Geometricorum ex Erycemo, præsertim circa inclusiones aliquarum figurarum intra alias. Nos ea indicauimus in nostro Apiar. 3. Progym. 9. Addimus verò & nostra Geometrica paradoxa linearum, angulorum, triangulorum, ac multiformium figurarum &c. Quemadmodum & sæpe in nostris hisce lucubrationibus ad Euclidem paradoxa plurima prosecuti sumus. Quinimmo etiam extra Geometrica per omnes Mathematicarum scientiarum partes euagati Apiaria nostra conflauimus in duos tomos è paradoxis vniuersæ Philosophiæ Mathematicæ. Quo te prouoco, mi Lector, si aues scire id quod hic affirmat Proclus de paradoxis apud Mathematicos non solum aliquibus, vt olim apud aliquos Veteres Geometras, sed innumeris in Machinaria, Astronomià, &c. quæ ibi apud nos legito. Speciatim vero spectant ad ditandas hasce propositiones Euclidis, quæ habes in Apiario 3 Progym. 8. toto. vbi ponũtur æqualia simul, & infinitè vel maiora, vel minora. &c.

§. IV.

§. IV.

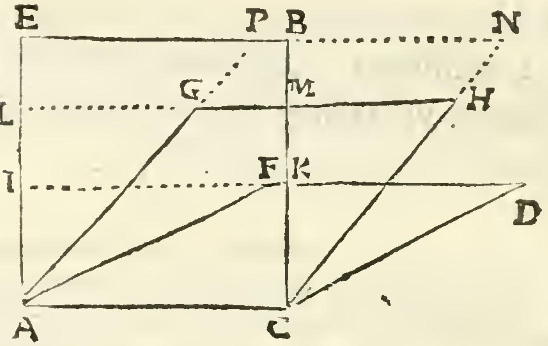
SCHOLION.

Theoriæ Geometricæ, ac vera ratio permanentiæ eiusdem quantitatis arearum in parallelog. vel triang. licet auctis in infinitum lateribus intra parallelas, &c.

1 *VNde nam sit vt quantumuis crescăt ambitus parallelogrammorum, ac triangulorum inter easdem parallelas super eădem, vel æqualibus basibus cōstitutorum, tamen quantitas etiam areæ in ijs figuris non crescat, Proclus indicat, vt habes in Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ, Apiario 3, Progymnasmate 8, præsertim Proposit. 4, & in vltimo Scholio post Prop. 7. vbi & figuris, & demonstrationibus geometricis, & à primis causis aperiuntur, ac soluuntur paradoxa omnia Geometrica prodeuntia ex Euclidianis hisce propositionibus. Hic interim est pretium operæ Procli verba, & doctas theorias nostris appositionibus illustrare. Miranti vulgo, & geometricorum miraculorum ignaro respondet Proclus:* Angulorum inæqualitas aream imminuit, longitudinis autem accretio quantum illa abstulit, tantum adijciens spatiorum æqualitatem seruat. Terminus autem accretionis longitudinis ipse parallelarum linearum locus est. Nam rectangulis quidem ambobus parallelogrammis existentibus, & æqualem ambitū habentibus, Quadratum Parte altera longiori maius esse ostenditur: æquilateris verò ambobus existentibus, & æqualem habentibus ambitum, quod est rectangulum maius esse ostenditur eo, quod rectangulum non est. Angulorum namq; rectitudo, & laterum æqualitas omnem habet vim ad augenda spatia. Vnde sane Quadratum quidem ijs omnibus quæ æqualem ambitum habent maius esse videtur: Rhōboides vero cunctis minus. *Rectè tu quidem, mi Procle; at vnde nam eam vim habent ex angulorum, & laterum inæqualitates, vt*

Angulorū rectitudo, & laterū æqualitas omnē habent vim ad augenda spatia.

in eàdem ambitùs quantitate imminuant, vel augeant parallelogr. vel angul. spatia? Vnde possunt eadem parallelæ, inter quas augetur, vel imminuitur figurarum earum ambitus, efficere vt non varietur figurarum area in quantitate? Aliqua Procli primo in figurâ ex Apiarijs illustremus, deinde nodos absoluamus.



Exempla prædictorū in figuris.

2 Vides rectangulum, seu quadratum AB maximum esse isoperimetrorum AH, AD, & quanto magis recedunt ab angulorum rectitudine semper imminui spatia magis, ac magis. Demonstratur enim à nobis in citato Apiar. 3. prog. 1. prop. 4 triangula AIF, CKD, item ALG, CMH esse æqualia. ergo rectangula AD, AK, item AH, AM sunt æqualia; at AK est pars ipsius AM, & AM ipsius AB, ergo semper minora sunt quanto recedunt ab angulo recto. Vide expressiora in cit. Apiar. & mox inferius in § 5 sequenti. Ex quibus proportione applicatis potest patere veritas reliquarum propositionum, quas affirmat Proclus in antepositis verbis.

Ratio geometrica cur angulorū rectitudo quantitatē areæ augeat, obliquitas imminuat.

Iam nodum obsoluo circa quæsitam rationem cur in primis angulorum rectitudo (cæteris paribus) in parallelog. vel triang. augeat quantitatem areæ, obliquitas vero angulorum imminuat. Rationem attulimus in citat. Apiar. quia rectitudo anguli attollit eas figuras in mensurâ perpendiculari. est enim ex defin. 4. ante lib. 6. Euclidis, altitudo figuræ linea perpendicularis à vertice ad basim deducta, & quanto maior est perpendicularis tanto maior est area figuræ. Nam, vt videbis, mi Tyro, paullo post ad 41 propos. quantitas areæ parallegr. & triang est à ductu perpendicularis in partem ambitùs, iuxta ibi dicenda. Eadem igitur perpendicularis altitudo duorum triangulorum, vel parallelogrammorum super eàdem,

Altitudo figuræ a perpendicularis, &c.

Quāto maior perpendicularis, tanto area maior.

dem, vel æqualibus basibus, tunc apparet cum sunt intrà easdem parallelas. Quid igitur mirum si, crescente ambitu in altera obliqua figurà, modo figura permaneat in eàdem altitudine perpendiculari (hoc est, perstet in terminis earundem parallelarum) permaneat etiam eàdem quantitas areæ? præsertim permanente pariter eàdem quantitate basium. Ex ductu autem perpendicularis in basim habetur quantitas areæ in parallelogrammis, & in dimidiam basim quantitas areæ triangularis, vt videbis inferius. &c.

Confirmãtur hæc nostra etiam à Proclo ad seq. 37, & 38 prop. Euclid. eàdem altitudo nil aliud est nisi in eisdem esse parallelis. &c. Altitudo est perpendicularis, quæ ab altera parallela ad reliquam se extendit. *Et:* cùm perpendiculari basis dimidium multiplicaueris, quod Trianguli spatio æquale est, habebis.

3 *Contraria ratione, quoniam in obliquatione figuræ, & in imminutione angulorum à rectis ad acutos, vt apparet in figura, demittitur perpendicularis, licet maneat èadem basis, ideo, imminutà mensurà, saltem alterà, ex quà quantitas areæ conficitur, etiam area imminuitur. Vt autem in eà obliquitate, ac demissione figuræ non imminuatur quantitas areæ, producenda sunt latera ad altitudinem parallelæ superioris, siue ad perpendicularem non imminutam. &c. Vide paullo post inferius, & ad prop. 37, §. 1.*

Angulorũ rectitudo attollit, obliquitas imminuit perpendicu arem ĩ figura, ĩde maior, vel minor area figuræ.

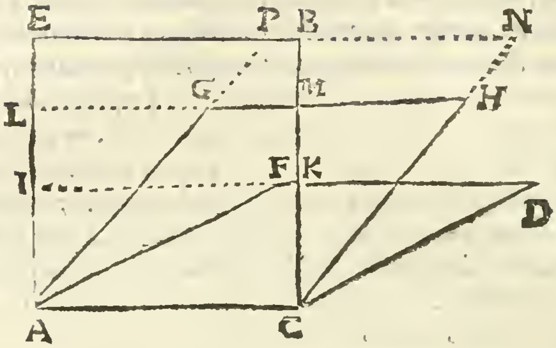
§.V.

SCHOLION.

Quantitatem areæ geometricè demonstrare, qua parallelogrammum vel in obliquitate imminuitur, vel productione laterum intra easdem parallelas augetur. &c.

A*ffirmationem Procli :* Angulorum igitur inæqualitas Aream imminuit, longitudinis autem accretio quantum illa abstulit, tantum adijciens, spatiorum æqualitatem seruauit, *geometricè breuiter demonstremus.*

Dico



Dico primo, producta HG in L, parallelogrāmum non rectangulum AH æquilaterum, & isoperimetrum rectangulo AB esse minus quantitate rectanguli LB. Producatur enim recta CH donec occurrat rectæ EB productæ in N. Producatur item AG in P. Quoniam recta LH cadit in parallelas AE, BC, facit angulum internum ILM æqualem externo FMH. Secat eadem LH parallelas AP, CN, & facit angulum externum LGA æqualem interno MHC; & parallelogrammi latera AG, HC sunt æqualia, ergo, per 26 pri. triangula LAG, MCH sunt æqualia, addito cōmuni AGMC, sunt æqualia AGHC, ALMC. At LC minus est toto EC quantitate rectanguli EM, ergo eadem quantitate EM erit minus GC ipso EC.

Dico secundo productione laterum AG, CH in P, & N augeri parallelogrammum AH eadem quantitate areæ EM. Quod facile sic expeditur. Sunt enim triangula APE, CNB æqualia eodem modo, quo in antecedentibus probata sunt æqualia AGL, CHM: Ergo, detractis æqualibus AGL, CHM, remanent æqualia LGPE, MHNB, addito communi PGMB, sunt æqualia ELMB, PGHN. Auctum est AH quantitate GN, hoc est æquali EM, qua imminutum erat. &c. Aliter, sed prolixius idem demonstratum omisimus, ac permittimus exercitationi geometricæ Tyronum.

§. VI.

§. VI.

COROLLARIVM I.

Parallelogrammata super eàdem basi habēt inter se proportionem, quam perpendiculares altitudinum. &c.

Hoc corollarium pleniori demõstratione probatum habebis etiam de triangulis super eadem basi, &c. in 2. to. huius Ærarij ad primam sexti libri. vbi aliqua supponuntur è lib. 5, & 6. Hìc quasi per corollarium indico ex antecedenti Scholio de parallelogrãmis; vt interim habeat Tyro vnde possit facile cognoscere proportionem imminutorum parallelogrammorum super eàdem basi. Vide ad cit. 1. propos. lib. 6. praxes alias Geometricas. Itaq; quas proportiones habent inter se altitudinum perpendiculares BC, BM, BK, easdem habent parallelogrammata AB, AH, AD. &c. Confer cum antedictis in Schol. antecedenti, & ad propos. 1. lib. 6. vide plura, &c.

§. VII.

COROLLARIVM II.

Aequalium areâ parallelogrammorum inter easdem parallelas minimum ambitu est rectangulum.

Licet ex paullo ante demonstratis pateat veritas huius corollarij, tamen etiam geometricè sic indico. Sunt :n. in parallelogrammis rectangulo AB, & non rectangulo AN latera quidem EB, PN æqualia; & AC commune, at latera

tera obliqua AP, CN sunt maiora lateribus AE, BC alterum altero. In triangulis enim AEP, CBN maiori angulo, idest rectis E, & B opponuntur. ergo per 19. &c.

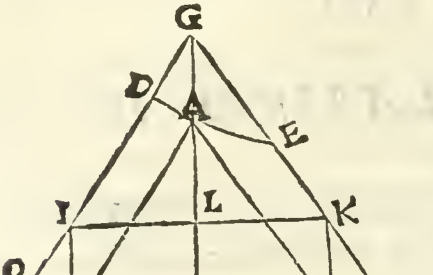
Applica eidem figuræ alias propositiones, quasi corollaria ex iam demonstratis.

§. VIII.

PROBLEMA.

Supra duo latera dati trianguli duobus parallelogrammis constitutis æquale parallelogrammum facilè costituere super reliquo tertio Trianguli latere.

E Primo theoremate libri 4 Collect. Math. Pappi hoc problema confecimus, ac quidem simplicius, quam apud Pappum, qui id alligat ad quantitatem anguli, &c. Quod verò ab aliis translatum est ad 47 propos. Eucl. hic absolui potest, sine ulla necessitate sequentium propositionum. Sit enim datum triangulum ABC, & parallelogrammata BODA, AEFC costituta sint super duobus lateribus AB, AC; producantur latera opposita lateribus trianguli, nempe ipsa OD, FE donec in angulum coeant ad G. Ex G per A verticem trianguli demittatur recta GH in basim. Mox ab extremis reliqui tertij lateris, siue basis BC erigatur duæ rectæ BI, CK parallelæ ipsi GH, & occurrentes in I, & K, lateribus OGF, ac deniq; iungatur IK. dico parallelogrammum



CBIK

CBIK æquale esse parallelogrammis duobus BODA, ACFE. Quoniam enim per constructionem parallelogrammata sunt BIGA, ACKG, erunt, per 34, æqualia opposita latera BI, GA, CK; & quoniam eidem GA sunt æquales, & parallelæ ipsæ BI, CK, erunt, per 1 axioma, & per propos. 30, etiam inter se se æquales, ac parallelæ; ac rectæ IK, BC, quæ æquales, ac parallelas BI, CK iungunt ad easdem partes, erunt & ipsæ parallelæ, atq; etiam æquales. erit ergo CBIK parallelogrammum. Quoniam igitur super eàdem basi BA, & inter easdem parallelas BA, OG sunt constituta parallelogrammata BODA, ABIG, erunt, per hanc 35 proposit. Eucl. inter se æqualia. Pariter erunt æqualia inter se FE AC, CKGA super eàdem basi AC inter easdem parallelas A, GF. Sunt autem super basi BI inter parallelas BI, HG æqualia etiam parallelogrammata BIGA, BILH, ergo & BODA, BILH erunt, per 1 axio. inter se se æqualia. Pariq; modo parallelogrammum LHCK, quod super basi CK inter parallelas GH, CK est æquale ipsi CAGK, erit etiam ipsi CAEF æquale; totum ergo parallelogrammũ IBCK, quod constitutum est super latere BC, æquale est duobus parallelogrammis BODA, AEFC constitutis super duobus lateribus BAC, &c. Quod erat peragendum.

§. IX.

SCHOLION.

Cautiones, & lucra vniuersalia in proximè anteced. problemate.

1 VT parallelogrammum BK fiat eius quantitatis, quæ æquet duo parallelogrammata OA, AF, determinanda est quantitas vtriusuis lateris BI, vel CK; ac præterea, vt in parallelogrammis BG, GC determinetur quantitas laterum IG, GK; & sint super eàdem basi parallelogrammata BG, IH, & GC, KH, necesse est apertè determinare (quod nos in demonstratione fecimus, ac alij omiserunt) ac producere rectas ex B, & C (ipsi GH parallelas) donec occurrant in I, & K lateribus OGF; Sic enim omnia rectè fiunt, & quantitas lateris

vtriusuis IB, CK, siue latitudo parallelogrammi BK determinatur. Nec est necesse (vt aliqui fecerunt) determinare BI ad æqualitatẽ cum GA. Eo enim ipso quod ducitur BI parallela ipsi GA, in parallelogrammo GB latera opposita BI, AG sunt æqualia.

2 Quod apud Pappũ (& apud alios ex eo) theorema est, nos, quia Tyrones iucundius versantur operando in Geometricis, problema effecimus. Eiusq; cognitionem, ac demonstrationem hìc anticipatã assequuntur Tyrones vna cum vniuersalitate maiori, quàm sit in 47 propos. Euclidis, qua Euclidis propositione nec hìc egent Tyrones, atq; accedunt ad 47 opiparè geometricè instructi.

Commandinus ad Pappum: Ab Euclide quod demonstratur in 47 propos. l. 1. de triangulo rectangulo, hoc hìc demonstratur de omni triangulo; quod ibi de quadratis, & in prop. 31. lib. 6. etiam de figuris similibus, hìc vniuersè de omnibus parallelogrammis etiam inter se dissimilibus demonstratur.

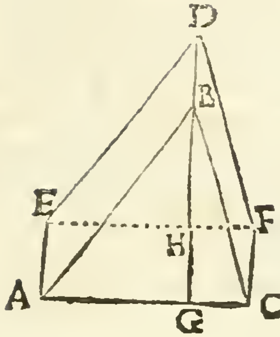
Vt verò magis ad paradoxum accedat, nos figuram effinximus, in qua parallelogrammata super lateribus AB, AC sunt valde inter se dissimilia, & inæqualia, ceu vides OA, AF. &c.

§. X.

PORISMA.

Supra latera dati trianguli constitutis duobus parallelogrammis commune latus habentibus, inuenire puncta, per quæ ducta recta linea auferat triangulum æquale dato triangulo.

SVpra latera AB, BC dati trianguli ABC constituta sint duo parallelogrammata AD, DC habentia commune latus DB, si per puncta angulorum E, F iungatur recta EF, auferet triangulum EDF æquale dato triangulo ABC. Producatur enim commune latus DB in G. per præcedens problema, parallelogrammata sunt EC, EG, GF, & latera opposita EA, HG, FC sũt æqualia, ac proinde HG erit æqualis ipsi DB, cui æqualia sunt latera



tera AE, CF opposita in datis parallelogrammis AD, DC. Quoniam igitur in parallelas ED, AB, item in parallelas EF, AC cadit ipsa DG, erunt anguli internus EDB, & externus ABG, item externus DHE, & internus DGA æquales, per 28 pri. Ac æqualibus DB, HG addita communi BH, erunt inter se æquales DH, BG. Cùm igitur in triangulis DHE, BGA æqualia latera LH, BG adiaceant angulis æqualibus in D, H, B, G, erunt, per 26, æqualia. Tariq; modo demonstrabitur triangulum DHF triangulo BGC æquale. Ergo totum triangulum DEF æquale est dato toti triangulo ABC. &c.

Aliter.

IN parallelogrammis AD, DC, CE opposita latera ED, AB, & DF, BC, & EF, AC sunt æqualia, ergo triangula EFD, BAC sunt æqualia inter se, per 8 propos. & eius corollarium.

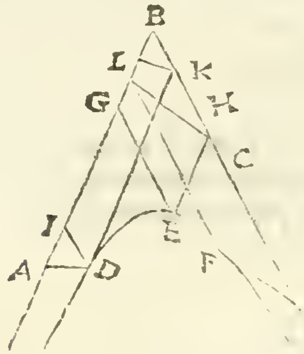
§. XI.

PARADOXVM –

– De finito etiam minimo, quod æquale est in infinitum producto.

QVandoquidem cum Euclide, & Proclo versamur in paradoxis ex hac 35, & seq. propositione non te dimittã, mi Tyro, quin hic ad finem nostrarum harum commentationum circa hanc Eucl. propositionem saltem indicẽ perquamadmirandum paradoxum, quod corollarij loco elicitur ex antedictis, præsertim § 2, & 3, scilicet : Finitum etiam mini-

mum æquale in infinitum producto. *Si in infinitum producitur, habet rationem quandam infiniti, nunquam finiti, ac finiendi. Quomodo verò quod rationẽ habet infiniti potest æquari finito? ac quidem etiam minimo in nostris exemplis. Nam intra easdem parallelas parum inter se distantes finge minimum triangulum, vel parallelogrammum, & super eadem basi aliud intra easdem parallelas in infinitum productas finge obliquius, ac semper magis in infinitum obliquius. Quod tamen ex hac 35 Eucl. erit æquale minimo illi alteri, &c Item in æqualitate inter se omnium parallelogrammorum inscriptorum inter asymptotos lineas (iuxta § 2 ad hanc 35) quæ in infinitum productæ, licet accedẽtes magis, ac magis, tamen sẽper sunt asymptoti, idest nunquam coincident; quoniam rectæ BA (accedenti ad hyperbolen ED in infinitum productã) potest versus B duci parallela alia recta ex puncto quolibet hyperboles infra D in infinitum producendæ, & fieri parallelogrammum semper, ac semper in infinitum productius inscriptum inter BA, ED asymptotos in infinitum producendas; quod parallelogrammum sit æquale alteri quãpotest minimo inter easdem asymptotos,*



per demonstrata in Analecto 10 ad nostra Apiaria; quomodo non summè paradoxa hæc sunt? quæ scilicet ostendunt finitum, etiam minimum, æquale tamen alteri in infinitum producto?

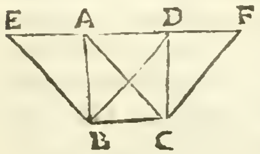
§.XII.

Vſus propoſ. 35 pro dimenſione arearum in parallelogrammis, non ſine ope circini proportionum.

S*Vppono defin.* 1. *lib.*2. omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum. *Videant Tyrones Clauium ad eam definitionem, vbi explicat ſimilitudinem eius cum multiplicatione arithmeticà.*

Praterea videant definitionem 16 libri 7, quæ eſt: Cum duo numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquẽ fecerint, qui factus erit planus appellabitur. Qui vero numeri mutuò ſe ſe multiplicant, latera illius dicuntur. *Rectè Clauius ad eam notat intelligendam de numero plano quadrangulari rectangulo.*

Suppono prateiea quæ dicta ſunt in antecedentibus de lineà perpendiculari, quæ ſola eſt certa menſura. &c.



Inſpice hìc figuram propoſitionis 37 Euclid. Sitq; alterutrum parallelogrãmorum EC, vel BF, quorum areas metiri libeat. ſuper baſi BC excitetur rectangulum eiuſdem altitudinis, ideſt inter eaſdem parallelas cum parallelogrammo ver. g. BF, deinde vtrumlibet laterum circa angulos rectos AB, BC, vel BC, CD diuide in parteſ æquales lubiti numeri ope circini proportionum, vt dictum eſt ad propoſ. 10 *huius, & multiplica alterum per alterum numerorum, in quos diuiſa ſunt duo latera circa angulum rectum, & productũ erit quantitas areæ non ſolum rectanguli ABCD, ſed etiam parallelogrammi BF. nam ea quantitas fit etiã non excitato rectangulo ABCD, ex ductu perpẽdicularis in latus, à cuius extremo perpẽdicularis cadit, velut ex CD in DF, vel in CB. Nos verò rectangulum constructum ſuper BC accipimus ad indicandam operationis demõſtrationem. Cum enim rectangulum ABCD & ipſum ſit parallelogrammum, &, per hanc 35 propoſ. Eucl. parallelogramma ABCD,*

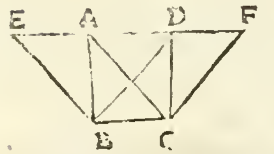
BF

BF sint super eàdem (vel super æqualibus, per seq. 36) basi BC, & in ijsdem parallelis EF, BC constituta, erunt inter se se æqualia. ergo dimenso ABCD, dimensum est & BF.

§. XIII.

SCHOLION.

Hallucinatio vitanda, praxis agraria, & aliæ dimensiones areales parallelogrammorum indicatæ.



1 E*Tiam ex ductu vtriuslibet obliqui lateris, velut ipsius BD in basim alterutrā BC rhombi, vel rhomboidis area cognoscitur, sed non in areolis partialibus regularis figuræ sub certis mensuris perpendicularium. Nam ex ductu laterum obliquorum rhombalium fit productum in Rhombulis, at ex ductu perpendicularium in rectangulo, vel quadrato fit numerus quadratulorum, vel mi. rect. in quæ distributa est area. Atque vt Rhombus totus, vel parallelogrammum obliquum BF æquale est toti rectangulo ABCD, sic singuli Rhombuli, siue partialia parallelogramma areæ BF singula sunt æqualia singulis min. rect. areæ rectāguli ABCD, totidemq; in vtroq; sunt &c.*

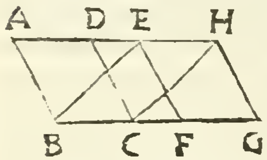
2 *Agrum igitur parallelogrammum dimensurus habes ex antedictis, & demonstratis in § 12 vnde eum metiare, inuenta perpēdiculari, eiusq; ac basis mensurā; &c. Hactenus de mensuris parallelogrammorum, Rhomborum, Rhombidean, rectangulorum, quadratorum. De aliarum regularium figurarum, ac præcipuè de triangulorum dimensionibus arealibus habebis inferius ad propos. 41 huius, quam supponunt. Atq; ea, quæ ibi tradentur de regularibus figuris etiam valent pro rectangulis, & quadratis, habebisq; ibi ad copiam, & varietatem modos alios pro parallelogrammis regularibus. Nos hìc vsum dedimus in ijs, quæ non requirunt pro demonstratione vlteriorem propositionem hac 35.*

Pro-

Propos. XXXVI. Theor. XXVI.

Parallelogramma in æqualibus basibus, & in ijsdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SVnto parallelogramma ABCD, EFGH super æqualibus basibus BC, FG; & in ijsdem parallelis AH, GB constituta. Dico illa esse æqualia: iungantur enim BE, CH. Quia enim BC, FG æquales sunt, estque FG æqualis ipsi EH, [a] erit & BC ipsi EH æqualis: [b] sunt verò & parallelæ, côiunguntque ipsas rectæ BE, CH. [c] Quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes coniũgunt, æquales, & parallelæ sunt: Quare EB, CH æquales, & parallelæ sunt: [d] ergo EBCH est parallelogrammum; estq; æquale ipsi ABCD, quippe eandem cum illo basim BC habens, & in ijsdem parallelis BC, AH constitutum. Eandem ob causam EFGH eidem EBCH est æquale. [e] Quare & ABCD parallelogrammum æquale est EFGH parallelogrammo. Ergo parallelogramma, &c. Quod demonstrare oportuit.



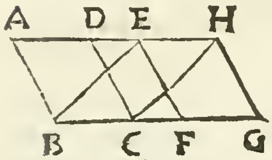
a ax. 1.
b prop. 33. 1.
c prop. 33. 1.
d prop. 35. 1.
e ax. 1.

§.I.

VSVS, & applicatio theologica propos. 36 Eucl. siue —

— Scoticum Paradoxum de Angeli extensione à cælo empyreo vsq; ad terras. Et monitum circa applicationes abstractarum veritatum Mathematicarum.

1 THeologi vbi de loco Angeli philosophantur quærunt vtrum angeli habeant determinatam quantitatem loci, quà minorem, vel quà maiorem occupare non possint. De minimà loci Angelici quãtitate nihil hìc ad nos, nec ad hanc 36 propos. Eucl. Circa maximam, Scotus in 2 sent. dist. quest. 6 ex hac 36 Eucl. putat se demonstrare. Nos Euclidis figuræ breuiter applicemus argumentationem. Finge parallelas AH, BG extendi in infinitum (saltem vsq; ad Cælum Empyreum) per postulatum secundum, & AC esse quãtitatem localem alicuius milliarij, quam possit aliquis Angelus occupare.



A basi BC (iuxta antecedentem propositionẽ, siue ab æquali FG, iuxta hanc 36) quæ hìc in terris est, finge parallelas BE, CH productas esse ad eas partes parallelæ AH, quæ ad Empyreum pertingit. Erit secundum hoc parallelogrammum æqualis areæ priori CA, per hanc, & anteced. propositiones Euclidis. Si ergo Angelus potest occupare aream CA, quidni possit & alteram illi æqualem, licet ad Empyreũ productam, quinimmo & in infinitum? cum ex BC, vel illi æquali possit produci parallelogrammum locale intra easdem parallelas in infinitum.

2 Ingeniosa tamen hæc Scoti applicatio huius 36 propos. non admittitur in Scholis omnibus Theologicis. Vide præ alijs, ex nostris Theologis Gregorium de Valentia To. 1. disp. 4. q. 3. puncto 3, &

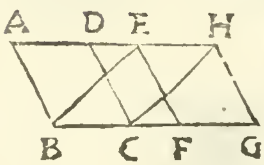
& Franciscum Soarium in Tomo de Angelis, lib.4.cap.11. & rationes apud eos contra Scoti applicationem Nos hîc tantum indicamus theologicam hanc huiusce proposit. Eucli. applicationem pro nostro instituto Euclidis applicati, & ornati, vt hîc ex indicatis ornent Mathematici Doctores suis Auditoribus Euclidem.

3 Patet interim ex hac applicatione non ab omnibus Theologis admissâ aliquando in admirandis, licet verissimis, theorematibus Philosophiæ Geometricæ non esse necesse ab abstractis, & intelligibilibus Mathematicis theorijs gradum fieri posse ad concreta, in quibus vel sensibilis quãtitas, vel rei, quæ materiæ sensibili applicatur, determinata vis, ac natura non possunt assequi effectiones à Geometricà scientià demonstratas. Neq; tamen propterea quidquã perit vel veritatis, vel existimationis, atq; æstimationis Philosophicæ in Geometricà scientia, cuius est circa suam materiam, idest intelligibilem quantitatem, demonstratiuè versari. Corollarij vero loco sunt si qu possint etiam sensibili materiæ applicari. Relege c. vltimum in Prolegomenis nostris initio huius 1 To. vbi de Abstractione Geometricà.

Theoriæ abstractæ Mathematicæ licet demõstratæ, nõ omnes applicari possũt materiæ Physicæ.

§. II.

PARADOXVM Indicatum — De asymptotis parallelarum.



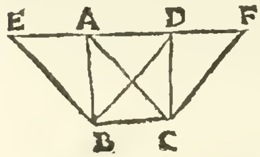
Quandoquidem, vt Proclus affirmauit, propositiones hæ 35, 36, 37, 38 Euclidis habent paradoxũ accipe in 35, & 36 etiam hoc nostrum paradoxum. Nam in figura hîc prop. 36 Eucl parallelogrammum BEHC semper in infinitum obliquari potest, ac magis inter se accedent BE, CH, nunquam tamen se contingent; semper enim erit parallelogrammum continẽs spatium æquale parallelogrammo verb. gr. BADC, &c. Vide pluribus expressum, & confirmatum hoc paradoxum in Analetti 9 propositione 7 ad nostras asymptotos, in nostrorum Apiariorum editione 4, quæ iam vulgata est.

Propos. XXXVII. Theor. XXVII.

Triangula super eadem basi, & in ijsdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

SVnto triangula ABC, DCB super eadem basi BC, & in ijsdem parallelis AD, BC constituta. Dico triangulum ABC æquale esse triangulo DBC. Producatur AD vtrinque ad E, & F,[a] & per B ipsi CA, per C verò ipsi BD parallelæ ducantur BE, CF.

a prop. 31. 1.



Vtrumq; ergo EBAC, DBCF parallelogrammum est,[b] suntq; æqualia, quippe in eadem basi BC, & in ijsdem parallelis BC, EF constituta.[c] Et est parallelogrammi EBCA dimidium triangulum ABC; diametrus enim AB ipsum bisecat: Parallelogrammi verò DBCF dimidium est triangulum DBC; nam diametrus DC ipsum bisecat.[d] Quæ autem æqualium sunt dimidia & ipsa sunt æqualia. Triangula ergo super eadem basi, &c. Quod oportuit demonstrare.

b prop. 35. 1.

c prop. 34. 1.

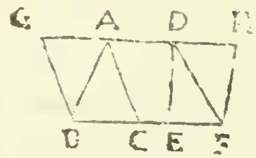
d ax. 7.

Præ-

Propof. XXXVIII. Theor. XXVIII.

Triangula ſuper æqualibus baſibus, & in ijſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

SVnto triangula ABC, DEF ſuper æqualibus baſibus BC, EF, & in ijſdem parallelis BF, DA conſtituta. Dico illa eſſe æqualia. Producatur enim AD vtrinq; ad G, & H. [a] Atque per B, & F ducantur ipſis CA, DE parallelæ BG, FH, eritq; vtrumq; GBCA, DEFH parallelogrammum, [b] Et ſunt æqualia, quippe ſuper æqualibus baſibus BC, EF, & in ijſdem parallelis BF, GH conſtituta, [c] eſtque triangulum ABC dimidium parallelogrammi GBCA; ipſum enim diametrus AB biſecat: Et triangulum FED eſt dimidium parallelogrammi DEFH; [e] nam & ipſum diametrus FD biſecat. [d] Quæ autem æqualium ſunt dimidia & ipſa ſunt æqualia. Triangulum igitur ABC eſt æquale triangulo DEF. Quare triangula ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod oportuit demonſtrare.



a prop. 31. 1.
b prop. 36. 1.
c prop. 34. 1.
d prop. 34. 1.
e ax. 7.

§. I.

SCHOLION.

Vsus 37, & 38 propos.(ac etiam proximè antecedentium) Euclidis ad vitandas fallacias in Chorographià, & rẹ agrarià. Loca Veterum illustrata.

Spectanda est altitudo perpẽdicularis triãgulorum in cõparatione arearũ triangularium. &c.

1 H*Abes hìc, Tyro, vnde confirmes quæ prædicta sunt ad propositiones 4, 8, 24, 25, & veram rationem agnoscas fallaciarum ibi detectarum, quæ prodeunt ex vsu, vel abusu altitudinis triangulorum; quidquid sit de ambitu. Spectanda enim est triangulorum altitudo, quæ intra easdem est parallelas, dum triangula comparantur in æqualitate arearum, ac possunt esse areis æqualia, licet in ambitu inæquali, vt dictum est de parallelogrammis. Quia & minor area triangularis maioribus lateribus ambiri potest. &c. Quæ sæpius a nobis nõ sunt repetenda cum Proclo.*

Halluc ratio metientium ex ãbitu magnitudines insularũ.

2 *Ex antedictis in propositionibus proximè antecedent. & ex hìc dictis lucem habes ad Quintilianum l. 1. orator. institut. vbi, præter alia plura sic:* Reprehensi ab Geometris sunt historici, qui magnitudinem insularũm satis significari nauigationis ambitu crediderunt. *post pauca:* ergo & id fieri potest vt maiore circuitu minor loci amplitudo claudatur. &c. *velut triangula duo æqualibus basibus, eiusdemq; altitudinis, idest inter easdem parallelas, vt in hac 37 propos. Eucl. Quorum triangulorum alterum, quod sit obliquioribus lateribus, erit & longioribus, sed non areà maiore, immo minori etiam, scilicet si obliquiora ea, & longiora latera non pertingant ad altitudinem superioris parallelæ. Quæ dicta figuræ applicato, vt melius percipias.*

Aliquãdo maiore circuitu minor loci amplitudo clauditur.

Habes lucem etiam ad Polybium lib. 9. Megalopolis ambitu suo quinquaginta fuit stadiorum, Lacedæmon quinquaginta octo, & tamen Lacedæmõ duplo maior Magalopoli. Hoc ignaris Mathe-

thematum incredibile videatur. Quid si dixero fieri posse vt ciuitas ambitu 48 stadiorum sit dupla ciuitatis 100 stadiorum ambitu? insanum, atq; amens videatur: attamen vtrumque verum, & geometrica necessitate demonstratum, falsumq; conuincitur magnitudines vel locorum, vel exercituum ex ambitu metiri.

Lucem habes ad Proclum in com. ad 37 propos. Eucl. Tale autem quid Chorographi perpessi sunt Vrbium magnitudines ex ambitibus ratiocinantes. Olim vero quidam possessionum participes ea diuisione eos, qui vna cum ipsis diuidebant, deceperunt, quippe qui ambitùs excessu abusi sunt, pluraque sumpserunt cum peragrantes eam suscepissent possessionem, quæ à maiori ambitu continebatur. Aream autem cum in quædam spatia, quæ minori fruebantur ambitu immutassent, optimi existimati sunt. *Paullo post:* At Geometricus vir non ignorabit quòd spatia æqualia sūt, quamuis ambitus inæquales fuerint.

§. II.

SCHOLION.

De propositionibus hic aliquibus Euclidis ad vniuersalitatem maiorem alibi traducendis.

1 Q*Væ hìc probat Euclides circa parallelogrammata, vel triāgula intra easdem parallelas ex basiū æqualitate, vniuersalius ea idem expediet in prop. 1. li. 5* Triangula, & parallelogramma eandem habentia altitudinem, inter se sunt vt bases. *Eandem habere altitudinem est esse inter easdem parallelas; vt hìc rectè Proclus, cuius verba iam attulimus sub finē § 4 ad 35 propos. Itaq; si bases sunt æquales parallelogrammorum, si æquales triangulorum, vt hìc, sunt & parallelogramma inter se, & triangula inter se æqualia. Vlterius in cit. 1. propos. l. 6 ostendit non solum æqualitatis, sed & omnis generis proportionem in ijs figuris ex data basium proportione. Si basis vnius parallelogrammi, siue trianguli sit tripla alterius*

tris basis, triplum est parallelogrammum parallelogrammi, triangulum trianguli, ac de cæteris pari modo, &c.

2 In lib. hoc pri. quoniam Geometra non explicat quantitatum habitudines proportionales inter se, ideo non proponit theoremata, vel problemata, quæ vniuersalia sint in omni proportione. Sic in antecedentibus angulum, lineam in æqualia bipartitur, in 6 verò lib. diuidit lineam in quamlibet proportionem partium.

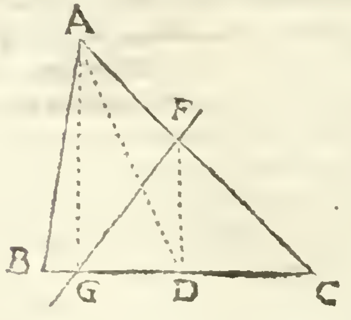
Itaq; Tyro expectet vniuersalissima in lib. 6 aliqua, quæ hic in vno genere sunt vniuersalia. Sic etiam 47 propositionem huius lib. 1 vniuersalissimam ostendit, etiam extra quadrata formata è lateribus trianguli rectanguli, in eodem lib. 6.

§. III.

VSVS, & applicationes propos. 38 in Geodesià.

PROBLEMA I.

Campum triangularem statim in duas, vel plures æquales partes diuidere.



GEometrica apud aliquos hic & in seq. § 4 applicemus agrarijs in gratiam Tyronum. Esto campus triangularis ABC diuidendus in duas æquales partes, Sed vt facilè fiat, diuidatur bifariam vnum è tribus lateribus in D, & inde ad oppositum angulum A rectà sulcus DA ducatur, eruntq; æquales partes ADB, ADC, per corollariũ, quod

quod colligitur ex propos. 38. Sunt enim triangula super æqualibus basibus BD, DC, & intra easdem parallelas, si intelligatur per A acta parallela ipsi BC.

Quod si partes æquales BD, DC in alias minores æquales subdiuidas, erit triangulum in 4, vel plura æqualia triangula diuisum.

§. IV.

PROBLEMA II.

À dato loco in latere campi triangularis illum in duas partes æquales diuidere.

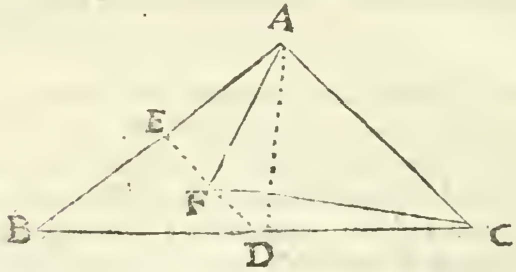
Esto locus datus, a quo instituenda est diuisio, punctum G in latere BC campi triangularis BAC. Diuide, vt in antecedenti problemate, latus BC in D bifariam. Duc filum protensum à G ad oppositum angulum A. Item ex D duc filum DF parallelum ipsi AG. Denique rectà sulcum ducito ex G ad F erunt duæ partes BAFG, GCF æquales campi triangularis ABC diuisi. Nam inter easdem parallelas AG, DF duo triangula DGF, DAF super eàdem basi DF sunt æqualia; ergo addito communi DFC, erunt æqualia inter se GCF, DCA. cùm ergo DCA probatum sit in § 3 antec. dimidium totius ABC, erit & GCF dimidium agri diuisi.

Proportione idem erit peragendum, dato aliquo alio puncto in eodem, vel alio agri latere, vnde iubeatur diuisio.

§. V.

PORISMA I.

Intra datum triangulum inuenire punctum, à quo fiat diuisio trianguli in duo æqualia triãgula, quorum alterum sit cilogonium, siue cauiangulum.



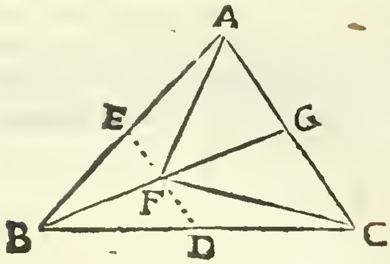
DAti ABC latus quodlibet BC bifarietur in D, vnde parallela vtrilibet laterum AC ipsa DE ducatur, & bifarietur in F. Ad F excitetur triangulum super basi parallela ipsi ED, nempè eductis AF, CF. Dico triangulũ ABC esse diuisum in duo æqualia triãgula AFC vsitatum, & ABCFA cauiangulum. Iunctà enim alterutrà ad oppositos parallelarum angulos ipsà AD, sunt triangula AFC, ADC super eàdem basi AC inter parallelas AC, ED æqualia, per 37 huius li. I Eucl. At ADC est dimidium trianguli ABC (per 38 prop. Eucl. sunt enim æquales bases BD, DC, & æquales altitudines in A) ergo & AFC est dimidium eiusdem ABC, ac reliquum triangulum cauiangulum ABCFA est alterum dimidium. Quod erat faciendũ.

§.VI.

PORISMA II.

Intra datum triangulum punctum inuenire, à quo triangulum in quatuor æqualia triangula diuidatur.

PRoblema proposuimus ad 34 prop. Eucl. § 14, in quo à punctis in lateribus diuidebatur triangulum in quatuor æqualia; hoc verò problema est de puncto, non in lateribus, sed intra, &c. Quod facile soluitur, supposito antecedenti.



Nam in triangulo ABC, bifariato vno laterum BC in D, & ducta DE parallela ipsi AC, & bifariatà in F; & iunctis FA, FC, educatur ab angulo, cui subtenduntur parallelæ ED, AC, nempè à B recta BF. Bifarietur AC in G, & iungatur GF. Dico quatuor triangula BFA, BFC, AFG, GFC esse inter se se æqualia. Quoniam enim, per antecedens problema, duo triangula AFC, ACBFA sunt dimidia totius ABC, &, per 38 prop. Euclid. super æqualibus basibus AG, GC, & inter easdem parallelas AC, ED sunt æqualia AFG, GFC, item super æqualibus EF, FD inter easdem parallelas sunt æqualia EAF, FCD, & eiusdem altitudinis triangula EBF, FBD, &c. sunt & ipsa inter se æqualia, erunt simul sumpta, ac tota BFA, BFC æqualia. Cùm igitur totius trianguli ABC dimidia AFC, ABCFA, & dimidiorum dimidia triangula AFG, GFC, ABF, FBC sint æqualia, erit totum ABC diuisum in quatuor æqualia triangula, quod erat præstandum.

§. VII.

SCHOLION.

De vniuersalizandis etiam magis problematibus à nobis antepositis.

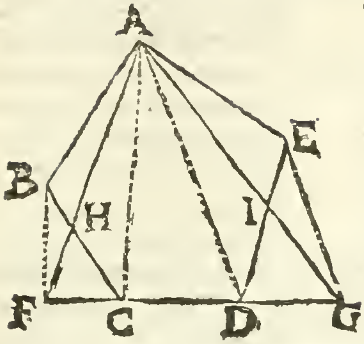
QVemadmodum Euclides aliqua hic theoremata ostendit etiam magis vniuersaliter in 6 libro, &c. sic & nos anteposita problemata hic Tyronibus proposuimus determinata ad diuisionem partium numero pari inter se æqualium, bifariando, vel quadrifariando triangulum, quia in hoc 1. lib. tantum bifariatio lineæ ab Euclide tradita est. In 6. proponemus problema etiam de partibus numero impari, cum exemplo trifariandi triangulum in tria æqualia triangula à puncto intra, &c. & vniuersaliter etiam à puncto intra triangulum diuidere illud in duas, vel plures partes habetes inter se datam proportionẽ.

§. VIII.

Dato Pentagono etiam irregulari ęquale triãgulum facillimè describere.

ESto datum Pentagonum, si lubet, etiam irregulare ABCDE. Ab angulo quolibet A ad terminos oppositæ basis C, D deducantur duæ rectæ occultæ AC, AD; quibus duæ aliæ rectæ parallelæ occultæ ducantur ab extremis lateribus angulum A conficientibus, nempe à B, & E occurrẽtes in F, & G basi productæ CD. Deniq; iungantur manifestæ AF, AG. Dico triangulum AFG æquale eße pentagono ABCDE.

Quoniam enim super eàdem basi AC inter parallelas AC, BF constitutæ sunt triangula ACB, ACF inter se æqualia, per 37 huius,



ius, si auferatur commune AC H, remanent æqualia inter se AHB, FHC; pariterq; ob candē 37, sunt æqualia ADE, ADG, & AIE, DIG; ac præterea est commune triangulo, & Pentagono spatium AHCDI; appositis ergo AHB, FHC inter se æqualibus, itemq; inter se æqualibus AIE, DIG, propter ea omnia prædicta, & probata, totum pentagonum ABCDE triangulo AFG est æquale descriptum. Quod erat faciendum. Quæ pressè à nobis posita sunt, facilioris intelligentiæ gratia per partes sibi seponat, & speculetur Tyro Geometricus.

COROLLARIVM.

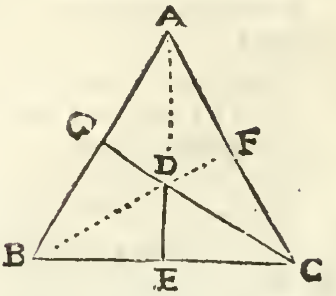
TRansformato Pentagono in triangulum per modum hic tam facilem, facillima hinc etiam facta est via transformando Pentagono ex æquali triãgulo in alias figuras, quas docent sequentes propositiones 42, 44, 45, 46 huius lib. 1. Eucl.

Vide nos ad propos. 1. li. 6. de diuisione pẽtagoni ex anteced. &c.

§. IX.

SCHOLION ad Peletarij Problema De bipartitione in æqualia dati trianguli, atq; etiam diuisione in sex binatim æqualia triangula.

INspice nostram hic fig. in fac. seq. Postquam Peletarius (quod etiã à nobis in antecedentibus, & apud alios habes) indicauit corollari: ex hac 38 prop. de diuisione trianguli in duo æqualia, per bifariationem cuiuscumque trium laterum, & edu-



ctionem rectæ à diuisione ad oppositum angulum, vt vides ab E, F, &c. ad oppositos angulos A, B, &c. addit deinde sequentia nostræ figuræ à nobis aptata: Triangulorum quoq; minorum æqualitas agnoscitur ex tribus lineis AE, BF, & CG se scindentibus in puncto D. Hoc facit ad diuidenda Triangula in pariter paria: vt in 4, 8, 16, 32.

Mechanicè verò diuidetur Triangulum in alias partes, diuiso similiter latere, ductisq; lineis ab angulo opposito ad puncta sectionum. Cuius diuisionis ostensio ad Sextum librum reseruatur. *Hæc Peletarius. At Quod affirmat triangulorum minorum æqualitatem patère ex tribus lineis ab angulis deductis, ac se mutuo in communi puncto D secantibus, nititur suppositione, non autem vllà ab eo allata demonstratione.*

Quam tamen habes apud nos in To. 2 huius Ærarij ex 4 sexti ad 17 eiusdem sexti. &c. Quo posito, patet minora triangula eiusdem esse altitudinis ad punctum commune D bina super basibus æqualiter bifariatis. Sic æqualia sunt inter se bina ADG, GDB; bina BDE, EDC; bina CDF, FDA. Igitur eàdem opera dum maius triãgulum bipartiris per rectas à tribus angulis, &c. diuidis illud in 6 binatim æqualia triangula.

Notandum ad praxim per bifartationes alias, atque alias partium bifariati trianguli, fieri posse eiusdem diuisiones in partes æquales pariter pares (vt loquitur Peletarius) numero infinitas. Igitur =

—COROLLARIVM—

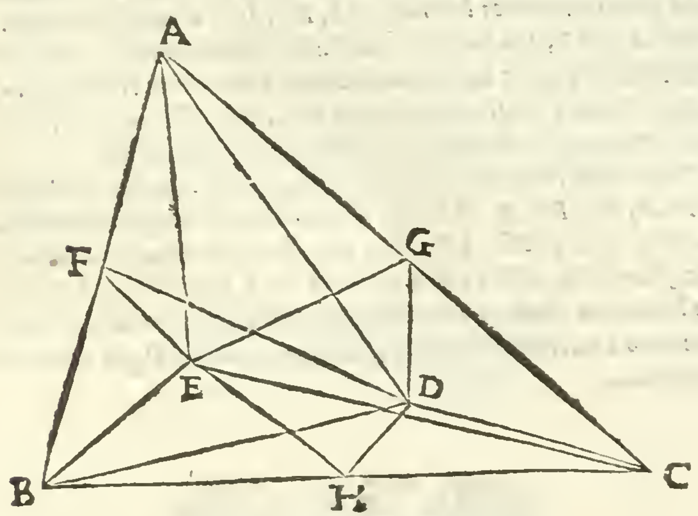
— E*sto:* datum triangulum in infinita numero æqualia triangula demonstratiuè partiri, *ex prop. 38. &c. vt eius Euclidianæ propos. fæcunditatem prouideas.*

§. X.

PORISMA Locale.

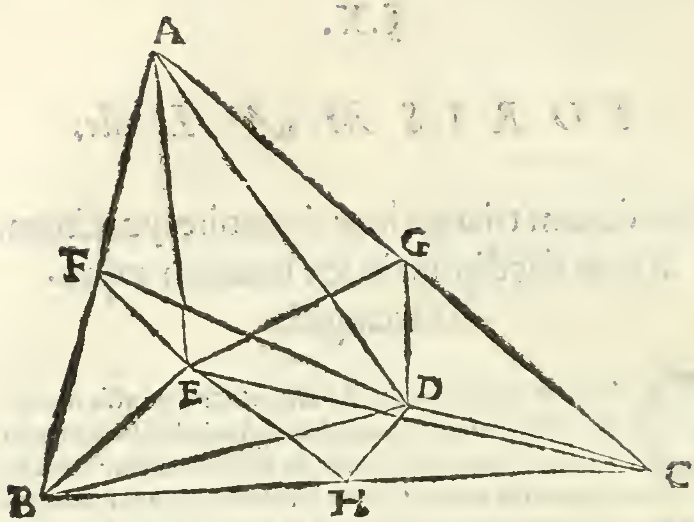
Intra datum triangulum inuenire punctum, à quo fiat diuiſio in ſex binatim æqualia triangula.

*Q*Voniam caſus in antec. § 9 alligatus eſt puncto interſectionum mutuarum, quæ fiunt à lineis ductis ab angulis ad dimidiatas oppoſitas baſes; nos id problema transferemus in vniuerſale, ac locale Poriſma non iniucundum, vt arbitramur, ac demonſtratum ex hac 38 propoſ.



Eſt autem Poriſma locale, quia in tota ſuperficie trianguli ABC punctum, quod quæritur, vagatur, ac liberum eſt aſſignare quodlibet, verbi gr. vel D, vel E, &c. Bifariatis vero lateribus trianguli in F, G, H; ducantur ab accepto arbitrario puncto rectæ

ad



ad angulos trianguli, DA, DB, DC. Rursum ab eodem D ducantur rectæ ad bifariationes laterum, DF, DG, DH; etiam si ab angulis ductæ AD, BD, CD non eant rectà ad bifariationes in F, G, H, vt antecedentis § casus habet particularis, tamen bina triangula ADG, GDC, bina CDH, HDB, bina BDF, FDA sunt æqualia, nempe super æqualibus basibus, in eàdemq; altitudine D, &c.

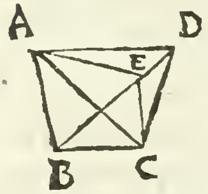
Pari modo sumpto puncto E, ductis ex E ad angulos A, B, C rectis EA, EB, EC; & ab eodem E ad laterum triangularium bifariationes ductis rectis EF, EG, EH, sunt sex triangula binatim inter se æqualia AEF, FEB; BEH, HEC; CEG, GEA. Similemque in modum sumpto quolibet alio puncto, &c. problema porismaticum locale licebit exequi, ac demonstrare. Quod erat præstandum.

Pre-

Propoſ. XXXIX. Theor. XXIX.

Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in ijſdem ſunt parallelis.

SVnto triangula ęqualia ABC,DBC ſuper eadem baſi BC conſtituta. Dico illa in ijſdem eſſe parallelis. Ducta enim AD, dico illã eſſe parallelã ipſi BC. Si non: [a] ducatur per A ipſi BC parallela AE: iũcta igitur EC, [b] erit triãgulum ABC æquale triangulo EBC; ſunt enim ſuper eadem baſi BC, & in ijſdem parallelis BC, AE. Sed triangulo ABC æquale ponitur triangulũ DBC, [c] erit ergo DBC triangulum æquale ipſi EBC triãgulo maius minori, quod fieri nequit: non ergo AE parallela eſt ipſi BC. pari modo demõſtrabimus quod nulla alia præter AD. Sunt igitur AD, BC parallelæ. Quare triangula æqualia ſuper eadẽ baſi, &c. Quod oportuit demonſtrare.



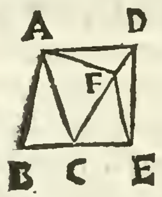
a prop. 31. 1.
b prop. 35. 1.
c ax. 1.

Pro-

Propos. XXXX. Theor. XXX.

Aequalia triāgula super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, in ijsdem sunt parallelis.

SVnto æqualia triangula ABC, CDE super æqualibus basibus BC, CE constituta. Dico illa in ijsdem parallelis esse. Si non: [a] Ducatur per A ipsi BE parallela FA. iuncta ergo FE, [b] erit triangulum ABC æquale triangulo FCE. Sunt enim super æqualibus basibus BC, CE, & in ijsdem parallelis BE, AF. Sed triangulum ABC æquale etiam est triangulo DCE; [c] erit ergo & DCE ipsi FCE æquale, maius minori, quod fieri nequit: non ergo AF ipsi BE parallela est. Similiter ostendemus, quod præter AD, nulla alia. AD ergo ipsi BE parallela est. Triangula ergo æqualia, &c. quod demonstrare oportuit.



a prop 31. 1.
b prop. 38. 1.
c ax. 1.

Pro-

§. I.

SCHOLION.

De geometrica conuersione. Eius quatuor apud nos genera. Quid sit. Ad vsum eius præcepta, &c.

1 H*Aec duo theorem. 39. & 40 cōuersiones sunt duorum præcedentiū, vt & alia aliorum in anteced. Ibi plura erant adnotāda, quæ Tyrones nondum prouectos implicassent. Hìc locus vacat. Igitur ad vsum, & ad eruditionē Geometricam spectant ea, quæ paucis habet Proclus ad has duas prop. Euclid. de tripl:ci genere Conuersionis apud Geometras. Nos alia mox addemus ad cognitionem, & vsum conuersionis Geometricæ. Hìc ergo Proclus :* Adnotatu autem dignum est quòd triplex cùm sit Theorematum Conuersio (aut enim totum ad totum conuertitur, quemadmodum octauumdecimum, & nonumdecimum diximus; aut totum ad partem, vt sextum, & quintum; aut pars ad partem, octauum, & quartum. non enim totum in altero Datum Quæsitum in altero est, nec Quæsitum Datum, sed pars) videntur talia esse hæc quoq; Theoremata in triangulis; erat siquidem Quęsitum in præcedentibus: Triangula æqualia esse, hoc autem non solum in his Datum est, quippe cum partē insuper sumpserit eius, quæ in illis erat suppositionis. Hoc enim super eàdem esse basi, vel super æqualibus, cum in his, tum in illis Datū est; pręterquamquod in hisce suppositionibus quoddam adiacet, quod quidem nec Quæsitum, nec Datum in illis erat. Particula enim illa: ad easdem partes, extrinsecus insuper fuit assumpta. *Idest in Teor. 37 Datum erat conflatum ex duobus suppositis, quæ erant: eædem, vel æquales bases, & esse in ijsdem parallelis triangula; Quæsitum erat: esse æqualia. In theor. 39, & 40 Datum est conflatum ex duobus, immo tribus suppositis: æqualia esse triangula, esse super ijsdem, vel æqualibus basibus, ac præterea: esse ad easdē partes; quod hic est tertiū Datum, siue suppositum additum in his theor. 39, &*

Iuxta Proclū triplex Conuersio Geometrica. Totius in totum, totius in partem, partis in totum fit cōuersio.

40; *Quæsitum vero est: esse in iisdem parallelis. Igitur hæc conuersio fit totius, quod erat Quæsitum*, idest esse æqualia *in partem Dati, quæ erat* esse in iisdem parallelis.

Quænam sint theoremata simplicia, quænam composita.

2 *Cæterum quid vetat tribus à Proclo positis Conuersionis Geometricæ generibus apponere etiam quartum? Nam ex eodem Proclo lib. 3. com. ad prop. 1. Theorematum alia sunt simplicia, alia composita. Simplicia quæ habent vnum solum datum, & vnum quæsitum. Composita quæ habent plura vel Data, vel Quæsita. Compositorum alia habent simul plura Data, & simul plura Quæsita; alia habēt plura Data, & vnum Quæsitum, vt in antec. 37, 38, alia habent vnum Datum, & plura Quæsita. Cum igitur simplicium sit vna species, & compositorum tres, & prima species compositorum theorematū, quæ habet plura Data, & plura Quæsita, possit ita cōuerti, vt vnum Quæsitorum vertatur in vnum Datorū, idest fiat conuersio partis in partem, profectò erit ea quarta species Geometricæ Conuersionis.*

Compositorum tres species.

Quarta à nobis species Geometricæ cōuersionis.

Quænā sint Theoremata præcedētia apud Philosophos Geometricos.

3 *Theoremata quædam vocantur Præcedētia, scilicet quæ præcedunt Conuersionem antequam conuertantur. Quædam Conuersa appellantur, scilicet Conuersiones Præcedentium; &c. Igitur ex antedictis patere potest quid sit Conuersio Geometrica, nempe cùm id, quod erat in antecedenti propositione Quæsitum fit Datum, & quod erat in antecedenti Datum fit Quæsitùm. &c. Patet etiam duplicem esse Cōuersionem, alteram præcipuam, propriam, ac perfectam, vniformem, determinatam (tot enim nominibus exponitur à Veteribus Geometris) quæ est totius Quæsiti siue simplicis, siue compositi, in totum Datum siue simplex, siue compositum; alteram vero secundum partes, variam, &c. iuxta prædicta de partis in partem, totius in partem, & c. Conuersionibus.*

Definitio Geometricæ cōuersionis.

Duplex conuersio. Vniformis altera; Varia altera.

4 *Ad vsum autem, & ad vitandos paralogismos notanda sunt ea apud Proclū lib. 3. com. 10:* Oportet animaduertere quod multæ falsæ Conuersiones fiunt, & non sunt propriè Cōuersiones. vt: omnis sexangulus numerus triangulus est. non tamen conuersum etiam verum est, quòd omnis triangulus numerus sexangulus erit. Causa autem quoniam alterum quidem communius est, alterum vero particularius; & de omni alterum solùm de altero dicitur. In quibus autem quod primum inest, & secundum quod ipsum accipitur, in illis Conuersio quoq; consequitur. Et hæc quidem Menæchmi, Amphionisq; familiares Mathematicos non latuere.

Exemplum, & ratio fallacis cōuersionis.

Regula pro veris cōuersionibus.

5 *Ad vsum demonstrationum conuersarum notandum est fieri Geometricas Conuersiones fermè per deductionem ad impossibile,*

cum

cum hoc tamen discrimine, quod demonstratione indirecta, siue ab absurdo, &c. (*inquit Proclus com. 18*) conuersa Theorematum ostendi debent, in Problematibus verò præcipuas quoq; Demonstrationes licet suscipere.

Conuersiones theorematũ fiunt per deductionem ad impossibile.

Rationem Cõuersionis per deductionẽ ad impossibile affert alibi, scilicet ne Conuersiones implicent ordinem subsequentium Propositionum, quod incommodum accideret, si conuersa theoremata demonstrarentur demonstratione ostensiua, & nitente alijs antecedentibus propositionibus interpositis inter propositiones Præcedentem, & Conuersam. Itaq; statim post præcedens assolet subijci Conuersio expeditior per deductionem ad impossibile.

Conuersiones problematum per directas demõstrationes.

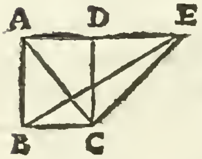
6 Recole discrimen inter Deductionẽ ad impossibile, & inter Resolutionem Geometricam, ac relege, mi Tyro, quæ post Pappum adduximus ex Proclo, vbi de Resolutione Geometricà nos in antecedentibus ad 1 propos. Euclid. disseruimus. Deductiones enim ad impossibile pertinent ad genus Mathematicarum demonstrationum, quæ ad principia progrediuntur. Quarum duæ sunt species, altera quæ progreditur ad principia ponenda, quæ propriè Resolutio dicitur, altera quæ ad principia destruenda, & hæc propriè dicitur Deductio ad impossibile, siue ad absurdum. Relege in comm. 10 Procl. Tyrones igitur in Propositionibus, quas audisti appellari Precedentes, & in Cõuersionibus Problematum habent exercitationem geometricarum demonstrationum, quas vocant Compositorias, quæq; à Principijs progrediuntur. Habent verò in Theorematum Conuersionibus exercitationem geometricarum demonstrationum, quæ resoluuntur ad principia destruenda.

Differunt deductio ad impossibile, & resolutio Geometrica.

Demõstrationum ad principia aliæ progrediuntur ad ponenda, aliæ ad destruenda principia.

Propos. XLI. Theor. XXXI.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerint basim, sintq; in ijsdem parallelis, erit parallelogrammum duplum trianguli.



SInt parallelogrammum ABCD, & triangulum EBC super eadem basi BC, & in ijsdem parallelis BC, AE. dico parallelogramum ABCD duplum esse trianguli EBC. Ducta enim AC, a erit triangulum ABC æquale triangulo EBC: habent quippe eandẽ basim BC, & sunt in ijsdem parallelis BC, AE. Sed parallelogrammum ABCD duplum est trianguli ABC; b diametrus enim AC ipsum bisecat: c quare & trianguli EBC duplum erit. Si igitur parallelogrammmum, & triangulum, &c. Quod demonstrare oportuit.

a prop. 37. 1.

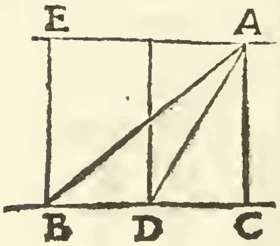
b prop. 34. 1.

c ax. 1.

§. I.

COROLLARIVM.

Si triangulum cum parallelogrammo duplam habuerit basim, in eisdemque fuerit parallelis, erit æquale parallelogrammo.



Sine alia demonstratione geometrica videtur consequi ex propos. 41 ex qua cùm triangulum super eàdem basi sit dimidium parallelogrāmi, quidni ergo super duplà sit æquale parallelogrammo? Sed in figurà sit trianguli ABC basis BC dupla ipsius BD, erit triangulum ABC duplum trianguli ABD, per 38. Eiusdem BAD duplum est DE, per 41, ergo DE, & BAC sunt æqualia.

§. II.

VSVS.

41 prop. pro eà Practicæ Geometriæ parte, in qua superficierum quantitates mensurantur in triangulis, & regularibus figuris.

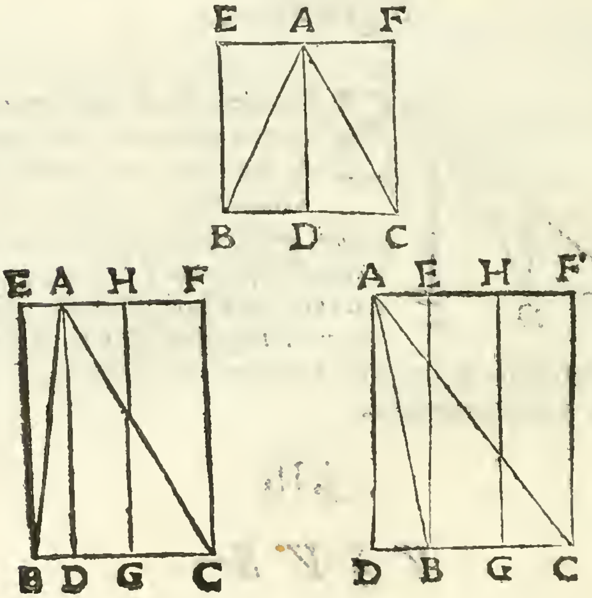
Accipe, mi Tyro, loco Lemmatū sequentia Theoremata ex Zenodoro apud Theonem in Tractatu de figuris isoperimetris.

THEO-

THEOREMA I.

Triangulū quodcunq; cui rectangu'o æquale sit.

Area cuiuslibet trianguli æqualis est rectangulo comprehenso sub perpendiculari à vertice ad basim protracta, & dimidia parte basis.



SIt triangulum ABC, ex cuius vertice A ad basim BC ducatur perpendicularis AD, diuidatq; primo basim BC bifariam, vt in prima figura. Per A, ducatur EAF in vtramq; partem æquidistans rectæ BC, compleaturq; rectangulum BEFC, quod erit duplum trianguli ABC; Item duplum rectanguli ADBE. Quare rectangulum ADBE, quod nimirum continetur sub perpendiculari AD, & dimidio basis BD, æquale est triangulo ABC. Diuidat secundo perpendicularis AD, basim BC, non bifariam, vel etiam cadat in basim CB protractam, vt in 2. & 3. figura,

41. primi
36. primi

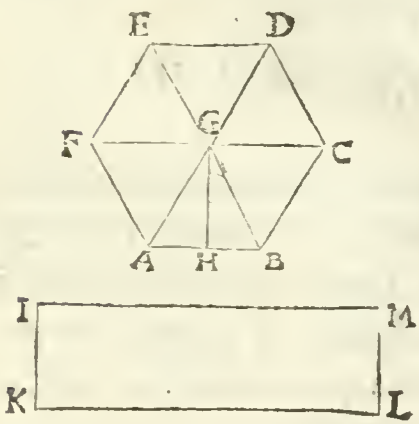
figurà; Et per A ducatur rursus AF in vtramque partem æquidistans rectæ BC, compleaturq; rectangulum ADCF. Diuisa deinde BC bifariam in G, ducantur rectæ BE, GH ipsi AD æquidistantes, eritq; GH æqualis perpendiculari AD. Quoniam igitur rectangulum BCFE duplum est trianguli ABC, Item duplum rectanguli BEHG, erit rectangulum BEHG, quod continetur sub perpendiculari GH, vel AD, & dimidio basis BG, æquale triangulo ABC. Area igitur cuiuslibet trianguli æqualis est, &c. Quod erat ostendendum.

34. primi
41. primi
36. primi

THEOREMA II.

Area cuiuslibet figuræ regularis æqualis est rectangulo contento sub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductà, & sub dimidiato ambitu eiusdem figuræ.

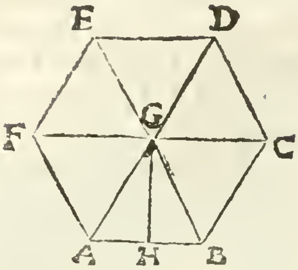
Regularis figura quæ cu que cui rectangulo æqualis sit.

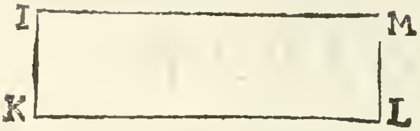


Sit figura regularis quæcunq; ABCDEF, & centrũ eius punctum G, à quo ducatur GH perpendicularis ad vnum latus, nempe ad AB: sit quoque rectangulum IKLM contẽtum sub IK, quæ æqualis sit perpendiculari GH, & sub KL rectà, quæ æqualis ponatur dimidiæ parti ambitus figuræ ABCDEF. Dico huic rectangulo æqualem esse figuram regularem ABCDEF. Ducantur enim ex G ad singulos angulos lineæ rectæ, vt tota figura in triangula resoluatur, quæ omnia æqualia inter se erunt, vt in corollario propos. 8 lib. 1. Eucl. demõstratum est, propterea quod omnia latera triangulorum à pũcto G exeuntia sint inter se æqualia, habeantque bases æquales, nempe latera figuræ hegularis. Hinc enim efficitur, omnes angulos ad G æquales es-

8. primi

se,





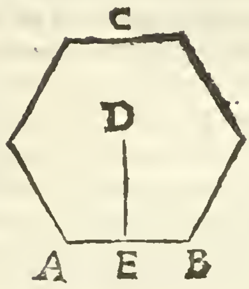
ſe, ac proinde ex dicto corollario triangula ipſa inter ſe quoque eſſe æqualia. Quoniam igitur rectãgulum contentum ſub GH perpendiculari, & medietate baſis AB, per anteced. prop. æquale eſt triangulo ABG, ſi ſumantur tot huiuſmodi rectãgula, in quot triangula diuiſa eſt figura regularis, erunt omnia ſimul figuræ ABCDEF æqualia; propterea quod omnia triangula oſtenſa ſint æqualia triangulo ABG. Cum igitur eadem ſimul æqualia ſint rectangulo IKLM, propterea quòd KL æqualis ponitur dimidio ambitus ABCDEF, hoc eſt omnibus medietatibus baſium ſimul, & rectà IK perpendiculari GH; erit figura regularis ABCDEF æqualis rectangulo IKLM. Area igitur cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt. &c. quod erat demonſtrandum. &c.

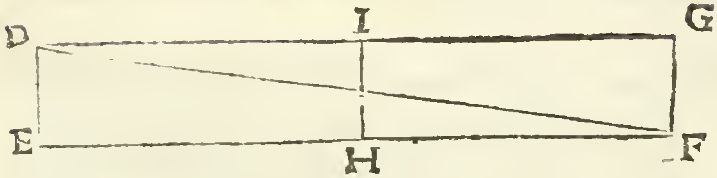
THEOREMA III.

Regularis figura quæcunque cui triangulo rectangulo æqualis ſit.

Area cuiuſlibet figuræ regularis ęqualis eſt triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale eſt perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductę, alterum verò æquale ambitui eiuſdem figuræ.

SIt rurſus figura regularis ABC, cuius centrum D, à quo perpendicularis ad latus AB ducta ſit DE, triãgulum vero rectangulum DEF, habens angulum E rectum, & latus DE æquale perpendiculari DE, latus autem EF æquale ambitui figuræ ABC; Dico triangulum DEF figuræ ABC æquale eſſe.





ſe. Compleatur enim rectangulum DEFG,& diuiſà EF bifariam in puncto H, ducatur HI æquidiſtans rectæ DE. erit igitur (per 2 prop. antec.) rectangulum DEHI contentum ſub DE perpendiculari, & ſub EH dimidio ambitùs figuræ, æquale figuræ ABC. At rectangulo DEHI æquale eſt triangulum DEF. Nam rectangulum DEHI eſt dimidiũ rectanguli DEFG, propterea quod æqualia ſunt rectangula DEHI, IHFG. Triangulum quoq; DEF dimidium eſt eiuſdem rectanguli DEFG. Igitur & triangulum DEF æquale erit figuræ ABC. Area ergo cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt triangulo rectangulo, &c. quod demonſtrandum erat.

36.primi
41.primi

§.III.
COROLLARIVM.

Ad praxim dimetiendarum ſuperficierum triangularium, & figurarum regularium, cum vſu circini proportionum.

D*Atà igitur ſuperficie triangulari, vel cuiuſcunque regularis figuræ, vt eam metiare, ac eius quantitatem noris, duc pro*

 trian-

triangularibus perpendicularem à vertice trianguli in dimidium basis. Pro alijs regularibus figuris duc perpendicularem à centro figuræ in dimidium ambitùs figuræ, ac numerus productus dabit quantitatem areæ, siue superficiei, iuxta demonstrata, & indicata in antecedentibus theorematibus. Vide nos inferius ad propos. 47, vbi docemus inuenire quantitatem perpendicularis à vertice triãguli, vt per eam areas figurarum metiri liceat. Mensuras verò, & diuisiones perpendicularium, & basium, & dimidij ambitùs habes facillimè in vsu circini proportionum iuxta ea, quę diximus ad 10 proposit. de eo circino pro lineæ rectæ in partes æquales diuisione.

Praxes e propos. 41 pro transformationibus figurarum triangulariũ in æqualia rectangula (præter modos ab alijs traditos è propos. 42, 44, &c.) per solam partium transpositionem, ad variarum artium vsus.

§. IV.

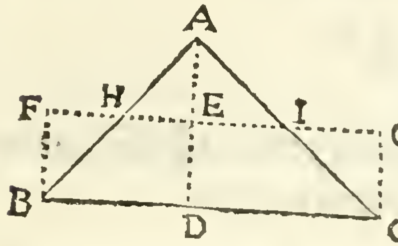
LEMMA.

Area cuiuslibet trianguli est æqualis rectangulo comprehenso sub dimidio perpendicularis à vertice trianguli, & sub latere, in quod cadit perpendicularis.

Potest hęc propositio, quę supponitur in aliquorum praxibus, quasi corollarij loco deduci ex 41 hìc Eucl. & ex antepositâ primâ propositione Theonis de Isoperimetris. Nã si area trianguli est æqualis vel rectangulo intra easdem parallelas super dimidia parte basis trianguli, siue sub perpendiculari altitudine trianguli, & dimidia base, patet idem concludi per dimidiam altitudinem

per-

perpendicularem, & totam basim trianguli. Tamen ad veritatem, & varietatem, accipiat Tyro sequentia.



Ab trianguli ABC vertice A quantitas perpendicularis esto, AD, ac eius dimidium DE, cui parallelæ, ac æquales erigantur à basis extremis B, C, fiatq; parallelogrammum rectangulum BFGC; dico id parallelogrammum esse æquale triangulo. est enim trapezium BHIC commune, triangulum vero AEH triãgulo HFB æquale, & triangulum AEI triangulo ICG æquale, per 26 primi. Sunt enim æqualia latera AE, FB, GC, quippe æquales semiperpendiculari AE, vel ED, & anguli ad F, ad E vtrinq;, ad G recti, & ad H, & I æquales anguli verticales, &c. Satis est indicare Tyroni, paullo iam prouectiori, vt ipse per se in plura diducat quæ hìc indicantur. Igitur triangulo ABC æquale est rectangulum parallelogrammum BFGC.

§. VI.

SCHOLION.

Ad facilitatem operationum in dimensionibus, & transformationibus triangularum figurarum. &c.

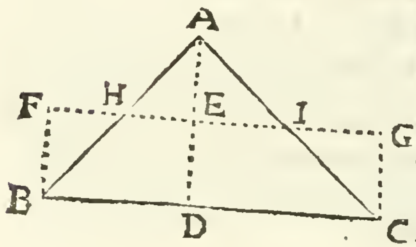
NE Tyroni negotium facessat inuentio perpendicularis, quę aliquãdo in aliquo amblygonio triangulo caderet à vertice extra triangulum, demittat perpendicularem ab eo angulo, vnde cadat intra triangulum in latus oppositũ; semper enim in omni genere triangulorum ab vno saltem angulorum demitti potest perpendicularis intra triangulum in suppositũ latus, quod statuendum est pro basi communi ipsi triãgulo, & re-

ctangulo parallelogrammo; ad transformationem, & ad dimensionem triangulorum, iuxta præmonstrata.

§. VI.

Praxis transformationis per transpositionem, &c. ad vsum artium.

Pro vestiaria, & pro sectoria lapidum.

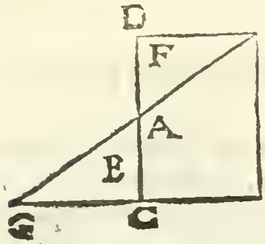


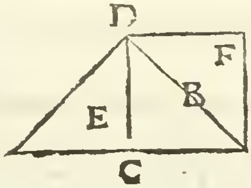
Exemplum esto vel in vestiaria, vel in pauimentaria, vel in lapidaria arte, si pannus triangularis, vel lapis edolatus, ac triangularis sit transformandus in figuram parallelogrammam rectangulam triangulari equalem; fiat triangularis panni, vel lapidis BAC sectio parallela basi BC per dimidiæ perpendicularis punctum E, ac frustum HIA secetur iuxta signatam perpendicularem AE, transferaturque alterum frustum AEH ita, vt latus AH congruat, assuatur, compingatur cum HB, & EH eat in HF parallelum ipsi BC, item AE inuertatur in FB, &c. pariq; ratione AI cadat in IC, EI in IG parallelum ipsi BC, & AE descendat in GC; erit per partium transpositiones transformatus triangularis vel pannus, vel lapis in æqualem rectangulum parallelogrammum lapidem. &c.

§. VII.

§. VII.

Praxis altera facilior transformationis Geometricæ, &c. ex Euclidis 41 prop.





IN figuris triangularibus rectangulis, vel isoscelibus, vel æquilateris erit facilior praxis iuxta corollarium antepositum ex hac 41 Eucl. § 1 per sumptionem dimidiæ basis trianguli, & formationem rectanguli ex dimidia basi, & ex tota perpendiculari à vertice trianguli ad dimidium basis deductà; fiet enim vnius tantum partis, siue dimidij trianguli transpositio, siue replicatio in rectangulum, vt vides (ne pluribus immoremur) in figuris A, B, &c. Factà enim sectione dimidiatæ basis in C perpendiculariter per D frustum, vel dimidium triangulum E cedit, ac facillimè replicatur in F, vt statim fiat ex triangulo rectangulum parallelogrammum, immò quadretur in B ex triangulo isoscele, cuius dimidium basis æquale est perpendiculari à vertice.

SCHOLION.

Discrimen inter vtramq; transformationem.

OMissis alijs differentijs inter prædictos duos transformationum modos, eam vnicam indico, quæ pertinet ad bases. Pri-

ma

ma enim transformatio ita fit vt vnum permaneat commune latus trianguli, & rectanguli, scilicet basis trianguli, quod non exigitur à secunda transformatione. Itaq; pro priore transformatione propositio ita est enuntianda : super data basi datum triangulum transformare in ęquale rectangulum per partium transpositionem. &c.

§. VIII.

SCHOLION.

Ad ampliationem praecedentium praxeωn.

Exempla posuimus dimensionum, & transformationum in parallelogrammis rectangulis, facilitatis maioris gratia pro Tyronibus. Doctrina tamen amplior est è propositionibus Euclidis, etiam si parallelogrammata non sint rectangula, modo sint inter easdem parallelas cum triangulis. Cognita enim perpendiculari, quantumuis obliqua sint parallelogrammata, & triangula, eorum dimensiones, & transformationes fieri possunt simili, ac proportionali modo iuxta in antecedentibus praecepta.

§. IX.

SCHOLION.

Ad Praxes, & vsus trapeziorum dimetiendorum, & transformandorum in triangula, vel parallelogrammata per partium transpositiones, &c.

Determinationem tamen habet haec nostra de trapezijs Propositio scilicet intelligenda sunt trapezia, quorū duo latera opposità sint parallela. Eritq; nostra haec propositio fortasse

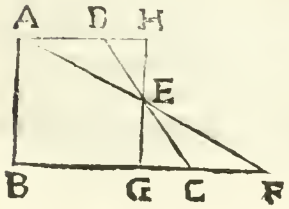
vsus

vsus crebrioris, quàm antecedentes, quia in agris, & in artibus (de quibus nuper in antecedentibus) solet accidere vt crebrius panni, vel lapides sint figuræ minus regularis, quàm triangula, vel rectangula parallelogrammata. Si sint saltem trapezia eius conditionis, quam hìc determinamus, facillimo negotio fiet eorum, vel dimensio arealis, vel transformatio in triang. vel parallelogr. per partium transpositiones. Tertia classis hæc est figurarum inter easdem parallelas, siue eiusdem latitudinis, præter duas ab Euclide, qui de triangularibus, & parallelogrammis intra parallelas, &c. geometricè adhuc philosophatus est.

§. X.

LEMMA, & PROBLEMA.

Dato trapezio duûm laterum parallelorum æquale triangulum constituere.

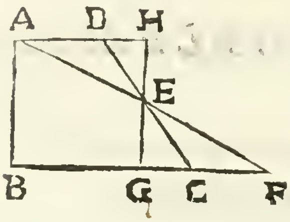


ESto trapezium ABCD duorũ laterum parallelorum AD, BC. Alterutrum laterum iũgentium duo latera parallela diuidatur bifariam in E. ex opposito angulo A educatur per E recta AE occurrens basi BC productæ in F. erit triangulũ ABF æquale trapezio ABCD. Quoniam enim per ea quæ demonstrauimus ad 31 de rectis intra eàsdem parallelàs se bifariantibus § 3, in duobus triangulis DAE, ECF duo latera DE, EC; AE, EF sunt æqualia, & anguli ad verticem E sunt æquales, ergo, per 4 erunt æqualia DAE, ECF, & quadrilaterum AECB est commune, ergo triangulum trapezio factum est æquale.

§. XI.

LEMMA, & PROBLEMA alterum.

Dato Trapezio in § 10 anteced. æquale parallelogrammum constituere.



BAsis trianguli ABF diuidatur bifariam in G, & ex G educatur GH parallela ipsi AB. est enim, per 41, æquale parallelogrammum ABGH triãgulo ABF, quod, per præcedens problema, factum est æquale trapezio ABCD; ergo eidem trapezio æquale factum est etiam parallelogrammum. Sin autem non fuerit constitutum triangulum ABF, fiet pari facilitate trapezio parallelogrammum æquale, si per punctum E bifariati lateris DC agatur parallela, &c. Tunc enim vel per 26, vel per 8 propos. li. 1. Eucl. ostendentur, vt in præmissis demonstrationibus, æqualia triangula DHE, EGC, estq; commune pentangulum ADEGB; ergo apposito, siue translato GCE ad, & in EHD, fiunt æqualia trapezium, & parallelogrammum.

§. XII.

COROLLARIVM.

Pro praxibus, & vsibus in re agraria, pro transformationibus. &c.

EX lemmatibus duobus antecedentibus patent praxes, & demonstratio dimetiendi campi trapezij, si æqualem illi, vel triangularem agrum, vel parallelogrammum, iuxta præcepta in antecedentibus dimetiare. Patet & transformatio per partium transpositionem, si pro triangulo ABF transferas ADE in FCF, pro parallelogrammo transferas GCE in EHD. &c. in geometricis figuris vel panni, vel lapidis, &c.

SCHOLION.

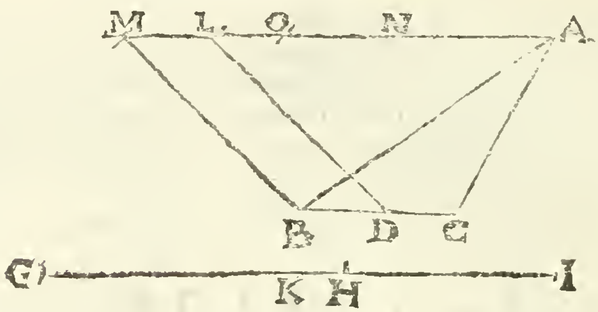
PLura theoremata de trapezijs inter easdem parallelas vide apud Proclum, à quo Clauius. Nos hic, & in seq. ad 45 paucula, quatenus potuimus de nostro, ad vsus, & praxes facillimas antecedentes, & seq. ad 45. &c.

Vide nos ad 1. propos. li. 6. pro diuisionibus trapeziorum ex antecedentibus.

§. XIII.

PROBLEMA,

Dato triangulo parallelogrammum æquale, atq; iſoperimetrum conſtituere.



Esto ſcalenum ABC, cuius baſi educatur à vertice A parallela AM vtrinq; produ cta quantum neceſſum fuerit.

In ductà indefinita GI ſumatur, ac ſecetur GH æqualis lõgiori lateri AB, & ſecetur reliqua HI æqualis lateri minori AC. Bifarientur & baſis BC in D, & recta GI in K. Internallo alterutrius dimidij, puta GK, ex D fiat ſectio in L, & ſumatur LM æqualis ipſi BD; iunctis BM, DL, erit parallelogrammum BL & æquale, & iſoperimetrum triangulo ABC. Parallelogrammum eſt BL, per 38, iungunt n. ipſæ BM, DL æquales, & parallelas BD, ML. Æquale eſt idem parallelogrammum BL triangulo ABC, per corollar. in § 1 apud nos ad hanc 41 propoſ. Eucl. eſt iſoperimetrum ex conſtructione. Nã ſecta eſt tota GI æqualis vtriq; ſimul laterum AB, AC, & latera BM, DL ſunt duo dimidia ipſius GI, hoc eſt ipſorum laterum AB, AC ſimul ſumptorum. ſunt deniq; BD, ML duo dimidia totius baſis BC. Ergo totus ambitus, ſiue quatuor latera parallelogrammi BL ſunt æqualia tribus lateribus trianguli ABC.

SCHO-

SCHOLION.

Ad facilitatem constructionis, & ad confirmationem demonstrationis.

1 Exemplum propositum in scaleno facilitatem lõgè maiorem præbet in Isoscele, vel Æquilatero. In quibus, sine designatione lineæ GI, satis erit accipere longitudinem vtriuslibet laterum triangularium, verbi gratia, finge verticem isoscelis esse in N, accepto spatio BN, & applicato velut in L, itemq; spatio eodem applicato velut in DO, erit (finge animo) parallelogrammum iungens puncta BLOD isoperimetrum, & æquale isosceli super base BC habenti verticem in N; propter demonstrata in antecedẽti problemate, & proportionaliter, ac facilius applicata isosceli. &c.

2 Neq; vero est quod quisquam cauilletur, affirmetq; compositis simul lateribus trianguli dati (veluti in exemplo scaleni BA, AC, translatis in GI, & bifariatis in K) spatium illud bifariationis ab extremo B, & medio D basis BC non pertingere ad parallelam MA. Falsa enim ea esset affirmatio. Nam super basi BC latera cuiuslibet trianguli, habentis verticem in parallelà MA, simul sumpta longiora sunt quam duplicata perpendicularis à vertice trianguli intra, vel extra basim productam demissa; etiam dato triangulo rectangulo, in quo apparet saltem alterum latus, obtensum angulo recto, maius esse altero latere perpendiculari, per 18 huius. Multo ergo magis veritas nostri pronuntiati constabit in triangulis non rectangulis habentibus vtrumque latus obliquatum in angulum ad parallelam MA, & consequenter vtrumq; seorsim sumptum longius perpendiculari; quæ, per corollarium è propos. 19, minima est omnium ab eodem puncto ad candẽ lineam eductarum. Cum igitur latus etiam isoscelis, finge BN, sit longius perpẽdiculari, quæ iungeret puncta, puta D, N, item alterum latus iungens CN sit longius eadem perpendiculari, non est dubitandum obliquum iungens BN peruenturum ex eodem B in punctum aliquod, verbi gratia in L parallelæ MA. Eodemq; modo differendum de altero latere isoscelis. Et dicta de isoscele multo magis valent de sca-

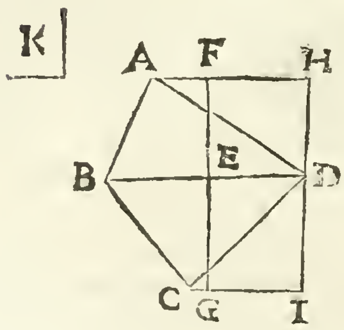
ſcaleno habente vtrumq; latus ſimul ſumptum longiora, quam iſoſceles; &c.

Hæc reiecimus in hoc Scholion, ne demonſtrationis perſpicuitatem, & breuitatem interturbaremus. Si quis velit dato triangulo parallelogrammum etiam rectangulum iſoperimetrum ęquale, videat apud alios quod hic omittimus, quia pendet è lib. 6. elem. quò nondum Tyrones adduximus.

§. XIV.

PROBLEMA è Clauij Geometrià practica.

Dato quadrilatero æquale parallelogrammũ in dato angulo facilius, quàm per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere, ac demonſtrare ex hac 41. Eucl.



SIT quadrilaterum quodcunque ABCD, & datus angulus K. Ducta diametro BD, eàq; diuisà bifariam in E, ducatur per E recta FG faciens in E angulũ FED dato angulo K ęqualem. Deinde ductà per D ipſi FG parallelà HI, & per A, C duabus AH, CI ipſi BD parallelis ſecãtibus FG, HI in F, H, G, I, cõſtitutum erit parallelogrammum FI in dato angulo G, a qui æqualis eſt angulo FED, internus externo, hoc eſt, angulo K. Dico idem parallelogrammum quadrilatero dato ABCD æquale eſſe. Quia, n. per coroll. § 1 è 41, parallelogrammum

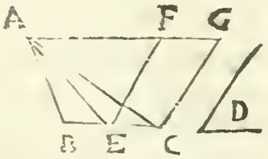
a 29. primi

FD

FD triangulo ABD, & parallelogrammum EI triangulo CBD æquale est; erit totum parallelogrammum FI quadrilatero ABCD æquale. quod est propositum.

Propos. XLII. Probl. XI.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



ESto datum triangulum ABC: datus angulus rectilineus D. oporteat autem triangulo ABC æquale parallelogrammum cõstituere in dato angulo D. [a] Bisecetur BC in E; iungatur AE; & [b] constituatur ad E rectæ EC angulo D æqualis angulus CEF. Atq; [c] per A quidem agatur ipsi EC parallela AG, per C verò ipsi EF parallela CG, eritq; FECG parallelogrammum. Et quia BE, EC æquales sunt, [d] erunt & triangula ABE, AEC æqualia; quippe super æqualibus basibus BE, EC, & in ijsdem parallelis BC, AG constituta: duplum ergo est triangulum ABC trianguli AEC: sed [e] parallelogrammum FECG duplum quoque est trianguli AEC; sunt enim super eadem basi EC, & in ijsdẽ parallelis EC, AG: est ergo parallelogrammum FECG æquale triangulo ABC; habetque angulum CEF æqualem dato angulo D. Dato ergo triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG constitutum est in angulo FEC dato angulo D æquali. Quod facere oportuit.

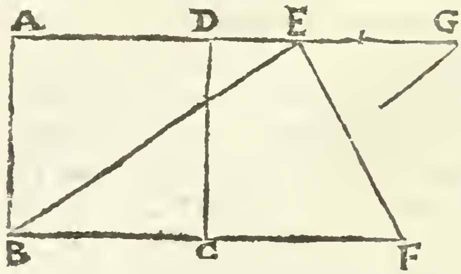
a prop. 10. 1.
b prop. 23. 1.
c prop. 31. 1.
d prop. 37. 1.
e prop. 41. 1.

§. I.

PROBLEMA Conuersum prop. 42.

Dato parallelogrammo æquale triangulum constituere in dato angulo rectilineo.

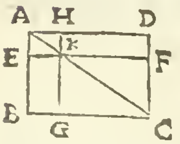
APud Clauium in Schol. ad 42 huius est problema conuersum huius proposit. 42 à Peletario inuentum. Ac licet nos ad proposit. 44, §4, modis facillimis, ac aliter, quam Peletarius, transformemus parallelogrammata, præsertim rectangula, atq; etiam trapezia in æqualia triangula; tamen ad copiam, & varietatem aponendum censui etiam problema Peletarij non solum hoc, sed & aliud suo loco, vbi etiam 44 propos. huius conuertit. Quod verò hìc apponimus, nos accepta tantum constructione, paucioribus lineis, & aliter demonstrationem expedimus, quam Peletarius apud citatum Clauium.



Sit datum parallelogrammum ABCD, & datus angulus G. Fiat angulus CBE angulo G æqualis, secetq; recta BE rectã AD productam in E. Extendatur quoq; BC ad F, sitq; CF æqualis rectæ BC, & iungatur EF. Dico triangulum BEF, habẽs angulum EBF angulo dato G æqualem, æquale esse parallelogrammo ABCD. *Patet demonstratio ex corollario, quod habes in § 1 ad propos. 41 huius. Nam triangulum BEF habens basim BF duplã basis BC parallelogrammi BD, est illi æquale.*

Propos. XLIII. Theor. XXXII.

Omnis parallelogrammi eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum complementa ſunt inter ſe æqualia.



SIt parallelogrammum ABCD, diametrus eius AC; circa AC parallelogramma ſint EH, FG: & quæ dicuntur complementa BK, KD. Dico complementa BK, KD æqualia eſſe. Quia enim ABCD parallelogrammum eſt, diametrus eius AC, fit[a] vt triangula ABC, ADC æqualia ſint. Rurſus quia EKHA parallelogrammum eſt, eius diametrus AK, [b] erunt triangula EAK, AHK æqualia. Eandem ob cauſam erunt æqualia triangula KFC, KGC. Cum igitur tam triangula AEK, AHK, quàm KGC, KFC ſint æqualia, erunt & duo AEK, KGC duobus AHK, KFC æqualia. Eſt verò & totum ABC toti ADC æquale: igitur reliquo complemento KD reliquum BK eſt æquale. Omnis igitur parallelogrammi, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *prop.* 34. 1.
b *prop.* 34. 1.

SCHOLION.

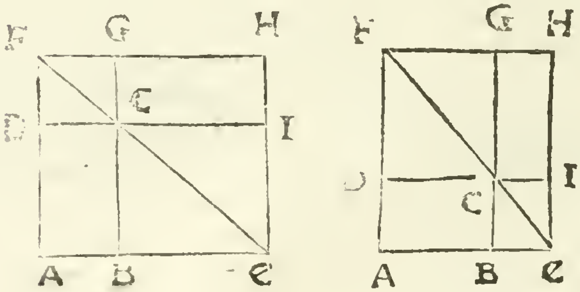
AD propoſ. 14 lib. ſexti videbis complementa BK, KD (in fig. Euclid.) ex eo quod ſunt æqualia habere etiam latera circa æquales angulos reciproca, & eſſe vt GK ad KH, ſic FK ad KE.

§. I.

§. I.

PROBLEMA è Clauij Geom. pract.

Dato rectangulo supra datam rectam æquale rectangulum facilius, quàm per prop. 45. lib. 1. Euclid. constituere, ac demonstrare ex 43.



Sit rectangangulum ABCD, cui supra datam rectam constituendum est rectangulum æquale. Producto quolibet latere, nimirum AB, capiatur BE æqualis datæ rectæ, siue ea sit maior latere AB, siue minor: atq; ex E per C recta ducatur secans AD productam in F, compleaturq; rectangulum AH, & rectæ BC, DC producantur vsq; ad G, I. c erit igitur complementum CH complemento CA æquale. Cum igitur latus CI sit lateri BE, ideſt, datæ rectæ æquale, factum erit quod proponitur.

c per hanc 43.

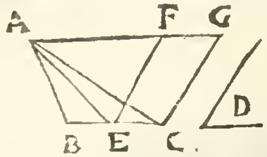
§.II.

§. II.

Vſus ſingularis, ac nouus antecedentium earum propoſitionum, quibus hactenus vſi ſumus pro demonſtrationibus, & praxibus bifariandarum planarum figurarum, præſertim triangulorum, & parallelogrammorum. &c.

IN lineis bifariantibus vel triangula, vel parallelogrammata etiam plurilatera iuxta modos à nobis traditos in antecedētibus eſt punctum quoddam latens, quod figuræ centrū grauitatis appellant Philoſophi Machinarij, &c. iuxta demōſtrata ab Archimede in lib. 1. Aequiponder. propoſ. 9, & 13. In qua verò particula ſit eius lineæ bifariantis prodit altera linea eandem figuram per alium tractum bifarians, ſeq; cum priore linea bifariante decuſſans. Punctum enim decuſſationis mutuæ duarum bifariantium linearum prodit centrum grauitatis figuræ, iuxta demonſtrata faciliimè ab Archim. in cit. lib. propoſit. 14, & à Pappo lib. 8. prop. 2. Itaq; per geminatas eas figurarum biſectiones aſſequeris, mi Tyro, theſaurum nonſolum in Machinaria Philoſophià ad vſus miros, de quibus nos in 4 noſtro Apiario, & alij, vnde poſſis tibi Euclidem condere, ac ornare; ſed etiam in Geometricæ Philoſophiæ parte illa, quæ agit de corporibus, præſertim aliquo modo rotundis. Quem vſum, vt diximus ad 10 propoſ. huius mirè, ac feliciter prodidit noſter Guldinus in lib. de cētro grauitatis. Is autem vſus pro menſuris, & proportionibus ſolidorum aliquo modo rotundorum habet regulam facilem, & vniuerſalem geminam cum ea, quam ex Guldino attulimus ad propoſ. 10. Exemplum hìc afferam tantum in facilioribus, & regularibus figuris. Inſpice figuram, Euclidis in propoſitione 42, antecedenti, ac finge in triangulo ABC ductam eſſe ab angulo B rectam bifariantem & latus AC, & ipſum triangulum, & per communem ſectionem cum alterà bifariante AE inuentum eſſe

 cen-



centrum grauitatis in ipsà AE. facilitatis vero maioris gratià pro tyronibus, aspiciatur etiam figura propositionis 41, in qua & triangulum ABC, & quadrangulum BD sunt rectangula. Itaque à centro grauitatis trianguli ABC ductà ad latus AB perpendiculari, si fingas circa AB gyrari triangulum ABC, superficies triangularis producet solidũ conicum, & centrum grauitatis signabit peripheriam circularẽ, quæ ducta in planum trianguli, idest multiplicata quantiate areæ triangularis per numerum (acceptis æqualibus mensuris, ac partibus linearum) peripheriæ à centro grauitatis signatæ, prodetur mensura, & quantitas solida coni, cuius basis circularis semidiameter est BC.

Persimili modo bifariatà AC, erit in puncto bifariationis cẽtrum grauitatis rectanguli BD. Quod gyratum circa AB conficiet cylindrum solidum, & centrum grauitatis signabit peripheriam, quæ ducta in planum BI prodet mensuram solidam cilindri, cuius basis circularis semidiameter est eadem BC. Vide quo te prouehant, mi Tyro, bifariationes triangulorum, & quadrangulorum, & in bifariationum lineis centra grauitatis per linearum communes decussationes inuentas ac quàm nouus, & singularis sit hìc vsus centri grauitatis in Geometricà philosophià.

Quam verò solida, & certa sit hæc regula docet idem qui inuenit Godinus. Apud quem vide demonstrationem pro cono lib. 3. ca. 3. propos. 1. & pro cilindro, ibid. propos. 7.

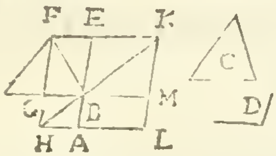
Nos in loco ad propos. inferius 45 ostendemus in areà circulari firmitatem huius vsus Guldiniani.

Vide etiam nos in Analectis ad 2 Apiar. in editione quartà nostrorum Apiariorum, vbi stereometriam rotundorum prodimus à centro grauitatis.

Pro-

Propos. XLIV. Probl. XII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.



SIt data recta AB; datus triãgulus C, datus angulus rectilineus D. Oporteat autem ad datam rectam AB dato triangulo C æquale parallelogrãmum applicare in angulo æquali angulo D. [a] Constituatur triangulo C æquale parallelogrammum BEFG in angulo EBG æquali angulo D; & iaceat BE ipsi AB in directum; producatur FG in H; [b] per A alterutri ipsãrum BG, EF agatur parallela AH, & iungatur HB. Et quia in parallelas AH, EF recta HF incidit, [c] erunt anguli AHF, HFE duobus rectis æquales: [d] ergo BHG, GFE duobus rectis sunt minores: [e] quæ autem à minoribus angulis quam sint duo recti in infinitum producuntur, concurrunt: igitur H B, F E productæ concurrent; concurrant in K; [f] & per K ad alterutram ipsarum EA, FH ducatur parallela K L, productis H A, G B in L, M: erit igitur H L K F parallelogrammum, diametrus eius H K: [g] parallelogramma circa HK erunt AG, ME. Complementa LB, BF: [h] ergo LB ipsi BF æquale est: sed & C ipsi B F est æquale: [i] erit igitur & LB ipsi C æquale. Et [k] quia angulus G B E æqualis est angulo ABM, & GBE æqualis angulo D, [l] erit & ABM ipsi D æqualis. Ad datam ergo rectam, &c. Quod facere oportuit.

a prop. 42. 1.
b prop. 31. 1.
c prop. 29. 1.
d ax. 9.
e ax. 11.
f prop. 31. 1.
g prop. 43. 1.
h prop. 43. 1.
i ax. 1.
k prop. 15. 1.
l ax. 1.

§. I.

SCHOLION.

De Applicatione Geometricâ, quæ Græcis: παραβολή. Vnde nam nomen id inditum conicæ ſectioni. Vſus propoſit. 44. in Conicis indicati.

Quid ſint, & differãt Conſtitutio, & Applicatio Geometrica.

1 IN *propoſitione* 42 *vtitur Geometra verbo:* conſtituere: *in hac vero* 44 *verbo.* applicare. *Ibi dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituit in dato angulo, hic dato triangulo in dato angulo ad datam rectam æquale parallelogrammum applicat. Itaq; primo notanda eſt differentia Conſtitutionis Geometricæ ab Applicatione Geometrica, vt huius quidditas melius comprehendatur. Proclus:* Conſtitutio totum conſtituit ſpatium tum ipſum, tum latera cuncta. Applicatio verò cùm vnum latus datum habeat, ad hoc conſtituit ipſum ſpatium, quippe quæ neq; deficit iuxta hanc extenſionem, neque excedit, ſed vno hoc vtitur latere, quod aream comprehendit.

Parabola Geometrica vnde primũ, & quid ſit.

Sectio parabolica in cono quid ſit.

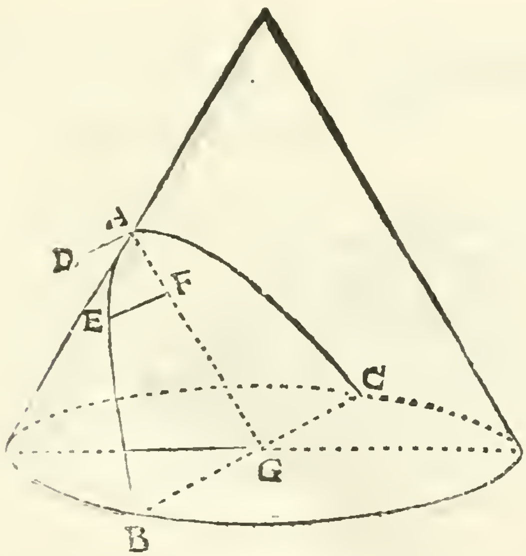
Hæc applicatio græce παραβολή *parabole appellata eſt primum a Pythagoricis, & à planis figuris deinde tranſlata eſt ea denominatio ad vnam e tribus conicarum ſectionum lineis, quæ fit in communi ſectione plani ſecantis conum parallelos alteri plano coni dorſum contingenti. Sic ego ad faciliorem captum Tyronum explico quod alij aliter. Hæc ſatis, ac propriè ad hanc* 44 *propoſit. Eucl.*

Quod autem pertinet ad reliqua duo genera applicationum geometricarum, quarum altera fit cum exceſſu, altera cum defectu, ſi quando ſcilicet applicatio ita fit vt ſpatium applicatum excedat datam lineam, vel non expleat longitudinem datæ lineæ, quarum altera ὑπερβολή *altera* ἔλλειψις *appellatur, eæ applicationes pertinent ad propoſ.* 28, & 29 *lib* 6 *Euclidis, vbi eas vſurpat Geometra. Ibi nos quæ ad eas pertinent exponemus.*

2 In-

a Interim caueant Tyrones ab hallucinatione, qua capti sunt etiam aliqui magni nominis antiqui Geometræ, neue existiment earum applicationum Geometricarum nomina conicis lineis indita esse à sectionibus vel ad angulos rectos æquales, vel ad obtusos excedentes, vel ad acutos deficientes, &c. Sed sciant nomina ea (vt in planis de applicatione, siue de parabola prædictum est) ijs conicis sectionibus apposita esse ab affectionibus, quas demonstrat Apollonius lib. 1. con. Propos. 11, 12, 13.

Hallucinatio aliquorũ de origine, & essentiã parabolæ.



Omissis hyperbola, & ellipsi, ac reiectis in suum locum ad lib. 6, hic Tyronibus exemplum esto pro Applicatione, siue Parabolà in lineà sectionis con ex . Demonstrat Apollonius affectionem sectionis ABC parabolicæ hanc esse vt ad datam AD (quam latus rectum appellant; vide eius inuentionem, & conditiones in 5 prop. Apollonij) applicatum rectangulum sub DA, AF comprehensum æquale sit quadrato rectæ EF parallelæ ipsi BC. Quælibet autem ad Axem AG ductæ parallelæ ipsi BC vocantur ordinatim actæ ad axẽ, & recta DA dicitur ea, iuxta quã possũt omnes ordinatim actæ ad axem; quia sectionis parabolicæ id proprium est vt quadrata singularum ordinatim ad axem actarum sint æqualia rectãgulo comprehenso sub parte axis intercepta inter verticem A sectionis BAC, & inter ordinatim actam, & sub eadem semper lineà DA.

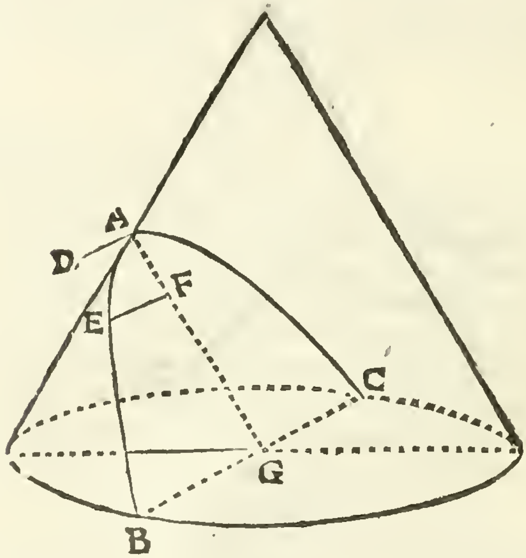
In exemplo explicatur unde nomen parabolæ appellata.

Conica aliquot definitiones.

In

Vnde nam dicta hyperbole, & ellipsis geometrica.

In sectionibus verò hyperbolica excedūt datam DA, in elliptica deficiunt, &c. Quapropter sola sectio conica facta parallela vtrilibet laterum trianguli conum per axem secantis dicta est parabole, siue applicatio non deficiēs, nec excedens quantitatem datæ in ea proprietate &c. Circa earum sectionum conicarum denominationes vide, sed cautè iuxta nostra monita, ea quæ habentur ante lib. 1. con. Apollon. apud Pappum, Geminum, atque etiam apud Eutocium in commentar. post epistolam Apollonij.



In conicis verò theorijs vsus est huius propositionis per applicationes variorum rectangulorum ad vnam, eamdemq; rectam AD, quibus rectangulis dum inueniuntur æqualia quadrata, sunt eorum quadratorum latera mediæ quædam rectæ proportionales inter rectangulorum latera, per quas medias describitur ipsa sectio parabolica ABC in plano. Sed ante omnia opus est inuenire rectam ipsam AD, lineam scilicet applicationum. Qua inuenta vario deinde modo describitur sectio BAC; & quarta pars ipsius rectæ AD applicata ex A ad diametrum AG, dat punctum mirificum ad vstiones vehementissimas, ad quod punctum reflectuntur omnes rectæ, ac radij axi AG paralleli, atq; incidentes in cauum vas parabolicum. &c. Quoniam verò & inuentio lineæ applicationis AD, & descriptiones paraboles BAC supponunt cognitionem

li-

linearum proportionalium inueniendarum, quæ pertinent ad lib.6 elem. ideo hìc tantum indicantur vſus aliqui huius 44 prop. ad ea, quæ apertius docebimus, & exercebimus loco ſuo, ſcilicet poſt propoſit. 29 lib.6. elem.

Vide interim Ap. noſtrum 7, in quo ad theorias, & praxes iucundas, ac miras è parabola, paradoxa exponuntur.

§. II.

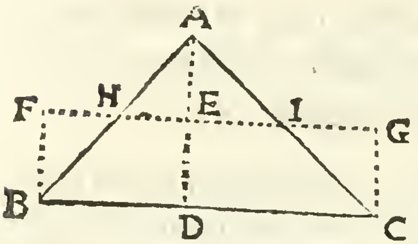
Vſus geometrici propoſit. 44 in transformationibus, &c. figurarum etiam irregularium in rectangula. &c.

Nos in antecedentum propoſitionum Euclidearum vſibus, dum figurarum transformationes, præſertim per partiũ transpoſitiones, exhibuimus, vſi ſumus partim conſtitutione, partim applicatione Geometricis, & in angulo recto. Quibus lubet & hìc nunc addere ſequentia, in quibus alia etiam ratione, ac facillimà figurarum quantumuis irregularium metamorphoſes exercebimus partim per conſtitutionem, partim per applicationem Geometricas ad datam rectam, quæ ſit latus trianguli, vel alterius figuræ transformandæ, & in dato angulo recto; Itaque. —

— Triangula, & Trapezia tam vſitata, quàm Cilogonia in dato angulo ad datam rectam conſtituere, applicare, transformare in æqualia rectangula præter modos ab alijs traditos, per duorum laterum bifariationem, & æqualium partium tranſpoſitionem. Quam rem in antecedentibus ad 41 propoſit. præſtitimus ſine determinatione ad datum angulum.

PROBLEMA I.

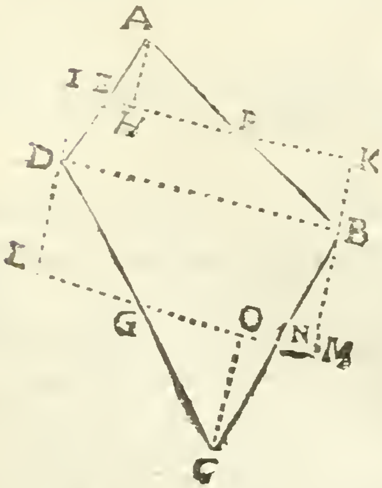
Ad datam BC in angulo recto applicabitur rectangulum triangulo æquale per laterum bifariationem. &c. sic.



Trianguli ABC duo latera BA, AC verticalem angulū A comprehendentia secentur bifariam in H, & I, & per H, & I ducatur recta donec occurrat in F, & G duabus FB, GC perpendiculariter erectis ex extremis B, & C basis BC, demittaturque ex A perpendicularis in punctum E rectæ FG. Vt verò cadat AE intra triangulum, ùtere præcepto, quod habes in § 5 ad 41 prop. Euclid. Dico primo quadrangulum FBCG esse rectangulum parallelogrammum. Quod licet ex § 6 ad 41 patere possit; tamen tyronibus hic indigito. Sunt enim per constructionem perpendiculares FB, GC, ac præterea quoniam latera AB, AC secta sunt bifariam in H, & I, & AE est perpendicularis, ac proinde anguli DBF, FEA, AEG, GCB æquales, item æquales ad verticem H, & I, & æqualia triangula BFH, HEA, item EAI, ICG, & latera FB, GC æqualia eidem AE sunt & inter se æqualia, Ergo rectæ FG, BC, quæ æquales, & parallelas FB, GC iungunt, sunt & ipsæ æquales, ac parallelæ. Igitur Parallelogrammum rectangulum est FBCG. Dico secundo, eidem parallelogrammo æquale esse triangulum ABC, & per æqualium partium transpositionem fieri facile ex triãgulo parallelogrammum rectangulum. Quod patet ex antecedentibus præsertim § 5, & 6 ad prop. 41.

PROBLEMA II.

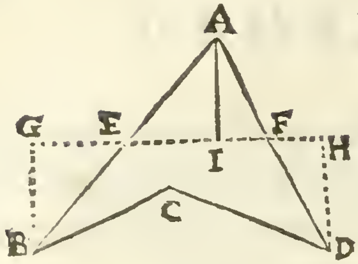
Trapezio verò, cuius duo latera opposita etiam non sint parallela, in angulo recto ad rectam applicabitur æquale rectangulum, per binorum lat. bifar. sic.



TRapezij ABCD in duo triãgula ABD, DCB risoluti bina latera angulorum oppositorum bifarietur in E, F, G, N; & ad extrema cõmunis basis DB agantur perpendiculares occurrentes duabus ductis per bifariationes, factũque erit rectãgulum IKML æquale trapezio applicatũ ad DB in angulo recto: &c. Et fiet praxis trãsformationis p trãspositiones partium æqualium, si demittantur ex A, & C perpendiculares AH, CO. Quæ omnia patent ex demonstratis in antecedentibus de triangulo transformato iu rectangulum. &c.

PROBLEMA III.

Ad rectam verò in ang. recto applicabitur triangulo cilogonio æquale quadrangulum cilogonium, &c. sic.

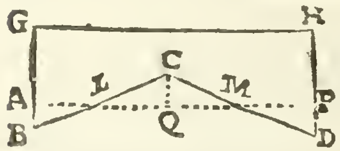


PEr trianguli quadrilateri cilogonij ABCD bisariata latera in E, & F agatur recta, ad quam educantur ex B, & D perpendiculares occurrentes in G, H; eritque quadrangulum cilogonium GHDCB æquale cilogonio triãgulo ABCD in angulo recto ad rectã GH. &c. Ac demissà perpendiculari AI, erunt æquales GB, HD, iuxta demonstrata in antecedentibus. Ac transponentur ex triangulo in rectangulum partes æquales AIF in FHD, & AIE in EGB. &c.

PROBLEMA IV.

Trapezium cilogonium in angulo recto ad datam in æquale rectangulum &c. sic.

SEorsum esto eductum ex antecedenti figura Trapezium GBCDH. Per laterum BC, CD bifariationes L, M agatur recta AP, eritq; ad datam GH rectangulum GHPA æquale quadrangulo rectangulo cilogonio GHDCB. Ac facilis erit transpositio partium si triangula LBA, MDP transferantur in locum triangularem CLM ita, vt iuxta se sint AB, PD ad perpenditularem CQ; ac B, & D concurrant in C.



Esse parallelogrammum rectãgulum GH PH, patet & ex antecedenti Problemate, & ex 9 I. nam cadit recta AP in perpendiculares per cõstructionem antecedentis probl. 3, hoc est in parallelas BG, DH, ergo anguli GHP, HPM sunt duobus rectis æquales, at rectus est H à perpendiculari, ergo & P rectus: pariter de G, & H. Eruntq; deinceps anguli BAL, MPD & ipsi recti.

Osten-

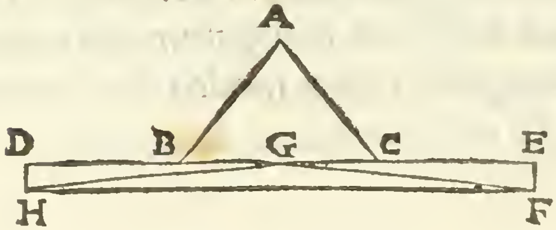
Ostendentur autem, vt in antecedentibus, per 26 pri. triangula BAL, LQC, & CQM, MPD æqualia, & ipsi CQ æquales AB, PD; ergo, detractis æqualibus AB, PD ex GB, HD æqualibus per antecedentia, in probl. 1, & 3, remanent æquales GA, HP. Quas dum iungit AP conficit, per 33, parallelogrammum rectangulū AH, ac æquale demonstrandum pari modo, quo in antecedentibus, trapezio cilogonio GHDCB.

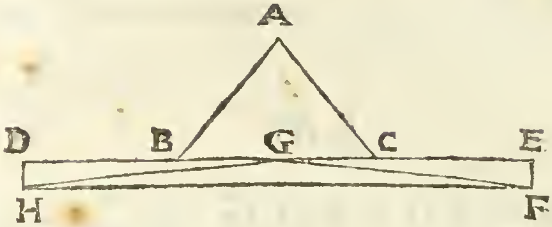
§. III.

PARADOXVM, & probl. 5.

Dato triangulo minus triangulum constituere, cuius singula latera dati maioris sint maiora.

E*Xemplum esto in Apiar. 3, Prog. 8, prop. 1. ex Pappi prop. 41 tertij Collec. Mathematicarum.* Datum esto ABC. Producta vtrinque basi, secentur BD ipsi BA, & CE ipsi CA æquales. Per 44 pri. ad rectam DE applicetur parallelogrammum DF ęquale dato triangulo ABC. Sumpto quouis puncto G in lineà DE, iungantur HG, GF. Dico triangulum HGF esse quidem minus triangulo ABC, singula autem latera minoris trianguli esse maiora singulis maioris. Quoniam enim parallelogrammum DF æquale est per constructionem ipsi triangulo BA-





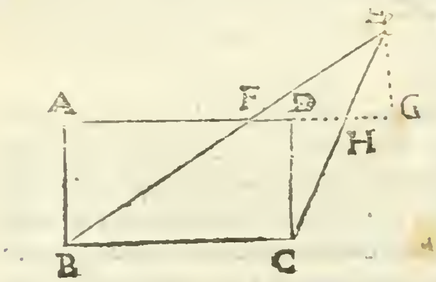
C, & triangulum HGF eandem basim habet, atque inter easdem est parallelas DE, HF cum parallelogrammo DF, erit triangulum HGF dimidia pars parallelogrammi DF, hoc est trianguli BAC. Præterea quoniam in triangulis DHG, GEF latera maiori angulo opposita GH, GF sunt maiora quàm DG, GE, ac multo magis, quàm partes DB, CE, hoc est quàm latera illis æqualia BA, AC, propterea erunt trianguli HGF latus quidem HG maius latere BA, latus verò GF maius latere AC, ac reliquum deniq; HF (quod in parallelogrammo DF æquale est ipsi DE) erit vt totum longe maius, quàm pars BC, &c. Igitur construximus triangulum minus dato triangulo, cuius minoris singula latera sunt maiora singulis alterius maioris.

§. IV.

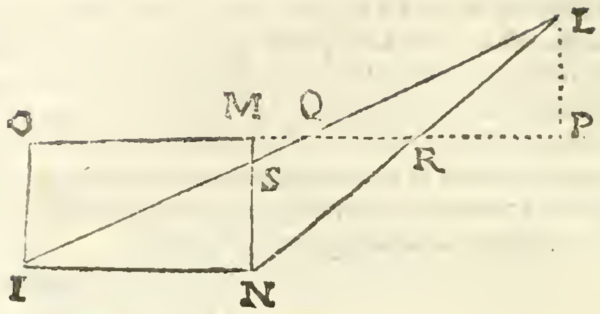
PROBLEMA VI.

Ad datum rectãguli latus in dato angulo applicare facillimè triangulum ipsi rectangulo æquale, præter modos ab alijs traditos, & vulgatos ad 42, & 44 prop.

SIt hæc quasi conuersa propos. 42, & 44, si ea accipiantur de rectangulo, vt nos hic ad facilitatem pro Tyronibus. Et quoniam aliquando angulus datus potest esse ita acutus, vt & trianguli applicandi nimia obliquitas, & perpendicularis à vertice trianguli deducta cadant in alterutram partem extra rectanguli latera, nec tunc ita facilis appareat Tyronibus propositio, ideo pretium operæ duximus in aliquo eius obliquitatis exemplo exhibere Tyronibus vnum, aut alterum specimen reformationis rectanguli in triangulum ad data angulum, & lineam.



1 Sit rectangulum ABCD, ad cuius latus applicandum sit triangulum rectangulo æquale, & angulus datus sit acutus, & quantitatis CBE. Iuxta eius anguli quantitatem producatur recta BE extra rectangulum, & casus esto, in quo secet rectanguli latus AD in F. Igitur in recta indefinita BE accipiatur FE æqualis ipsi BF, & producatur AD donec occurrat in G perpendiculari demissæ ab E. Deniq; iungatur CE. Dico triangulum CBE in angulo FBC applicatum ad BC esse æquale rectangulo AC. Quoniam enim, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 31 Euclid. § 4, & 6 à parallelis AG, BC bifariatur latus vtrumq; trianguli BEC, in F, & H, & inter parallelas AB, DC, EG rectæ AG, BE, & DG, CE mutuo se bifariam secant in F, & in H, per corollar. 2 in § 3 ad 31, erunt triangulorum ABF, FEG latera BF, FE, & AF, FG æqualia, item in triangulis DCH, HEG latera sunt æqualia CH, HE, & DH, HG, sunt verò & anguli ad vertices F, & H æquales, ergo, per 4 prop. Eucl. sunt æqualia ABF, FEG, item æqualia DCH, HEG. Igitur ABF est æquale duobus FEH, HDC, est autem commune FBCD, ergo toti rectangulo AC est æquale triangulum BEC.



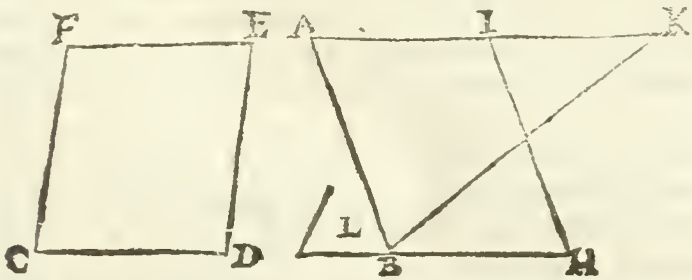
2 *Datus angulus ita sit acutus, vt à trianguli altero latere IL secetur latus MN rectanguli ON. Fiant cætera ad constructionem spectantia, vt in casu antecedenti, nempè productio ipsius OM indefinita, recta QL fiat æqualis ipsi QI; ex L demissio perpendicularis occurrens productæ OM in P. Eadem erit demonstratio propter eadem, quæ in antecedenti casu, nisi quod in hoc secundo casu superest triangulum commune MSQ auferendum, vt reliquum trapezium MSIO sit æquale ipsi partiali triangulo SLN. Satis est indicare prouectioribus. In gratiam tamen Tyronum paucis expono sic. Triangulum QOI est æquale triangulo QLP; & triangulum RMN est æquale triangulo RLP, ergo si ex QOI, & ex RMN auferatur commune QMS, erunt æqualia inter se trapezium MSIO, & SLN. est vero commune SIN, ergo totum rectangulum ON est æquale toti triangulo ILN. Igitur in vtroq; casu ad datum rectãguli latus in dato angulo applicatum est triangulũ ipsi rectangulo æquale.*

§. V.

PROBLEMA conuersum prop. 44, aliter, quam in § 4.

Ad datam rectam lineam dato parallelogrã-mo applicare equale triangulum in dato angulo rectilineo.

IN Scholijs Clauij ad 44 huius problema est conuersum huius propos. 44 à Peletario ingeniose quidem constructum, sed nõ sine superflua constructione trianguli æqualis dato parallelogrammo CE. Itaq; nos constructione breuiore problema absoluemus.



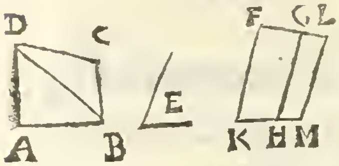
Sit data recta AB; datum parallelogrammum CDEF, & datus angulus L. a Fiat super datâ rectâ AB parallelogrammum ABHI æquale parallelogrammo CDEF habens angulum A angulo L æqualem, & producatur AI ad K, vt sit IK æqualis ipsi AI, iungaturq; recta BK. Dico triangulum ABK constitutum super datam ractam AB, habensque angulum A æqualem dato angulo L, æquale esse dato parallelogrammo CDEF. *est enim triangulum ABK æquale parallelogrammo BI (per coroll. in § 1 ad 41) quod est constructum æquale parallelogrammo CE; ergo eidem CE est æquale triangulum ABK in dato angulo A æquali facto ipsi L, ad datam AB constructum. Quæ erant facienda.*

a 44.pri.

PRO-

Propoſ. XLV. Probl. XIII.

Dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.



Eſto datum rectilineum ABCD: datus angulus rectilineus E. Oporteat autem ipſi ABCD ęquale parallelogrammum in dato angulo E conſtituere. iungatur DB, & [a] conſtituatur triangulo ABD æquale parallelogrammum FH in angulo HKF æquali angulo E. Deinde [b] applicetur ad lineam GH parallelogrammum GM triangulo DBC æquale, in angulo GHM æquali angulo E. Et [c] quia angulus E vtriq; HKF, GHM eſt æqualis, erunt & HKF, GHM æquales: addatur communis KHG: [d] ergo HKF, KHG æquales erunt his GHM, KHG: at hi [e] ſunt æquales duobus rectis, ergo & illi. Quare ad punctum H rectæ GH poſitæ ſunt duæ lineæ KH, HM non ad eaſdem partes, facientes angulos deinceps æquales duobus rectis, [f] in directum ergo erunt KH, HM. Et quia in parallelas KM, FG recta incidit HG, [g] erunt anguli alterni MHG, HGF æquales: Communis apponatur HGL: [i] erunt ergo hi MHG, HGL his HGF, HGL, æquales; [k] at illi ſunt æquales duobus rectis: ergo & hi: [l] in directum ergo eſt FG ipſi GL. Et quia tam KF, HG, quam HG, ML æquales, & parallelæ ſunt, [m] erunt & KF, ML æquales, & parallelæ: & coniungunt illas rectæ KM; FL: [n] ergo & KM, FL æquales, & parallelæ erunt. Parallelogrammum ergo eſt KFLM. & cum triangulum ABD æquale ſit parallelogrammo HF, & triangulum DBC parallelogrammo GM, erit totum rectilineum ABCD toti KFLM æquale. Dato ergo rectilineo ABCD æquale parallelogrammum conſtituimus KFLM, in angulo dato E. Quod facere oportebat.

a prop. 42. 1.
b prop. 41. 1.
c per ſtruct.
d ax 2. ſtruct.
e prop. 29. 1.
f prop 14. 1.
g prop. 27. 1.
i ax 2.
k prop. 29. 1.
l prop. 14. 1.
m prop. 30. 1.
n prop 33. 1.

§. I.

§. I.

SCHOLION.

Ad circuli Quadraturam.

EX hoc *(inquit Proclus)* vt arbitror problemate prisci incitati æquale circulo Quadrangulum describere quæsierunt. Si enim parallelogrammum cuicumq; rectilineo æquale reperitur, quæstione dignum est num rectilineæ quoq; figuræ possint curuilineis æquales ostendi.

Ex 45 occasio quæstionis de circuli quadratura.

De vtràq; hic à Proclo quæstione aliqua nos ad ornatum Euclidis facillima pro Tyronibus exponemus.

Quod ad circuli quadraturam attinet, ea speculatiuè traditur etiam per hanc 45 proposit. Eucl. Scitur enim ex Archimede (vt mox inferius videbis,cui triãgulo sit æqualis area circuli. Rectilineum id triangulum potest per antecedentem 44, ac per hanc 45 vniuersalius, transformari in æquale parallelogrammum. Parallelogrammum vero (immo vniuersaliter rectilineum quodlibet, etiam sine vsu huius 45) non solum è 6. li. aut ex vltima li. 2. Eucl. sed etiam è 47 proposit. huius lib. 1. ex nostro inuento, vt videbis, transformatur in æquale quadratum. Itaque patet quemadmodum circulus ad quadraturam traduci possit etiam per anteced. 44, & per hanc 4 , & mox per 47 inferius.

Quadratura circuli theorema inuentũ iã est.

Sed speculatiuè, vt dixi, ac vt Theorema, non vt Problema habetur ea circuli quadratura. Triangulũ enim circulo æquale habet basim æqualem peripheriæ circuli theorematicè demõstratam. At problematicè curuæ peripheriæ rectã præcisè æqualẽ exhibere adhuc in labore geometrico est. Quæritur igitur de circulo, an quemadmodum hic de rectilineo quolibet, possit & ipse in quadrangulum æquale transferri? Affirmo. Mox inferius problema exercebimus. Accipe hic interim, mi Tyro, ex Zenodoro apud Theonem de Isoperimetris propositionem 4, loco lemmatis, quod demonstratur ex antecedentibus.

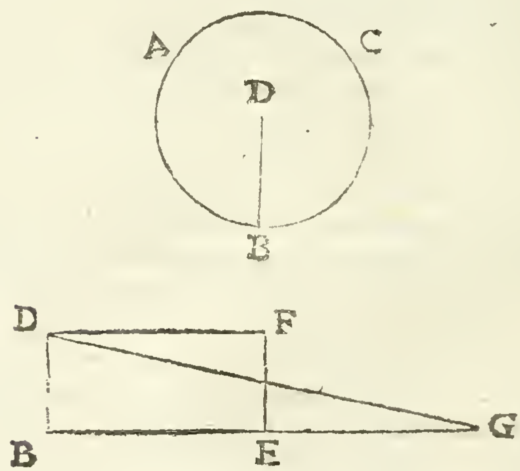
Quadratura circuli problema nondum inuentum est.

§. II.

LEMMA I.

Circulus quicũq; cui rectangulo æqualis sit.

Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.



ESto circulus ABC, cuius semidiameter DB: Rectangulum autem DBEF comprehensum sub DB semidiametro circuli, & BE recta, quæ æqualis sit dimidiatæ circumferentiæ circuli. Dico aream circuli ABC æqualem esse rectangulo DBEF. Producatur enim BE in continuum, ponaturq; EG æqualis ipsi BE, vt sit BG recta æqualis toti circumferentiæ circuli. Coniungantur deniq; puncta D, G rectâ DG. Quoniã igitur (per 1 proposit. Archimedis de dimensione circuli) circulus ABC æqualis est triangulo DBG: est autem triangulum DBG rectangulo DBEF æquale, vt ex proposit. 41. lib. 1. Euclid. demonstrat

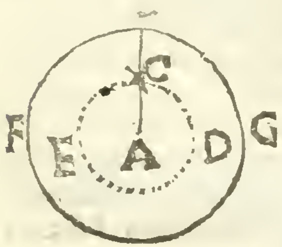
ſtratur, quod baſis trianguli dupla ſit baſis rectanguli, erit qu q; circulus ABC rectangulo DBEF æqualis. Area ergo cuiuslibet circuli æqualis eſt rectangulo &c. quod oſtendendum erat.

§.III.

Idem lemma de dimenſione areæ circularis demonſtratum ex nouo vſu centri grauitatis in Geometria rotundorum.

IVxta regulam vniuerſalem noſtri Guldini: Quantitas rotata in viam rotationis a centro grauitatis deſignatā ductā, producit quantitatem ſuperioris generis, *vt hìc linea ſuperficiē.* *Nam recta AB biſariata in C, vbi centrum eſt grauitatis, altero extremo perſtante in centro A, ſi rotetur in orbem, centrum grauitatis C ſignat circuli minoris peripheriam CDE, dum alterū extremū B ſignat circuli maioris peripheriam BFG, ductaq; recta AB quantitas in viam rotationis CDE à centro grauitatis C deſignatam producit quātitatē areæ circuli maioris BFG. Quod conuenit omnino cum demonſtratione in antecedenti lemmate poſità. Nam ex Pappo libro quinto, propoſitione vndecimà, circulorum peripheriæ habent inter ſe proportionem diametrorum. Itaq; vt AC eſt dimidia ipſius AB, ſic peripheria CDE eſt dimidia peripheriæ BFG. Itaque dum affirmatur aream circuli BFG eſſe æqualem quantitati comprehenſæ ſub AB, & ſub peripheriâ CDE à centro grauitatis deſignatà, nihil aliud indicatur, quàm areā circuli BFG eſſe æqualem rectangulo ſub AB ſemidiametro, & ſub dimidia peripheriâ, vt demonſtrauit Zenodorus apud Theonem; cùm CDE peripheria ſit dimidia peripheriæ BFG. Specimen hoc in loco non diſſimulandum cenſui, vt pateat quam certa ſit regula Guldini in vſu centri grauitatis pro procreationibus, ac dimenſionibus rotundarū quarumcunque figurarum planarum, & ſolidarum.*

Papp. lib. 5. prop. 11.



§. IV.

LEMMA II.

De proportione diametri ad circumferentiam.

SVppono vulgatissimam proportionem diametri ad circumferentiam ab Archimede demonstratã in lib. de dimensione circuli. est ea proportio tripla sesquiseptima, vt 22 ad 7; quatenus s. satis est operationibus physicis, & organicis, vt sine sensibili differentia exhibeatur peripheriæ circuli recta linea æqualis. Geometricè præcisè philosophando demonstrauit Archimedes cuiuslibet circuli circumferentiam suam diametrum ter cõtinere, & insuper eius partẽ, quæ minor est septimà, & maior decem septuagenis primis. Quare licet ex diametro triplicatà, & addità vnà eiusdem diametri septimà parte fiat peripheria circuli iustà maior, tamen cum differentia ea sit, iuxta demõstrata ab Archimede, adeo exigua, accepta fuit quadam cum gometrica æquitate dimensio ea magni Archimedis præ alys. Nam qui per mixtas, & difficiles lineas moliti sunt circuli quadraturam, præter alias difficultates, etiam ipsas mixtas lineas exhibere non potuerunt cõtinuatas, & integras, atq; ideo, ijs postpositis, pleriq; omnes præcipui Philosophi Geometrici Archimedẽ secuti sunt. Vide nos in Ap. 2, progym. 3. Schol. 2 post propos. 11.

§. V.

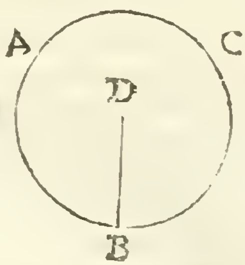
PROBLEMA.

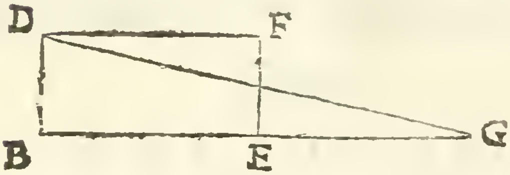
Dato circulo æquale parallelogrammũ constituere in dato angulo recto, cùm vsu organico circini proportionum.

Hic

HIc non proposuimus vertere circulum in quadratum æquale, quod fiet inferius ad propos. 47 huius, § 11, & aliter ad 17, 0, & 25 propositiones lib. 6. elem. Sequimur vestigia hic geometrica elementaria, ac per ea deducimus sensim Tyrones ad alia vlteriora iuxta semitas ab Euclide signatas. Quod poterat proponi sic: dato circulo æquale rectangulum constituere, libuit proponere iuxta verba huius 45, vt quam maximè inhærendo elementariæ huic propositioni, appareat Tyroni quemadmodum ea influat in propositum de circulo problema, & re ipsa ostendamus rectè cũ Proclo veteres Geometras censuisse huc adduci posse etiam propositionem: dato curuilineo, siue circulo æquale rectilineum parallelogrammum, &c.

Iam verò propositi problema quatenus hic satis est, facilè expeditur e duobus antecedentibus lemmatibus. Quorum secundum constructioni, primum cum secundo demonstrationi erunt vsui. Nã





ad alterum extremum B ipsius BG infinitæ erigatur perpẽdicularis BD æqualis semidiametro dati circuli ABC, & interuallum BD ex B duplicetur in ipsà BG, & duplicatæ BD accipiatur in circino proportionũ pars septima, iuxta praxes indicatas ad propos. 10 huius, earumq; septimarum partium quatuor (siue ipsa septima quater replicata) addantur duplicatæ BD in ipsa BG, fiatq; sectio in E, ac perficiatur parallelogrammum BF sub lateribus DB, BE. Quod dico esse æquale dato circulo ABC.

Nam iuxta secundi lemmatis calculos Archimedeos semidiameter BD erit partium $3\frac{1}{2}$: duplicata erit 7, additis quatuor septimis partibus erit 11. est autem circumferantia tota ABC tripla diametri in 7 partes æquales diuisæ, cum vna septimà, idest partium 22, ex Archimede, igitur ipsa BE, quæ est 11, est dimidia peripheriæ ABC; est vero BD sumpta æqualis semidiametro dati circuli ABC; ergo rectangulum BF est comprehensum sub semidiametro, & dimidiata circumferentià dati circuli ABC; ergo per 1 lemma rectangulum BF est constitutum æquale dato circulo ABC. Quod erat faciendum.

SCHOLION.
De curuilineorum, etiam præter circulum, quadratione.

Curuilineorum pluriformium trāsformationes in rectilinea apud nos.

IAm quod attinet ad posteriora Procli verba de quæstione an, quemadmodum rectilinea transformantur in æqualia rectilinea parallelogrammata, &c. sic & curuilinea possint in æqualia rectilinea; nos eam quæstionem plurimis, ac diuersiformibus exemplis absoluimus in Apiarijs nostris Philosophiæ Mathematicæ, Apiar. 1, Prælibam. 3, & Apiario 3. vbi de angulorum, & figurarum paradoxis. Vnico exemplo curuilineum sub circuli peripheria quadrabimus ad sequ. 46 prop. quia ea quadratio supponit quadrati descriptionem, de quà in seq.

§. VI.

SCHOLION.
De vsu, & vniuersalitate propos. 45 Eucl. ad transformationes, augmentationes, imminutiones, proportiones, dimensiones planarum figurarum.

QVæ docuit Euclides in propos. anteced. 44 de triangulis in parallelogrammata transformandis, in hac 45 vniuersè docet

docet non solũ de triangulo, sed de omni rectilinea figura transformandà in æquale parallelogrammum. Vniuersalis etiam regula est huiusce vniuersalis transformationis, quæ tamen pendet ab antecedentibus particularibus propositionibus. Nam quodlibet rectilineum vt in æquale parallelogrammum transformetur, resoluẽdum est in triangula, quorum singula in parallelogrammata æqualia transformantur constantia vnum totale parallelogrammum æquale dato rectilineo in triangula resoluto.

Regula vniuersalis pro trãsformandis rectilineis in æqualia parallelogrãmata.

§. VII.

PROBLEMA.

Aream cuiuscunq; rectilinei quantumuis irregularis facillime dimetiri.

SI quando accidat datum rectilineum valde esse irregulare, nec facile quantitatem eius areæ posse cognosci, iuxta hanc 45 propos. Eucl. rectilineum trãsferatur in ęquale parallelogramma rectangulum, scilicet in dato angulo recto, &c. ac tunc licebit aream dimetiri ex ductu duorum laterum inter se comprehendentium parallelogramma, iuxta § 12 ad propos. 35, & cum vsu circini proportionum.

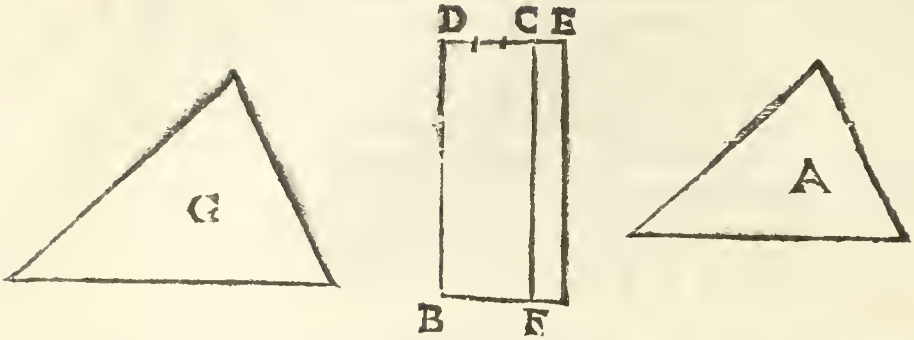
Regula pro dimensioni bus areaũ in rectilineis irregularibus.

§. VIII.

PROBLEMA.

Datis quibuslibet rectilineis, eorum in quantitate differentiam inuestigare.

VT notam habeas quantitatem, quà, in seq. figurà, vel G excedit spatium A, vel A deficit à G, transformato G ex modis



Regula cognoscendi quantitatem excessus, vel defectus inter data rectilinea.

dis prædoctis in æquale parallelogrammum BE super vno ipsius G latere, itemq; super DB facto BC æquali ipsi A, erit FE quo G superat ipsum A, & quo A deficit à G. Præcisiora & indiuidualiora mox inseq probl. vide, ac etiam ad propos. 1. & ad propós. 25. libri 6.

§. IX.

PROBLEMA A.

Datum rectilineum augere, &c.

Regula augendi rectilineũ in data quantitate.

SI pariter datum rectilineum A (quantumuis irregulare) augere velis ad quantitatem alterius figuræ G, augendum rectilineum A transformabitur in æquale parallelogrammũ BC (etiam per aliquem è modis à nobis traditis in antecedentibus ad datum latus figuræ transformandæ) deinde ad parallelogrammi BC latus DB constituendum erit parallelogrammum FE æquale ipsi G, eritq; A, siue BC, auctum ad quantitatem ipsius G, siue ipsius BE. Ad prop. 1 lib. 6 vide indiuidualiora ibi suo in loco. Vt vero rectilineum BE auctum reformetur in simile ipsi rectilineo A, opus est in primis prop. 25 lib. 6. Quare nos hic eam reformationẽ non quærimus, præter prædicta. Si BE in æquale triangulũ velis reformare, habes in antecedentibus modos varios, ad prop. 42, § 1. Ad 44, § 4, & § 5.

§. X.

§. X.

PROBLEMA.

Datis quibuslibet rectilineis, quam inter se proportionem habeant etjam in numeris cognoscere.

Quasi corollarium est hoc ex antecedentibus. Nam data rectilinea transformata per hanc 45 in æqualia parallelogrammata, & dimensa iuxta indicata in antecedẽti problem. § 7, dabunt in numeris producta, quæ inter se comparata prodẽt etiam proportionem inter se datorum rectilineorum, & per producta numerorum minora si diuidantur maiora, prodibunt in quotientibus denominatores proportionum. In exemplum, notis numeris partium æqualium in lateribus DB, DE, DC, ex vsu circini proportionum ad propos. 10, & ducto latere DB, finge 10, in latus 4 DE parallelogrammi æqualis ipsi G, habetur productum 40. rursum ducto DB 10 in latus DC 3 parallelogrammi æqualis ipsi A, habetur productum 30. Habet ergo G ad H proportionem 40 ad 30, & diuiso 40 per 30, quotiens $1\frac{1}{3}$ significat proportionem G ad A esse sesquitertiam, idest à G contineri A, & præterea vnam eius tertiam partem. &c.

Hoc probl. aliter soluimus ad propos. 1, 19, 20, 23, 25 lib. 6.

Propos. XLVI. Probl. XIV.

A data recta linea quadratum describere.



ESto data recta AB, à qua quadratum describere oporteat. [a] Ducatur à puncto A rectæ AB ad angulos rectos AC; & fiat [h] ipsi AB æqualis AD; & à D ipsi AB agatur parallela DE: [i] per B verò ipsi AD ducatur parallela BE: est ergo ADEB parallelogrãmum: [b] vnde AB ipsi DE, & AD ipsi BE æqualis erit: [c] sed AB æqualis est ipsi AD; Omnes ergo quatuor BA, AD, DE, BE sunt æquales; est ergo ADEB æquilaterum. dico quod rectangulum. Cum enim recta AD in parallelas AB, DE incidat, [d] erunt anguli BAD, ADE æquales duobus rectis. [e] rectus autem est BAD, ergo & ADE. [f] Parallelogrammorum autem spatiorum anguli, & latera, quæ ex aduerso, æqualia sunt; erit igitur vterque ABE, BED rectus: rectangulum igitur est ADEB. Ostensum autem est & æquilaterum: [g] ergo est quadratum; & à recta AB descriptum. Quod oportebat facere.

a prop. 11. 1.
h prop. 34. 1.
i per struct.
b prop. 34. 1.
c per struct.
d prop. 29. 1.
e per struct.
f prop. 34. 1.
g def. 27.

§. I.

SCHOLION.

Ex Platone geometricè philoſophica ornamenta ad 46, & reliquas vltimas li. 1. Euclidis Propoſitiones.

1 *QVæ quidem tres cum hac 46 poſtremæ huius lib. 1 propoſitiones partim deſcribunt, partim vſurpant quadrata. Huiuſce libri primi Geometra initium auſpicatus eſt ab æquilatero triangulo, finem facit in Quadrato, non ſine Platonico myſterio, quod indicat Proclus:* Videtur autẽ duorum in rectilineis optimorum ortus tradere, Æquilateri nempè Trianguli, & Quadranguli quoniam ſanè ad cõſtitutionem mundanarum figurarum, & præcipue earum quatuor, quarum & ortus eſt, & diſſolutio, hiſce Rectangulis opus eſt. nam Icoſaedrum quidem, & octaedrum, & Pyramis ex æquilateris triangulis conſtant; cubus autem ex quadrangulis. *Omiſit Proclus Dodecaedrum, quia eſt ſub Pentagonis, de quibus Euclides nihil in hoc 1. lib. Ac præterea Proclus Platonem ſequitur, qui in Timæo quintum ſolidum regulare dodecaedrum non applicat, ſed ab eius ſectatoribus applicatur cælo, vt inferius videbis.*

Elementa huius l. 1. incipiunt a perfecto triangulo, & cedunt in perfectũ quadrãgulum. Ab æquilat. tri. ad quadratum.

Myſterium Platonicũ ex prĩcipio, & fine propoſitionum huius lib. 1.

2 *Vt vero hæc magis illuſtrentur ſcire licet figurarum ſolidarum quinque tantum eſſe regulares, nec plures, vt videre licet apud Clauium ad finem l. 13. elem. Eucl Sunt autem Cubus ſub ſex quadratis æqualibus, Tetraedrum ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris, Octaedrum ſub octo triang. æqual. & æquilat. Dodecaedrum ſub duodecim pentagonis æqual. & æquilat. & æquiãgulis, Icoſaedrum ſub viginti Triangulis æqualibus, & æquilateris. Dicũtur autẽ regularia, quia plana ſub quibus, &c. vt præuiſũ eſt, ſunt æqualia, æquilatera, æquiangula. Singulorum conſtructiones vide apud Clauium lib. 13, in ſcholijs poſt propoſ. 13, 14, 15, 16, 17. Platonica hæc corpora appellantur, quia Plato in Tymæo quinq; corpora (potius quatuor apud Platonem, ſed quinq; apud*

Solidæ figuræ regulares tantum quinque.

Cur 5 ea corpora regularia dicantur.

Liber 1 elem. geom. quasi quidam perfectus microcosmus.

Platonicos) physica simplicia cœlum, ignem, aerem, aquam, terram quinque hisce corporibus geometricis assimilat. Vide ad hæc plura apud Platonis interpretes, & Platonicos Philosophos. Nos hìc ea tantùm apponemus, quibus Procli verba illustrentur, & Euclides philosophica eruditione ornetur; ac appareat huius libri primi quasi geometrici mundi perfecta complexio.

Cur attributa pyramis igni, oppresso.

Cur octaedrum aeri.

Cur Aqua Icosaedrū.

Cur terra cubus oppresso.

Calo cur dodecaedrū.

3 *Itaq; Clauius ex Platonicis in c. 1 sphæræ Sacroboschi apertè, & breuiter:* *Plato* Igni propter acumen suæ flammæ attribuit pyramidem, seu tetraedrum; ascendit namque quælibet particula ignis ad modum pyramidis. Aeri vero octaedron. Sicut enim aer proxime ad ignem accedit, sic etiam octaedron maximam similitudinem cum Tetraedro obtinet, cùm constet ex duabus pyramidibus. Aquæ deinde concedit Icosaedron, propter nimiā mobilitatem, ac fluxibilitatem. Cubum autem siue Hexaedron tribuit terræ ob suam immobilitatem, ac stabilitatem; Inter omnia enim corpora regularia cubus motui ineptissimus est. Cęlo deniq; adscribit Dodecaedron. Nam quemadmodum cęlum in toto ambitu 12 æqualia signa complectitur, ita quoque dodecaedron 12 æqualibus superficiebus continetur.

Similitudo li. 1. elem. cum mūdo elemētari.

Omisso Doedecaedro, Proclus elementari mundo comparat hūc 1 lib. geometricum elementarem. Quemadmodum enim elementa Physica à triangularibus figuris ad quadratas, ab igne, &c. ad terram progrediuntur, iuxta iam exposita, sic & Euclides ab Æquilatero per alia triangula, & parallelogrammata resoluta in triāgula progreditur, ac sistit in quadrato.

§. II.

SCHOLION.

Alia ex Platonicis ornamenta, & eruditi Platonici Philosophi hallucinationes geometricæ.

1 *QVoniam primus hic liber præcipuè circa triangula versatur (vt secundus circa quadrilateras figuras, tertius circa*

circa circulares, 4 circa plurilateras regulares intra, & circa circulum. &c. 5, & 6 circa linearum, & figurarum planarum proportiones) adhuc magis est perspiciendum cum Platonicis in Tymæum quemadmodum ex propriâ triangularium figurarũ materiâ liber hic 1 ritè cum vniuerso comparetur, & sit quasi microcosmus Geometricus. Hæc vero ad 1 hunc librum spectantia ornamenta libuit hìc potius, quàm initio libri apponere Procli exemplo, quia hic melius intelligentur à Tyronibus hucusq; prouectis. Quemadmodum enim omnia mixta vniuersum conficientia ex primis quatuor elimentis constant, & in ea resoluuntur; ita vniuersa Geometricæ Philosophiæ machina in solida corpora (præcipuè in quinq; regularia) desinens, constat tamquam è primis elementis, & resoluitur in triangula, quæ rectilinearum figurarum prima, & atoma figura est.

Materia singularum priorũ 6 librorum elementarium.

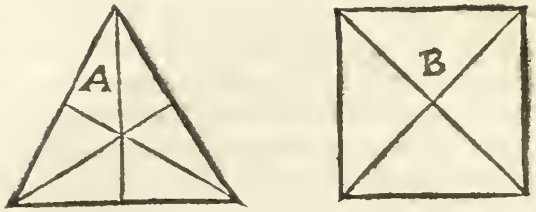
Geometrica philosophia similitudo cum vniuersi machina.

2 *Sed audiamus Marsilium Ficinum capite 40 Compendij in Timæum. cuius tamen hallucinationes geometricas indicabimus. Plato, inquit Ficinus,* resoluit solida in plana, plana verò in triangulos, præcipuè in eos, qui trianguli nominantur. Quorum vnus scalenus sit, idest scalaris, latera omnia inæqualia possidens. Alter Isosceles, idest æquicrurus, duo habens æqualia latera, nam triangulum æquilaterem, in quo neque rectus angulus, neque linea in perpendiculum recta sit, minus componendis planis aptum existimat. *Platoni egregio Geometræ quàm æque impingatur hæc postrema sententia non video. Scitum est enim apud Geometras id, quod nos & in Apiarijs nostris, vbi de Ape Geometrà copiose philosophamur, & in ijs, quæ ad 15 propos. huius libri 1 Eucl. adduximus, triangulum æquilaterum vnam è tribus esse figuris, quæ plana spatia per se inter se composita implent. Quomodo ergo triangulum æquilaterum minus componendis planis aptum existimetur? Pergit Ficinus:* Cõstituit è scalenis pyramidalem, & octaedrã, Icosaendramq; molem, cum pyramis ex triangulis quatuor æquilateribus constituatur, quorum quilibet in sex triangulos scalenos diuiditur, octoadra figura ex octo similibus, quorum quisq; in sex triangulos scalenos similiter distribuitur. Icosaedra figura ex viginti similibus, quorum quilibet similiter in sex scalenos euadit.

Ficini prima hallucinatio geometrica & contraria Platoni.

Inspice (in fac. sequ.) figuram A æquilateri in 6 scalena triangula resoluti, vt antecedentia peruideas.

Isosceles autem triangulus figuræ cubicæ dicitur elementum. Quatuor enim isosceles trianguli concurrentes quadrangulum cõplent. ex huiuscemodi quadrangulis sex cubus efficitur. *Quadran-*



drangulum, ideſt quadratum. Vide figuram B Quadratam, in qua, ex demonſtratis à nobis inter parallela latera ſe mutuo biſecant diametri, & baſes oppoſitæ angulis rectis maiores ſunt lateribus, &c. ergo quatuor ſunt triangula iſoſcelia, &c. Pentagones duodecim ſingulatim in triangulos æquilateres quinq; diuiſos.

Ficini ſecunda hallucinatio geometrica.

3 *Caue hic, Tyro, ab hoc ſcopulo geometrico. Pentagonum enim, ductis lineis ab eius centro ad angulos, reſoluitur in quinq; iſoſcelia, non in æquilatera quinque triangula. Sine linearum, vel figurarũ multiplicatione rem palam, ac facillimè ſic aperio. Finge in eodem circulo inſcripta eſſe pentagonum, & hexagonum. hexagoni latus (videbis in lib. 4.) & æquale eſt ſemidiametro circuli; & ſextam peripheriæ partem ſubtendit; quo fit vt ab hexogoni centro ductæ ad angulos lineæ diſsecent hexogonum in 6 triãgula æquilatera conſtantia è circuli ſemidiametris. At verò Pentagoni latus ſubtendit quintam circuli partem, Ac licet à pentagoni centro rectæ ductæ ad angulos ſint omnes latera æqualia triangulorum, ideſt ſemidiametri eiuſdem circuli, tamen baſes pentagoni ſingulæ ſunt maiores ſingulis reliquis lateribus triangulorum. Patet enim rectam, quæ ſubtendit quintam circuli partem, eſſe maiorem ſemidiametro, ideſt rectà ſubtendente ſextam circuli partem. Hæc facilè tute applica figuris, mi Tyro, ac interim hic ſuppone aliqua è 4 libro, dum hanc hallucinationem Geometricam prodidimus. Itaque Dodecaedri duodecim pentagonica ſuperficies ſingulæ in triangula, non æquilatera, ſed iſoſcelia quinæ diuiduntur.*

Superficies Dodecaedri reſoluuntur in Iſoſcelia, non in æquilatera.

4 *Adde cætera, ex Ficino:* ita vt vnuſquiſq; *(ſcilicet triangulus vt loquitur Ficinus)* ruſum ex triangulis ſex ſcalenis conficiatur, & in omni mole dodecaedra trecenti ſexaginta reperiantur triãguli, quot etiam in zodiaco portiones exiſtunt.

Libri prim. elem. præſtantia, & eius proſ vſus in Geometrica philoſophia.

Vides itaq; mi Lector, quemadmodum primus hic liber triangulis, præſertim ſcalenis, quaſi quibuſdam ſcalis, nos ab imis ad ſu-

prema

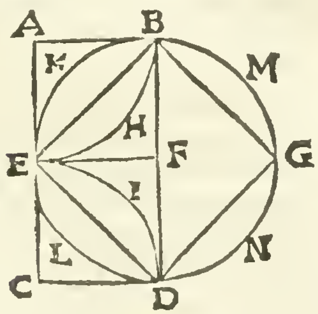
prema mundanæ naturæ attollat, & vniuersæ Geometricæ Philosophiæ, ac solidorum corporum, præsertim regularium, prima elementa constituat.

§.III.

PARADOXVM, & PROBLEMA.

Datum rectilineum rectangulum, cuius alterum latus sit alterius duplum, sine cognitione mediæ proportionalis facillimè quadrare.

Facillimè, inquam, scilicet sine inuestigatione, aut cognitione mediæ proportionalis, & sine cura erigendi perpendicularem ad datam, vt fiat quadratum. Quæ cum extra communem vsum sint, non sine paradoxo sunt. Ad facilitatem autem pro Tyronibus propositionem, & constructionem ita determinemus.



Sit rectangulum ABDC, cuius latus BC sit duplũ alterius AB. Ductis EB, ED, alterutra est perpendicularis ad alterutrã in E. nam in quadratis AF, FC diametri bisecant angulos rectos in æqualia, quo fit vt BED compositus sit è duobus semirectis. Deinde interuallo alterius velut BE, & centris B, & D fiat sectio ad commune punctum in G, iunctisq; BG, DG, factum erit quadratum EBGD, quod dico æquale esse rectangulo AD. Quemadmodum constructio est facillima, & expeditissima, ita & demonstratio. nam, per 34, æqualia sunt EBA, EBF, EDC, DEF, & EDB est dimidium quadrati, ergo & EBA, EDC conficiunt alterũ dimidio BDG, æquale, ac proinde totum quadratum EBGD æquale factum est rectangulo AD.

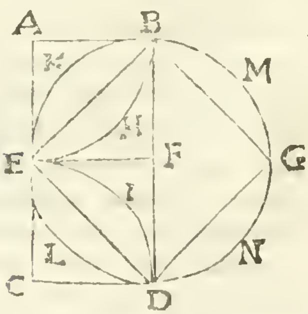
§. IV.

§. IV.

PROBLEMA.

Curuilineum sub tota circuli peripheria semifractà quadrare.

E*Rit hæc propositio responsionis loco quæstiunculæ, quam Proclus in anteced. propos. 45 affirmat ab Antiquis ex occasione harum Euclidis propositionum propositam.* Si parallelogrammum cuiq; rectilineo æquale reperitur, quæstione dignū est num rectilineæ quoq; figuræ possint curuilineis æquales ostendi. *Quadrabimus hic facillimè pro captu Tyronum, si non circulum, saltem sub totà circuli peripherià comprehensum curuilineum longe à regulari figura, & à quadrato remotius, quam sit circulus. Centro F, semidiametro FB describatur circulus EBGD, fiatque rectangulum AD sub diametro, & semidiametro: centris A, C, eiusdem semidiametri FB interuallo describantur duo æquales quadrātes BHE, EID. Dico curuilineo sub dimidia circuli peripheria BMND, & sub alterà dimidia introrsum sub duobus quadrātibus fractà DIEHB æquale esse quadratum EDGB. Quoniam in rectangulo AD æquales sunt quadrantes ABHE, FEKB, CEID, FELD, si communia auferantur EKBH, EIDL, remanebunt æqualia ABKE, BFEH, FEID, CDLE. est autem semicirculus BDLEK pars rectanguli AD; ergo idem rectangulum expletur, & est æquale semicirculo alteri BDNM, & duobus mixtilineis ABKE, ECDL, hoc est duobus BFEH, EFDI, hoc est totum curuilineum EHBMNDI æquale est rectangulo AD. At eidem AD in antecedenti nostra propositione constitutum, ac demonstra-*



ſtratum eſt æquale quadratum EBGD; ergo idem quadratum, & curuilineum EHBMNDI ſunt inter ſe æqualia.

§. V.

SCHOLION.

Ad praxim quadrandi prædicti curuilinei per æqualium partium tranſpoſitionem.

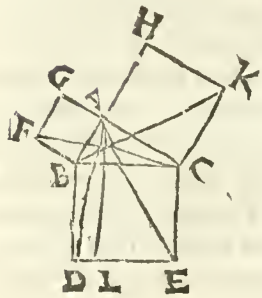
IN *quadratis AF, FC æqualia ſunt triangula rectilinea ABE, EBF, FED, DEC, detractis æqualibus EABK, BFEH, ECDL, EFDI, remanent æqualia EBK, EBH, EDL, EDI, quibus æqualia ſunt ſegmenta eiuſdem circuli ſub æqualibus rectis, & curuis, nempè ipſa BGM, GDN. Quod etiam patère poteſt per intellectualem ſuperpoſitionem, & congruentiam. &c. Igitur ex curuilineo translatis æqualibus BG, M, GDN in æqualia EBH, EDI, transformatum erit curuilineum BMNDIEH in quadratum BGDE facillimè per æqualium partium tranſpoſitionem.*

SCHOLION.

P*Lura circa quadrata habebis apud nos ad ſequentẽ 47 propoſ. Eucl. Ex eà enim exercebimus circa quadrata facillimò modo quæcunq; exercuimus circa rectangula in proximè antecedentibus dum diuiſimus, auximus, imminuimus, tranſmutauimus, dimenſi ſumus eas figuras. &c.*

Propos. LXVII. Theor. LXIII.

In rectangulis triangulis quod à latere rectū angulum subtendente describitur quadratum æquale est illis, quæ à lateribus rectum comprahendentibus describuntur quadratis.



ESto triangulum rectangulum ABC rectum habens BAC. Dico quadratum à latere BC descriptum æquale esse quadratis à lateribus BA, AC descriptis. [a] Describātur à rectis BC, BA, AC quadrata BDEC, GB, HC, & [b] per A vtriq; BD, CE agatur parallela AL. iungāturq; AD, FC. Et quia vterque angulorum BAC, BAG rectus est, suntq; ad punctum A lineæ AB duæ rectæ AC, AG positæ, facientes angulos deinceps duobus rectis æquales, [c] erit AG ipsi AC in directum. Eandem ob causam est AB ipsi AH in directum. Et quia angulus DBC æqualis est angulo FBA, quod vterq; sit rectus, si apponatur communis ABC, [d] erit totus DBA toti FBC æqualis. Cumque duæ DB, BA duabus BC, BF æquales sint, altera alteri, & angulus DBA angulo FBC æqualis, [e] erit & basis AD basi FC equalis, & triangulum ABD triangulo FBC: [f] estq; trianguli ABD parallelogrammum BL duplū; habent enim eandem basim BD, & sunt in ijsdem parallelis BD, AL. [g] Trianguli verò FBC duplum est quadratum GB; habent enim eandem basim FB, & sunt in ijsdem parallelis FB, GC; [h] quæ autem æqualium sunt dupla, æqualia inter

a prop. 46. 1.
b prop. 31. 1.
c prop. 14. 1.
d ax. 2.
e prop. 4. 1.
f prop. 4. 1.
g prop. 41. 1.
h ax. 1.

se

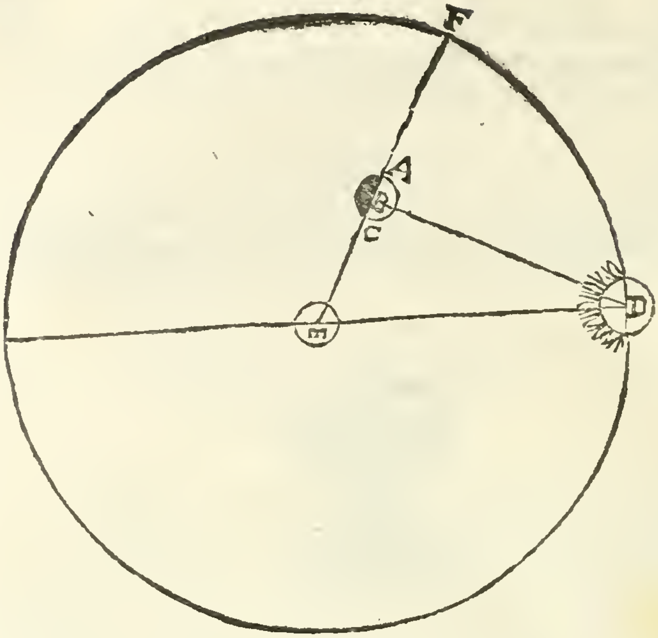
ſe ſunt: parallelogrammum ergo BL æquale eſt GB quadrato. Eodem modo iunctis AE, BK demonſtrabitur CL æquale eſſe quadrato HC. Totum ergo quadratum DBEC æquale eſt duobus GB, HC quadratis: & eſt DBEC à BC, ipſa verò GB, HC à BA, AC deſcripta. Quadratum ergo a BC deſcriptum æquale eſt quadratis à BA, AC deſcriptis. In rectangulis ergo Triangulis, &c. Quod oportuit demõſtrare.

§. I.

VSVS,
& applicatio Aſtronomica propoſ. 47, hoc eſt —

— Solis à terrà diſtantiam inueſtigare.

Veſtigia ſecuti Ariſtarchi in libello de magnitudinibus, & diſtantijs Solis, & Lunæ, demonſtrationem tamen aliter, quã ille, & ab illo alij, conſtituemus, & neglectis quantitatibus angulorum, circa ſola latera verſabimur trianguli orthogonij, ac Pythagorici, quod nos in figurâ agnoſcemus in modum ſequentem.



Sit Luna dimidiata ABC, dimidia pars illuminata ad partes versus solem D, oculus in terræ superficie E. Suppono ex, & cum Aristarcho aliqua.

Cum luna dimidiata apparet distat a Sole minus quadrante, &c.

1 *Quod suppono est quarta ex eius Positionibus in initio libelli, scilicet* cum Luna dimidiata nobis apparet, tunc eam à Sole distare minus quadrante quadrantis parte trigesimà. *In comment. ad eas positiones ex Pappi lib. 6. collect. Math. affirmatur ea positio cum Hipparchi, & Ptolemæi positionibus. Eam vero distantiam Lunæ dimidiatæ à Sole notarunt Antiqui Astronomi fortasse ope radij Astronomici, vel cuiuspiam alterius instrumenti ad id apti. Igitur distantia Lunæ dimidiatæ à Sole sit grad. 87, iuxta prædicta, notata FD. At nos accipimus in triangulo BED pro distantià latus BD.*

Luna dimidiata, circulus maximus discrimi-nans opacu a lucido nobis apparet

Eandem distantiam Aristarchus in prop. 6 indeterminatè appellat minus quadrante. Huic supposito notæ distantiæ Lunæ dimidiatæ à Sole addo suppositam etiam notam distantiam BE Lunæ à terrà per modos vulgatissimos Astronomorum. Quæ est in mediocri penè 57 semidiametrorum terræ, iuxta Tychonicas observationes.

2 *Suppositum ex Aristarcho est tertia item eius Positio con-*

sen-

sentiens cum Hipparcho, & Ptolemæo ex Pappo, scilicet: Cum Luna dimidiata nobis apparet, vergere in nostrum visum circulum maximum, qui Lunæ opacum, & splendidum determinat. *& Propositione septima.* Maximus circulus, qui est iuxta determinantem, &c. & noster visus in vno sunt plano. *nempè ABCE in eodem plano accipiuntur.*

3 Suppositum possem intra demostrationem includere, sed claritatis gratià, & vt Demonstratio expeditior euadat, extra ponamus, ac supponamus angulum EBD esse rectum. Aristarchus in propofit. 7, rationem affert, quia, inquit, punctum B est Lunæ dimidiatæ centrum. Nos expressius confirmamus sic. Quasi dicat Finge terminum illuminationis AC (qui per 2 suppos. antecedens est circulus maximus habens commune centrum cum Lunæ cētro) esse quasi rectam lineā oculis apparentem directè, ex opticis. est cadē AC diameter dimidiata in B. Finge triāg. isosceles, cuius vertex sit in centro Lunæ, & basis bifariata AC, tunc ex 11 propos. lib. 1. Eucl. patebit, si recta à centro Lunæ ducatur ad punctum bifariationis B fieri ad rectam AC in B vtrinque æquales, hoc est rectos angulos. Idem probabitur, & eueniet si fingas ducta duo latera AD, CD isoscelis habentis verticem in centro solis D.

Trianguli Pythagoricum ad Solem, Lunā, terra &c.

4 His positis, Aristarchus, & alij post eum aliter. At tu, mi Tyro, mecum sic. Agnosce in triangulo BED Pythagoricum rectangulum triangulum, iuxta hanc 47 propos. Eucl.

Quoniam igitur, per primum Suppositum, nota sunt latera BD, BE, erunt & nota ipsorum quadrata. & quoniam latus ED opponitur angulo recto ad B, iuxta 2, & 3 supposita, erit quadratum ipsius BD æquale quadratis ex EB, BD, per hanc 47. Quare compositis in vnum quadratis ex EB, BD, summæ radix quadrata dabit quantitatem lateris ED, idest quæsitam distantiam Solis à terra.

Praxim exerce per mensuras applicatas in figurà geometrica, vt numerum distantiæ solaris à Terrà elicias. Quam etiā expressam vide apud nos in Apiar. 8, vbi venamur distantiam Solis à terra ope radij traiecti per fenestræ foramen exiguum. &c.

§. II.

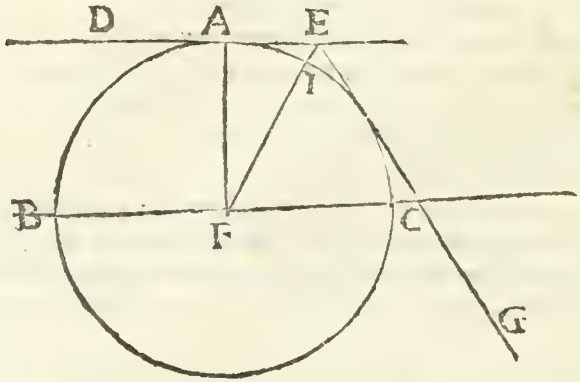
§. II.

VSVS Metheorologicus.

Aeris athmoſphærici, ſiue Auroræ altitudinem facillimè metirier ex 47. &c.

A'bazeni Arabis modus cognoſcendi altitudine vaporii apud alios &c.

1 M*Odus Albazeni Arabis, quem alij Aſtronomi ſecuti ſunt, vt eſt ingenioſiſſimus, ita in demonſtratione paullo eſt operoſior, & minus accõmodatus tyronicæ inſtitutioni. Nos facillimam, & expeditiſſimam demonſtrationem apponemus ex hac 47 prop. Eucl. Tantum in conſtructionis vnicà particulà ſequimur Albazenum, nempè in aſſumptione vaporum horizontalium, qui afflantur ſolis radio vel primo matutino, vel extremo veſpertino. Cætera de noſtro ſunt.*



Sit globus terræ ABC: ſit horizontis apparentis, ſiue ſenſibilis, ac phyſici, vt appellant, (quem radius viſualis in orbem liberè vndiq; protractus efficit) linea DE. Aſtronomicus, ac verus horizon per centrum mundi F ſit diameter BC; Solis infra vtrumq; horizontem radius terram contingens, & productus ad ſupremos vapores, eoſq; illuminans in E, ſit GE. Iungatur per imaginationem ipſa FE. Quoniam vapores quantum poſſunt maxime ſe ſe per aerem attollunt, ibi erit terminus, atq; altitudo ſuprema aeris vaporoſi, ſiuè athmoſphærici, vbi altiſſimi viſentur ſolis luminè afflati

ti

ti vapores. Quærimus ergo altitudinem vltra terræ semidiametrum ad supremos vapores, nempe quanta sit ipsa IE, atq; Auroræ altitudinem, ac staturam metimur.

2 En tibi triangulum rectangulum AFE, cuius angulus FAE rectus est ad horizontem DE tangentem in A, per indicata in Scholio prop. 18 ad 32. Et duo latera FA, AE nota sunt. nam FA est terræ semidiameter nota, & vulgata nō solum apud omnes Astronomos, sed etiam apud nos in Apiar. 2. Progym. 3. propos. 7. Item AE semidiameter horizontis apparentis, cuius quantitas passim habetur apud omnes, qui sphæræ armillaris circulos explicant, vbi de circulo horizontali. Ac etiam apud nos moderati horizontis quantitas ponitur ex homine circumspiciente in plano vndique libero, ac visui expanso, in citatis Apiar. Progym. & propos. Igitur quadrata ex FA, AE inter se addita conficiunt tertium compositum quadratum, cuius radix erit latus FE oppositū recto angulo A. Detracta ergo nota terræ semidiametro FI, reliqua fit IE quæsita vaporum, Auroræ, àëris Athmosphærici altitudo.

3 Ad indiuiduas mensuras & hìc, & in alterà demonstratione de Solis à terris distantià manuducti Tyrones & ipsi aliquid operentur. Habent apud vulgatos de sphæra armellari, & de Astronomicis scriptores, & apud nos in Ap. 2, & 8, quas hìc non ponimus indiuiduales mensuras. Ponimus hìc tantum modos geometricos inuestigandi ex hac 47 Eucl. Exerceāt ergo se Tyrones iuxta traditas à nobis regulas in Apiar. 11. de extractionibus radicis quadratæ, vel accipiant ex vulgatis tabulis, &c. atq; experiantur, & ad vltimam executionem traducāt vsus hos geminos astronomicos 47 propos. Eucl.

4 Notandum est circa quantitatem horizontis physici varietatem aliquam esse inter aliquos Auctores, quemadmodum & circa aliquas alias astronomicas mensurationes. Ratio est varietatis non à demonstrationum modis, qui certi sunt, sed à varietate suppositionum. Alij enim horizontes accipiunt ab altitudinibus maioribus, quam sit statura spectatoris, verbi gratia à prospectu ex montibus, turribus, malo nautico, &c. Nos censemus sumendum horizentalem prospectum à certiori mensura, quæ est statura, & altitudo mediocris humani corporis. &c. Hæc, vt Tyrones habeant faciliorem viam ad demonstrationis applicationem. &c.

Ratio varietatis apud aliquos Authores circa quantitatem horizontalis.

§.III.

§. III.

SCHOLION.

Dimensio Lunarium montium è 47.

Qvi fingunt in Luna montes, ij ausu ingenioso eorum altitudines è terra metiri docuerunt modo persimili antecedentis de dimēsione athmosphæræ. Vide nos in Apiarijs to. 2. Ap. 8, prog. 6. propos. 4.

§. IV.

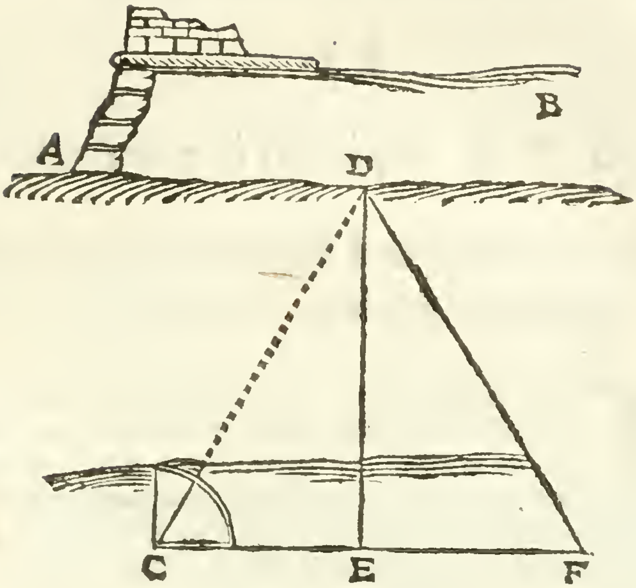
VSVS Geometrici, & bellici.

Pro inaccessis distantijs breuissimis è 47 inueniendis, ac dimetiendis.

1 *Qvemadmodum in antecedentibus vsibus astronomicis ostendimus modos cognoscendi hypothenusam è cognitis duobus lateribus angulum rectum constituentibus, ita hìc contrariâ vice in aliquibus problematibus pro vsu Geometriæ practicæ, ac rei bellicæ ostendemus modum cognoscendi alterutrum laterum circa angulum rectum, cognito latere sub angulo recto.*

Igitur sint mœnia hostilia AB, ad quæ non pateat aditus vel propter fossarum, alteriusve concauitatis interpositionem, vel propter hostilium tormentorum ictus, &c. Optet oppugnator inuenire quantitatem distantiæ perpendicularis, ac breuissimæ, vt sciat vnde in destinatum mœniorum locum D possit explodere sua bellica tormenta ictu pleniore, & grauiore, quam è situ obliquo.

Sub angulo duarum tertiarum vnius recti ex C spectet obliquè in destinatum D, deinde progrediatur versus alterum situm minus



nus obliquum donec sub angulo recto normæ in E videat simul & C, & destinatum D. Quoniam distantia DE sub linea normali, hoc est faciente cum ipsa CE rectum in E, spectatur, erit, vt pote perpendicularis, breuissima respectu obliquæ à D, iuxta demonstrata in § 3 ad 19 prop. Eucl.

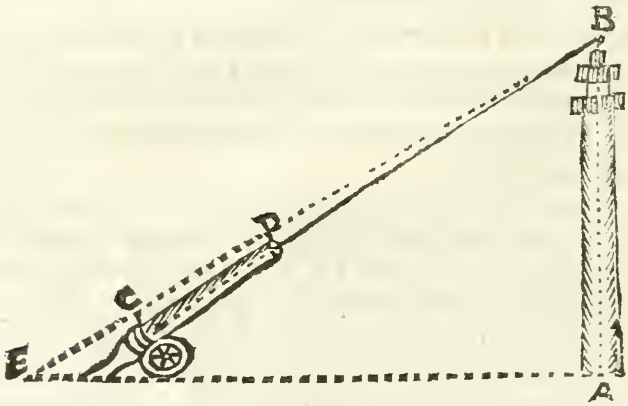
2 *At cuius est quantitatis recta breuissima ED? Ad quantitatē interualli CE progredere rectà in F. Quoniā duorum triangulorum DEC, DEF æqualia sunt latera CE, EF, & ED commune, & anguli vtrinq; ad E recti, hoc est æquales, ergo, per 4, erunt & bases CD, DF, & anguli CDE, EDF æquales. Et quoniam angulus C est duarum tertiarum vnius recti, & CED est rectus, ergo reliquus EDC est vnius tertiæ anguli recti, ergo totus CDF erit duarum tertiarum vnius recti; reliquus ergo F erit & ipse duarum tertiarum vnius recti, ergo triangulum CDF est æquilaterum, ergo dimensa & nota distantia CF dat quantitatem distantiæ obliquæ CD, cuius quadratum quoniam, per 47. est æquale quadratis duorum laterum CE, ED, si ex quadrato ipsius CD subducatur quadratum ipsius CE, reliquum fit quadratum ipsius ED. Radix ergo eius quadrati dabit notam in numeris quantitatem rectæ, siue perpendicularis distantiæ ED, quæ quærebatur.*

§. V.

VSVS alij bellici è 47 indicati.

Pro ejaculationibus è bombardis, pro ſcalis ad mænia hoſtilia inſcendenda. &c.

1 T*Antum indico, non expono, quia ſupponunt aliqua è li. 6 de triãgulis æquiangulis, de Altimetrià, &c. Sat hìc eſt vt videas in exemplis, etiam extra Aſtronomica (vt in antecedentibus) quemadmodum cognitis duobus lateribus in triangulo rectum angulum cõſtituentibus, eliciatur quantitas tertij lateris angulo recto ſuppoſiti.*



Scire diſtãtiã eiaculationis à tormento bellico ad ſcopum elatum.

2 *Si enim ſit altitudo ſcopi in B elati perpendiculariter ex horizontis puncto A; atq; in B feriat pila ferrea emiſſa è tormento iuxta directionem dioptrarum C, D; & per modos vel vſitatos, vel per eos, qui à nobis in noſtra Geometria practicà traditi ſunt, ſi ſupponantur notæ diſtantia EA, & altitudo AB, ſcire licet quãta ſit diſtantia obliqua EB. Eſt enim EB latus oppoſitum recto angulo ad A, & ex quadratis laterum EA, AB, hoc eſt ex quadrato illis æquali radix dabit latus cognitum EB.*

3 *Sca-*

3 *Scalarum etiam quantitatem debitam vt habeas, quibus hostilia mœnia possis occupare, vide ex hac 47 apud nos luculentum exemplum in expreßà figurà vna cum demonstratione hinc petità, in Apiar. 1 sub finem prælibamenti tertij de Vmbris. Ab historiolà ibi narratà patet quanti sit detrimenti ignoratio huius Pythagoricæ 47 propos.*

Scire quantitatem scalarũ ex vmbra, & altitudine mœniorum.

§. VI.

PROBLEMATA multiplicia è propos. 47.

In Geodesià, & Geometrià practicà pro diuisionibus, augmentationibus, diminutionibus, transformationibus dimensionibus superficierum quadratarum, ita vt & partes, & tota, & additamenta, & residua, & producta sint quadrata.

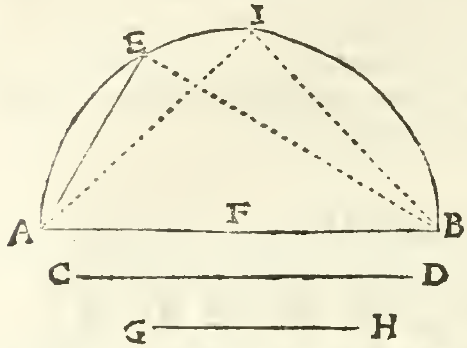
LVbet pauculis aliquot exemplis quasi ludere quadratis, addere ea inter se, & ex additis quadratum conficere, partiri quadratum in partes quadratas, subtrahere quadratum è quadrato, residuo quadrato. &c.

PROBLEMA I.

Quadratũ minus ex maiore geometricè detrahere ita, vt & residuum sit quadratum. &c.

1 *FAcillima, & expeditissima ratio est in hac 47 soluẽdi propositum problema vel organicè ope normæ, vel geometricè*

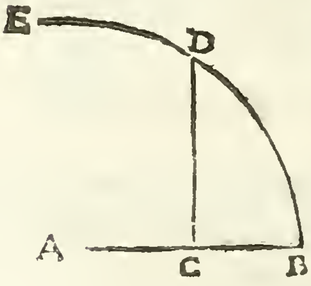
et sine norma per angulum rectum factum in semicirculo.



Sit ergo quadrati maioris latus AB, minoris CD, quod ex maiore opportet subducere, ac præbere residuū quadratum. Ad longitudinem CD applica normæ alterum latus in B ita, vt angulus rectus in E obtineat eum situm, à quo alterum eiusdem normæ latus pertingat ad A. Siue, bifariatà AB in F, describe semicirculum AEB, & interuallo ipsius CD ab alterutro termino B fiat in semicirculo sectio ad E, vbi angulus est rectus ex demonstratis ad 3 2. Normalis lateris pars EA, siue iuncta in semicirculo EA erit latus quadrati residui post subtractionem quadrati CD ex quadrato AB.

2 Sunt enim AE, EB æqualia quadrato ex AB; ergo subducto quadratu ipsius EB, remanet quadratum, cuius latus est quantitas ipsius AE.

Aliter.



IN latere AB maioris quadrati secetur AC æqualis lateri minoris quadrati. Semidiametro AB ducatur circuli arcus BDE, tum ex C excitetur perpendicularis pertingens ad arcum in D, eritq; CD latus quadrati reliqui è subductione minoris AC ab AB. Est enim AB æqualis rectæ, quæ ad puncta A, D subtensa esset angulo recto ACD, &c.

SCHO-

SCHOLION, & Corollarium.

H*Vc facit, & hinc soluitur Theonis Theorema ad 13 propos. lib.* 10. Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire quo maius potest maior minore. *Maior enim AB potest quadrato CD vltra potentiam, siue quadratum minoris AC. Vide & seq. perisma.*

§. VII.

PORISMA, & Corollarium.

Datis duobus inæqualibus quadratis inuestigare differentiam quadratam inter ea.

P*Atet ex antecedentibus. Nam si duo inæqualia sint quadrata ex AB, CD, ac scire velis quanto quadrato sit vel AB quadratũ maius quadrato CD, vel CD minus ipso AB, fiet exploratio vt supra, in 1 fig. iunctis CD, AE in angulum E, &c. Erit enim quadratum ex AE differentia, & quantitas, &c.*

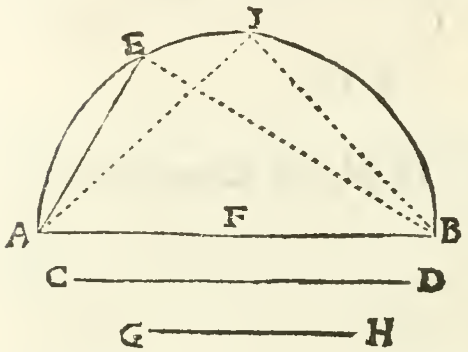
Aliter.

P*Ariter in 2 fig. sub arcu BDE, recta CD est differentia quadrata inæqualium quadratorum AC, AB.*

PRO-

PROBLEMA 2, & Corollarium.

Datum quadratum augere data quantitate quadratà ita, vt auctum sit quadratum.



DAtũ Quadratum ex CD sit augẽdum dato quadrato ex GH. Iungantur in angulum rectum CD, GH, velut in E. Recta enim angulo recto subtensa, iungẽs extrema, velut AB dat latus quadrati aucti, &c. Quemadmodum in problèmate antecedenti facta est imminutio quadrati ex AB per subtractionem dati quadrati ex EB, & reliquum imminutũ est quadratum ex AE.

PROBLEMA III.

Datum quadratum in duo æqualia quadrata bifariare.

Hallucinatio Geometrica in diuisione quadrati ĩ duo æqual. quad.

IVxta fallaciam, quam detegemus in seq. probl. 4, vbi proprius locus est, quemadmodum quadratum duplicatæ lineæ quadruplum est dimidiæ, sic vnius lineæ duarum dimidiarum partiũ quadrata dificiunt à quadrato totius lineæ dimidio eiusdem lineæ quadrato. Caueat igitur Geometricus Tyro nè putet, latere quadrati, verbi gratia ex AB, diuiso bifariam in F, etiam quadratum in duo æqualia quadrata diuisum; hoc est quadratum ex AF, & quadratum ex FB esse æqualia quadrato ex tota AB. Ac proinde,

de, vt sine fallacia, & statim expediatur problema, si velit organicè, aptetur norma ad extrema A, B datæ AB ita, vt rectus angulus normæ paribus laterum interuallis distet ab vtroq; extremo. siue geometricè semicirculus super AB bifarietur in I. Iunctæ enim æquales AI, BI sunt latera quadratorum inter se æqualium, in quæ bipartitum est totum ex AB, quod vtriq; ex AI, & ex IB æquale est, per hanc 47 propos. Eucl. Etiam sine semicirculo, factis semirectis duobus ad A, & B, erit angulus verticalis I rectus, ex corollarijs prop. 32, & isosceles AIB, &c.

SCHOLION, & Corollaria.

1 *Eàdem operà in anteced. probl. didicisti duo inæqualia quadrata ad æqualia redigere; nempe ipsarum AE, EB quadrata inæqualia in quadrata æqualia æqualium AI, IB, quæ semirectis angulis IAB, IBA opponuntur.*

2 *Habes & quadratum diametri duplum esse quadrati, cuius est diameter. Nam ex AB quadratum est æquale duobus quadratis ex AI, IB, quæ sunt latera quadrati, cuius diameter est AB. &c.*

§. VIII.

PROBLEMA IV.

Datum quadratũ illicò duplare, ac sine geometricà vulgi fallacia. Damna publica ex ignorantia geometricæ Philosophiæ.

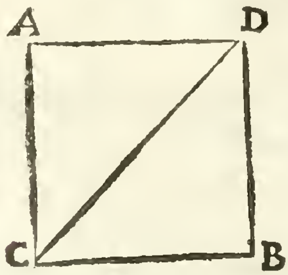
IN epistola Erathostenis ad Ptolemæum regem hæc inter cætera: Qui vnum quodq; cubi latus duplicare voluerit, non erit erroris expers. nam lateribus duplicatis planum quodlibet *(scilicet quadratum)* quadruplum efficietur, ipsum verò solidum octuplum. *Ex duplicato latere quadratum fieri quadruplum, &c. videbis, mi Tyro, in 2 tom. hu. Ærarij, ac demonstrationes in Schol. ad propos. 4. lib. 2, & ad propos. 20, lib. 6. Philoponus*

Hallucinatio in duplicatione quadrati.

nus antiquus, & doctus Philosophus in comment. 36 ad lib. 1. poster. analyt. Arist. in ea Philosophi verba: Neque duo cubi vnus sunt cubus *Enarrat :* Delijs peste laborantibus, respondit Apollo fore vt liberarentur à peste, si aram duplicarent cubicã habentem formam, hi autem ædificarunt addentes priori aræ alterum cubum æqualem. At duorum cuborum compositio cubi formam permutauit, fuit enim pro cubo trabs. Peste autem non cessante, Respondit dominus, non fecisse eos quod præceptum fuerat. Hic enim imperauerat duplicare cubum, idest aram constituere cubã duplam ad priorem, hi autem cubum cubo imposuerunt. Venerunt autem ad Platonem quęrentes viam, quomodo cubum duplicarent, hic autem ad ipsos ait. videtur vobis improperare dominus veluti negligentibus Geometriæ. *Vides è sententià Platonis publicà olim peste mulctatam Geometricæ Philosophiæ negligentiam, & ignorantiam.*

Publica peste mulctata Geometrica scientia ignorãtia.

2 Sed de fallacia circa cubi duplationem, & plura alia pertinẽtia ad id celeberrimum problema habebis apud nos ad li. 6. Eucl. vbi nouos modos tradidimus, & alia non vulgata de inuentione duarũ mediarum proportionalium. Hìc interim, quoniam fundamentum fallaciæ, atque ignorantiæ duplandi cubi pendet à fallacià in duplatione quadrati, satis erit hoc à nobis proposito facillimo problemate tollere simul & fallaciã dicto citius, & obuiam ire ignorantiæ geometricæ, olim ex antiquorum oraculo, publicis calamitatibus damnatæ.



Esto quadratũ AB duplandum, ductà diametro CD, erit quadratum ex eà duplum ipsius AB. nã, per cor. 2 post prob. 3 antec. & per hãc 47, quadratum ex CD æquale est duobus ex CB, BD, inter se se æqualibus (æqualium enim linearum quadrata sunt æqualia, quod & demonstrat Proclus ad 46 antec. propos. Eucl.) hoc est ipsi AB duplato &c.

§. IX.

§. IX.

SCHOLION.

Duo præcedentia geometrica problemata de duplatione, vel bipartitione quadrati deficiunt in Arithmeticis. Demonstrationes, eruditiones, Authorum loca indicata, & illustrata.

1 IN Geometriâ quidem quadratum dati quadrati duplum efficitur, vt vidisti, mi Tyro, in antecedenti Problemate; at vero in Arithmeticis quadratorum numerorum nullus est præcisè duplus alterius, sed vel deficiens, vel excedens. Expone numeros in dupla proportione 2, 4, 8, 16, 32, 64. &c. vides quadratos esse, vno interposito, 4, 16, 64, qui quadruplam habent, non duplam proportionem inter se. In numeris verò, qui duplam habent proportionem, eorum alter non est quadratus, vt 2, & 4; 4, & 8; 8, & 16; nam & 2, & 8 non sunt quadrati &c.

Nullus quadratus numerus duplus quadrati numeri.

Patet etiam non dari numerum quadratum duplum numeri alterius quadrati, comparatis inter se quadratis variarum progressionum, exempli gratiâ in duplâ, & tripla. Nam radicis 2 quadratũ est 4: alter quadratus numerus radicis 3, qui est 9, superat vnitate ipsum 8, quod est duplum ipsius 4. Quadratus numerus 16 deficit binario à duplo quadrati antecedentis 9, id est à 18 Et comparando etiam inter se numeros quadratos, interrupta quadratorum serie, verbi gratia quadratum 25 radicis 5 cum quadrato 49 radicis 7, deficit vnitate quadratus numerus 49 à duplo quadrati 25, hoc est à 50, qui non est numerus quadratus. &c.

2 Ex prædictis intelligas licet eruditam, ac doctam Procli animaduersionem in commentar. ad hanc 47 prop. Eucl. Cum autem rectangula triangula duplicia sint, alia quidem æquicrura, alia vero scalena, in æquicruribus quidem nunquam inueniemus numeros, qui lateribus congruant. non est enim quadrangulus numerus

Pythagorica propositio non valet in numeris applicatis triangulo isosceli.

 merus

Valet in applicatis triangulo scaleno.

Triangulũ Platonis in lib. de Rep.

merus quadranguli numeri duplus. nisi quis proximiorem dicat. qui enim à septenario fit eius, qui fit à quinario duplus est, vnitate deficiente. In scalenis verò fieri potest vt numeri suscipiantur, & euidenter nobis ostenditur quod a subtendente rectum angulum fit, æquale ijs, quæ à lateribus circa rectum angulum existentibus fiunt. huiusmodi enim est quod in libro de Republica est triangulum, cuius rectum angulum ternarius, & quaternarius cõtinent, quinarius autem eum subtendit. Quod igitur à quinario fit quadrangulum, æquale est ijs, quæ ab illis fiunt. hoc enim est vigintiquinque, quæ autem ab illis fiunt quod quidem à ternario nouem, quod verò a quaternario sexdecim. Perspicuum ergo est in numeris quod dicitur. *Vide ad hæc inferius § 15, & 16. Vbi disces quid sit quod Proclus affirmat de scalenis inueniri in numeris quadratum à subtendente rectum angulum æquale quadratis reliquorum duorum laterum, in isoscelibus vero non reperiri. &c.*

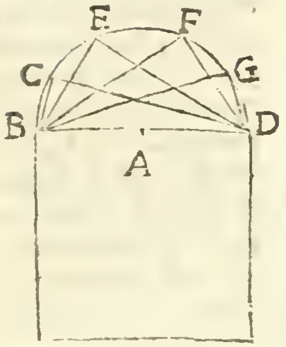
SCHOLION.

Qvadrangulum apud Procli interpretem intellige, quod alias monuimus, quadratum. Ad § 9, & Scholium antecedens plura spectantia videant Tyrones in Schol. Clauij ad proposit. 5. lib. 8 Eucl. & in Schol. ad 19 propos. li. 10.

PROBLEMA 5, & Corollarium.

Infinita numero quadrata statim exhibere, quorum singula inter se sint inæqualia, bina verò sint vni, atq; eidem dato æqualia.

AB extremis enim lateris BD dati quadrati A licet deducere lineas in angulũ ad infinita puncta in semicirculo BED, ad C, E, F, G, &c. hinc inde extra punctum medium arcus semicircularis

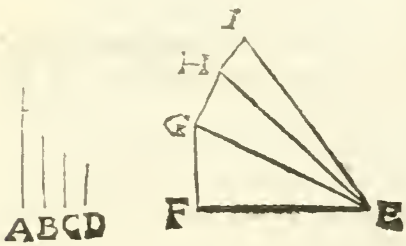


laris (ad quod vnum punctum eductas facilè patet esse æquales) & constituentur infinita triangula rectangula super eàdem basi BD; eruntque ex inæqualibus lateribus angulos rectos constituentibus quadrata omnia inter se inæqualia; bina tamen latera inæqualia angulum rectum constituentia, ceu BC, CD; BE, ED; BF, FD; BG, GD; erunt æqualia quadrata vni, eidemque dato A ex BD.

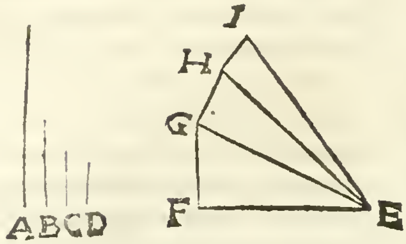
PROBLEMA VI.

Datis infinitis quadratis simul sumptis æquale vnicum quadratum exhibere.

IN corollario antecedenti binis tantum infinitorum quadratorum æquale quadratum exhibuimus; hìc infinitis non binis sed simul sumptis, &c. Est hæc quasi quædam arithmetica quadratorum velut numerorum in vnam summam Additio. Clauium, & alios hìc sequimur.



Sint quadrata ex A, B, C, D simul addenda, & inueniendum latus quadrati æqualis datis simul quatuor quadratis. Circa centrum E quasi in modum spiralis conformabimus figuram sic. Sumantur primis duabus A, B æquales, & iungantur in angulum rectum rectæ EF, FG, & iunctà GE, erigatur ad G perpendicularis GH æqualis tertiæ C, rursusq; ad extremum H iunctæ HE erigatur perpendiculariter HI æqualis quartæ D; fiatq; pari modo progressio si plures adhuc sint vltra D; dico iunctæ IE quadratum esse



summam æqualē quatuor quadratis rectarū A, B, C, D. Nam ex hac 47 Eucl. quadratum ex GE est æquale quadratis ex EF, FG, hoc est ex A, B. Rursus quadratum ex HE æquale est quadratis ex EG, GH, hoc est ex A, B, C. Deniq; quadratum ex IE est æquale quadratis ex EHI, hoc est ex A, B, C, D. Quod erat ostendendum, & faciendum.

§. X.

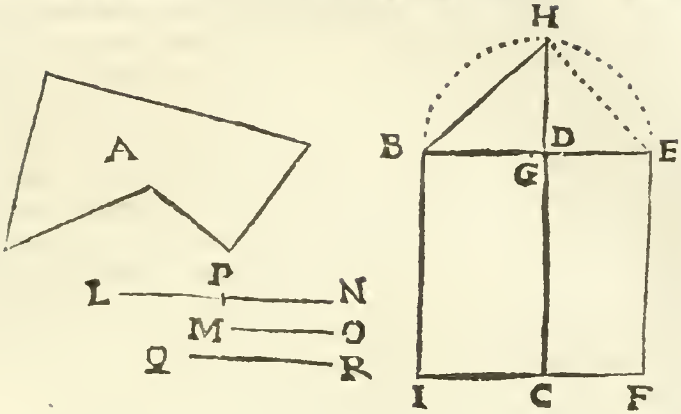
LEMMA.

In triangulo rectangulo perpendicularis ex angulo recto ita diuidit basim, vt rectangulum sub tota basi, & sub segmento sit æquale quadrato lateris adiacentis segmento, &c.

Lemmatis nomine hoc theorema inscripsimus, quia assumptum erit necessarium quadraturę dati rectilinei, quę post hoc sequetur.

Si rectè inspexisti figuram, & ponderasti demonstrationem Eucl dis, latet in ijs egregia hæc proprietas, quam indicamus in verbis huius nostræ propositionis, ex qua proprietate alia etiam egregia corollaria manant, vt videbis.

Igitur in triangulo rectangulo BHE perpendicularis HD continuata vsq; in C latus quadrati BF, ita id diuidit, vt rectangulum BC sub tota basi BE, siue illi æquali BI, & sub segmento BD sit æquale quadrato lateris BH adiacentis segmento BD; rectangulū vero CE sub tota BE, siue illi æquali EF, & sub segmento DE sit æquale



æquale quadrato lateris EH adiacentis segmento DE. Sunt verò DI, DF rectangula, quia commune latus DC, quod fit a perpendiculari HD productà per D rectos angulos quatuor efficit ad verticem D, vt facile patet per 15 primi. Ac latera reliqua BI, EF sunt quadrati BF, quod, per defin. 27, est rectangulum. &c.

Æqualia autem eße ea rectãgula dictis quadratis patet ex demonstrat. Euclidis; sunt enim rectangula, & quadrata dupla æqualium triangulorum, &c. reuise demonstrationem Euclidis.

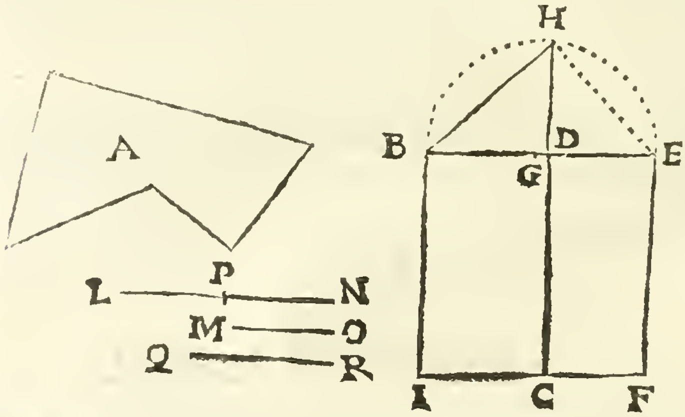
§. XI.

PARADOXVM, & Probl.

Datum rectilineum, atq; etiam circulum quadrare ex hac 47, & è solo libro 1 Euclidis.

1 *VT videant Tyrones nos omni studio conari geometricam Philosophiam ad summam redigere facilitatẽ cum vtilitate, & iucundà aliqua nouitate coniunctam, en hoc problema vniuersalissimum exercemus circa datum absolutè rectilineum quodcũq; illud sit. Quæ res ha-*

hactenus in Geometricà Philosophiâ semper eguit libris vel secũdo, vel sexto Euclidis, in quibus per propositiones plures eorum librorum, & per inquisitionem mediæ proportionalis dato rectilineo æquale quadratum constituitur. At nos hìc id præstabimus ope solius huius libri primi Euclidis, ac præsertim ex hac 47 mirificâ Pythagoricâ propositione. Est vero id problema vtilissimum cùm ad alia quamplurima in Geometricis, tum in primis ad transformationem quarumlibet rectilinearum figurarum in perfectissimam, hoc est in quadratum, sed in primis ad famosissimam circuli quadraturam, cui hoc hìc compendium attulimus, vt etiam Tyrones ex hoc solo libro possint id problema soluere, quadrato scilicet eo triangulo, & quadrangulo rectangulis, &c. de quibus dictũ est à nobis in antecedentibus propositionibus ex occasione Procli, ad prop. 45, & in descriptione, atq; vsu lineæ spiralis ad definitionem Euclidis de lineà.



2 *Posito igitur proximè antecedenti nostro theoremate, ac lemmate, illicò paradoxum, & problema sic absoluimus. Sit rectilineum A quadrandum. Cõstituatur in angulo recto parallelogrammum BC æquale dato rectilineo A, ex propos. 45 huius. Quod quidem si habuerit latera omnia inter se æqualia, erit iam factũ quod quæritur. Sin autem erit altera parte longius, iuxta defin. 28, producatur alterum laterum minorum BD ad longitudinem maioris in E, ac fiat quadratum BF. mox diuisâ BE bifariam in G, interuallo dimidiæ, ac centro G describatur semicirculus BHE, & producatur CD ad circumferentiam in H, & iungatur BH; quam di-*

co

eo esse latus quadrati æqualis rectangulo BC. Iuncta enim HE, triangulum BHE in semicirculo est rectangulum ex demonstratis ad propos. 32, & HD est perpendicularis in D. nam quadratum EF est diuisum in duo parallelogrammata rectangula BC, CE, ergo ad verticem in D quatuor anguli recti sunt, ergo, per præcedens nostrum lemma, & theorema, perpendicularis HD ex angulo recto H ita diuidit basim BE, vt rectangulum sub totà basi BE, idest sub illi æquali BI, & sub segmento BD sit æquale quadrato ex HB lateris adiacentis eidem segmento BD. Quadratum est ergo rectangulum BC, & illi æquale datũ rectilineũ A. Quod erat faciendum.

Quod si rectilineum fuerit rectangulum æquale circulo, iuxta § 5 ad 45 propos. rectangulo per hìc posita conuerso in quadratũ, erit & circulus rectangulo æqualis etiam ipse quadratus. Sed firmius constabit Tyroni apud nos famosissima quadratio circuli ad 17 propos. lib. 6. elem. Illuc prouoco.

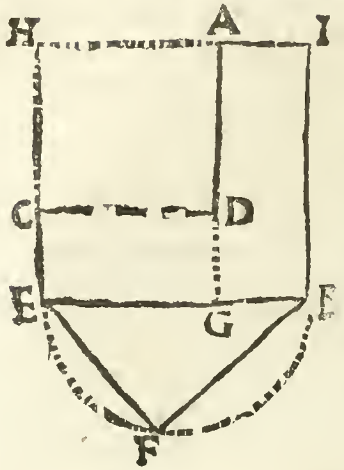
§. XII.

PARADOXVM, & Problema.

Datum Gnomonem laterum æqualium circa rectos angulos, sine vsu, & cognitione mediæ proportionalis, quadrare.

1 S*Vppono hìc definitionem 2 lib. 2. quæ est Gnomonis geometrici; quæq; (iuxta ea, quæ habes in definitionibus apud nos ante hunc 1 lib. Eucl. defin. 34, &c.) inuoluit latera gnomonis parallela. est enim gnomon constãs è duobus parallelogrammatibus. Determinauimus vero nostram hanc propositionem ad gnomonem rectangulũ, propter latera duo, quorum vsus erit in demonstratione, quę necesse est sint quadratorum, &c. vt videbis. Paradoxum verò est in hac propositione quòd, præter vsum omnem in Geometricà Philosophia, quadramus rectilineum sine necessitate inueniendæ, seu cognoscendæ mediæ proportionalis, sine quà nullę fieri solent in Geometrià rectilineorum quadrationes.*

2 Sit



2 Sit Gnomon IDE habens circa angulos rectos D, & B latera æqualia AD, DC, & IB, BE. Producantur IA, EC ad partes A, C donec coeant in H. Quoniam parallela (ex citatâ definit. gnomonis) sunt latera, erunt duo parallelogrammata HD, HB, & habebunt, per 34, angulos oppositos, & latera opposita æqualia. Sunt autem, per suppositionem, duo latera IB, BE inter se æqualia, ergo & eisdem opposita IH, HE inter se, & omnia quatuor latera sunt æqualia. Pariter in HD sunt omnia inter se latera æqualia. Ac præterea, per suppositionem, anguli sunt recti I, B, E; ergo & reliquus H rectus est: ergo, iuxta definitionem, quadratum est HB.

Pariter in HD sunt anguli recti omnes. nam D, H, & IAD, DCE sunt recti, per suppositionem, ergo & qui deinceps HAD, DCH sunt recti, ergo quatuor omnes recti, ergo quadratũ est HD.

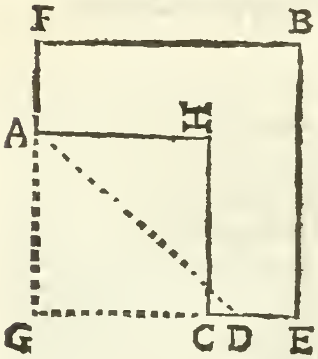
3 Iam inueniendum, & constituendum est quadratum æquale ipsi Gnomoni IDE, hoc est quadrandus est Gnomon.

Producatur in directum AD in G; & interuallo EG signetur in F semicirculus designatus super rectâ EB. Iuncta FB est latus quadrati æqualis gnomoni EDI. Nam, per hãc 47, quadratum BH ex latere EB, quod opponitur angulo recto F in semicirculo, est æquale quadratis ex EF, FB. At quadratum CA est ex EF, hoc est ex illi æqualibus EG, vel CD. Id ergo CA si auferatur ex quadrato maiore EI, remanebit gnomon EDI æqualis quadrato ex FB, hoc est erit gnomon quadratus in ex FB. Quod erat demonstrandum, ac faciendum.

Paulle

Paullo Aliter.

Gnomonem quadrare, pariter ſine inuentione, ſeu cognitione mediæ proportionalis.



IN altera hic appoſitâ figurâ, conſtructâ iuxta determinationem in antecedẽti problemate, ſumatur longitudo vnius laterum quadrati GB, verbi gra. GE, & ex A applicetur in D. dico quadratum ex GD eſſe æquale gnomoni AHCEBF. Quoniam enim quadratũ ex AD eſt æquale duobus quadratis ex AG, & ex GD, & AD ſumpta eſt æqualis ipſi GE, ergo & quadratum ex GE, hoc eſt quadratum GB conſtãs quadrato GH, & gnomone AHCEBF, erit æquale yſdem duobus ex AG, & GD. Ablato ergo communi quadrato GH, erunt æqualia inter ſe quadratum ex GD, & Gnomon AHCEBF. Deſcripto igitur quadrato à recta GD, erit quadratus Gnomon, &c.

SCHOLION.

VIde conuerſam præcedentium quadrationum ex gnomonibus, inferius in § 27 ad hanc 47.

§. XIII.

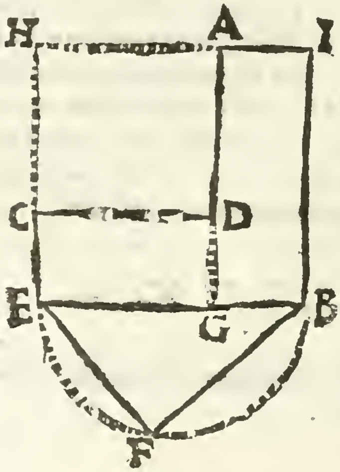
COROLLARIVM.

Ad Aristotelis locum cap. 4 de prædicamentis, vbi de motu: non sine paradoxo.

Quædam augentur, & nō alterātur. &c.

Exemplū aptissimum in Geometrica Philosophiâ.

1 PHilosophi verba: similiter autem & quod augetur, aut alia aliquâ mutatione mouetur, alterari opporteret. sed sunt quædam quæ augmentantur, quæ non alterantur. vt quadratum gnomone circumposito creuit quidem. alteratum at nihil factum est. &c. *Apposito gnomone ipsi quadrato, adhuc quadrata figura perstat, licet aucta, non alterata in aliam tertiam figuram. &c. Habes exēplum in à nobis positâ figurâ. Si enim quadrato DH apponas figurā EDI æqualem quadrato ex BF, creuit quadratum DH ex minimo in maximum EI. Atque ex hac Pythagorica 47 propos. Eucl. vides in triangulo rectangulo EFB ita inter se iuuare trium laterum quadrata, vt minimū ex EF ope minoris ex FB crescat in maximum, & adhuc remaneat quadratum, quale EI. &c.*



2 *Si enim quadrati CA latera HC, HA æqualiter producantur in E, I, & describatur ab eorum altero quadratum, per anteced. propos. 46, erit quadratū minus auctum in maius item quadratum HB per appositionem, siue, vt Arist. rectè, per circumpositionē gnomonis CBI, qui est iuxta nostram determinationem rectangulus, & laterum æqualium circa rectos, &c. fitq; hoc paradoxū, vt ex figuris alterà quadratà*

DH,

DII, alterà non quadratà, hoc est gnomone, coalescat tertià maior figura quadrata. Ex quibus antedictis Aristotelem intelligas, &c.

Vide apud Campanum vbi docet, ac demonstrat, datis duobus quadratis, alterum augere gnomone, qui sit alteri æqualis. Quæ tamen patent ex nostrà gnomonis quadraturà.

Ex figura quadrata, & ex non quadrata fit quadratum.

§. XIV.

Locus Arist. de quadrato Morali.

ANimaduerteris, opinor, in antecedentibus geometricis prolusionibus circa quadrata detrahenda, addenda, augenda, &c. nos id quod polliciti fueramus præstitiße, nempe vt in ijs omnibus quadratorum permutationibus singulæ, ac omnes sẽper eßent ac prodirent figuræ quadratæ. Symbola sunt hæc viri perfectà virtute præditi, qui, vt affirmat Aristoteles lib. moral. Nicom. cap. 10, non instar Chameleontis mutatur ad varias fortunæ mutationes, sed felix erit per totam vitam. semper enim vel maximè omnium ea aget, & cõtemplabitur quæ sunt secundũ virtutem, fortunasq; pulcherrimè feret, atq; omni ex parte prorsus accuratè, atq; aptè: quippe qui verè bonus, & Quadratus absq; vituperatione sit. ἀγαθὸς ἀληθῶς, καὶ τετράγωνος ἄνευ ψόγου. *Siue augeatur bona, siue à mala imminuatur fortunà, &c. semper perstabit quadratus, ac sui similis, immutabilis animo æquus, ac hilaris.*

Vir bonus non instar Chamaleõtis mutatur. &c.

Vir quadratus moraliter.

§ XV.

PARADOXVM.

Diameter in quadrato incommensurabilis costæ ex 47 prop. li. 1. Euclidis. Aristoteles explicatus.

1 *QVantum satis est Tyroni nondum imbuto cognitione demonstrationum lib. 10, in cuius extremà demonstratur*

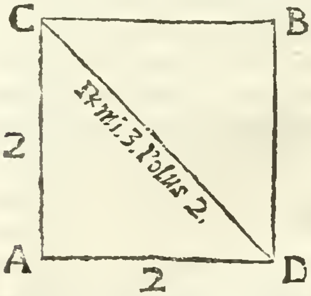
Propriè incommensurabilitas diametri, & costæ in quadrato, hîc nunc indicabo incommensurabilem esse diametrum quadrati vtrilibet laterum. Quod vnum est è singularibus paradoxis, & admirandis Geometricæ Philosophiæ.

Incōmensurabilitas linearū in Geometria est res mirissima.

Cæterum vt admirationem circa propositum excites, vide, Tyro, primas definitiones lib. 10: atq; intellige quàm mirum sit in Philosophià Geometrica doceri, ac demonstrari (loquor hîc tantum de lineis) esse aliquas lineas ita inter se aptas, vt nulla inter ipsas sit aptitudo communis mensuræ, nec sit vnquam reperire vllam particulam, quæ aliquoties replicata metiatur vtramq; cōpletè, sed semper post replicatam mensurā circa vel latus, vel diametrum quadrati, sit semper in alterutro aliquid quod vel superet post mensuram integrā, vel deficiat ab integrà mensurà. Hoc enim est esse incommensurabiles lineas apud Geometricos Philosophos, non autem diametrum esse maiorem latere quadrati, quod stolidissimè opinantur, & explicant ageometrici aliqui.

Quid sit incōmensurabilitas in lineis &c.

Nota stoliditatem ageometricam nescio quorum.



2 Sit quadratum AB, cuius diameter CD. Vin' ergo, mi Tyro, experiri ex 47 diametrum CD esse incommensurabilem costæ, siue cuilibet laterum quadrati AB? Sit quodlibet laterum, ver. gratia, mensuræ duùm palmorum. Quadratum ex AD erit 4, item ex AC 4, quæ inter se addita cōficiunt quadratum 8, cuius latus est diameter CD opposita angulo recto A in triangulo CAD, iuxta demonstrata ex hac 47 prop. li. 1. Eucl. Quadrati ergo 8 si radicem, siue CD, inquiras in numeris, ac mensuris laterum vtriuslibet CA, vel AD, nullam integram & in fractionibus determinatam inuenies. est enim ipsius 8 radix minor, quàm 3, maior, quam 2. ergo palmaris mensura non metitur latus AD, & CD, quia bis replicata aaæquatè metitur AD, bis replicata non exhaurit totam CD, ter replicata excedit, &c. Idemq; omnino semper comperies in qualibet alia mensura.

3 Atq; hoc quasi tentamentum sit pro Tyronibus. Prouectioribus autem dicendum est rationem incommensurabilitatis diametri cū costa in quadrato esse, quia, cùm ex hac 47 (vt habes in § 7 post probl. 3. coroll. 2.) quadratum diametri sit duplum quadrati costæ, & in numeris, per antecedentia à nobis ostensa § 9 ad hanc 47, non sint quadrati proportionem habentes duplam inter se, ergo, per 9 de-

Ratio incōmensurabilitatis diametri cum costà in quadrato.

decimi, neq; latera quadratorum ex diametro, & ex costà habebunt inter se proportionem, scilicet rationalem, quæ numeris exprimi possit, idest erunt incommensurabiles. nam ex vltima parte citatæ 9 propos. decimi, Quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia. *Atq; hìc indicatam habes breuissimè demonstrationem affirmatiuam pro indirecta, quam habet Eucl. extremo lib. 10.*

§. XVI.

Aristoteles, & Vitruuius illustrati ex antecedentibus.

1 N*Otandum ex eo quòd Aristoteles consuetà suà breuitate sæpius ait: Diameter est incommensurabilis costæ, falli posse Tyrones aliquos dum eam incommensurabilitatem venantur modo à nobis tradito ex 47, ac versantur circa exemplum Pythagorici trianguli, cuius circa rectum angulum vnum latus sit 3; alterum 4, tertium oppositum recto angulo sit 5. nam duo quadrata 9, & 16 ex 3, & 4, composita faciunt 25 tertium quadratum, cuius radix est 5; atque hoc modo diameter, aiunt, est commensurabilis costæ. At Aristoteles, & alij dum sic accisè loquuntur, subintelligendi sunt iuxta extremam propositionem li. 10 Eucl. quæ est de diametro solius quadrati, non autem rectanguli non quadrati, &c. Ex his, & sequentibus lucem habes ad Proclum in § 9 antecedentium.*

Hallucinatio tyronica in diametri æqualitate cum costa.

2 *Vide præterea Aristotelem lib. 1. prior. cap. 23, vbi paucis attingit medium terminum indirectæ demonstrationis Euclidis de diametro incommensur. &c.* Diameter incommēsurabilis eo, quod imparia æqualia paribus fiant, &c *Deducit enim Euclides ad absurdum, quòd idem numerus esset par, & impar, si diameter esset commensurabilis costæ quadrati. &c. Alexander Aphrodisæus doctè ad eum Aristotelis locum adducit demonstrationem Euclidis.*

3 *Ex Antepositis ad hanc 47 etiam intelligas licet Vitruuium lib. 9. cap. 1. cui est inscriptio:* Platonis inuentum de agro metiendo. *Mox addit:* Locus, aut ager paribus lateribus si erit quadratus,

cum-

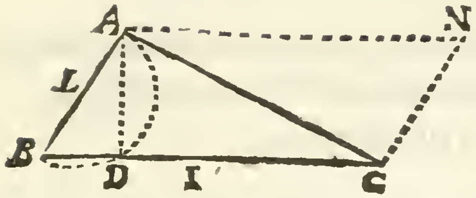
Vitruuij loco illustri, & obscuro lux ex antecedentibus.

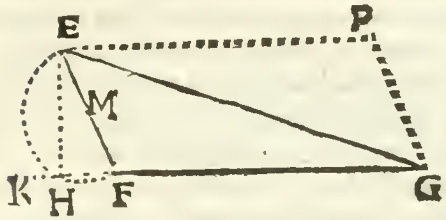
cumque oportuerit iterum ex paribus lateribus duplicare, id genere numeri, ac multiplicationibus non inuenitur, & descriptionibus linearum emendatis reperitur. Est autem eius rei demonstratio. Quadratus locus, qui erit longus, & latus pedes denos, efficit areæ pedes centum. Si ergo opus fuerit eum duplicare, & aream pedum ducentorum item ex paribus lateribus facere, quærendum erit, quàm magnum latus eius quadrati fiat, vt ex eo ducenti pedes duplicationibus areæ respondeant. Id autem numero nemo potest inuenire; namq; si 14 constituentur, erunt multiplicati pedes 196; si quindecim pedes 225. Ergo quoniam id non explicatur numero in eo quadrato longo, & lato pedes decē, quæ fuerit linea ab angulo ad angulum diagonios producatur, vti diuidatur in duo trigona æqua magnitudine, singula areæ pedum quinquagenum. Ad eius lineæ diagonalis longitudinē locus quadratus paribus lateribus describatur. Ita quam magna duo trigona in minore quadrato quinquagenum pedū linea diagonica fuerint designata, eadem magnitudine, & eodem pedum numero, quatuor in maiore erunt effecta. Hac ratione duplicatio grammicis rationibus à Platone fuit explicata. *Satis patent verba Vitruuij recolentibus quæ predicta sunt in §9, & hìc. ne semel, ac bis dicta frustrà triplicentur. Applicet Tyro à nobis prædicta verbis Vitruuij. &c.*

§. XVII.
PORISMA.

Ex 47 propos. Eucl. inuenire quantitatem catheti, siue perpendicularis à vertice trianguli ad basim, vel ab angulo parallelogrammi ad suppositum latus pro dimetiēdis areis, siue superficiebus planarum figurarum, etiam cum vsu circini proportionum.

ETiam si ad 32 propos. Eucl. § 20 per angulum in semicirculo docuerimus inuenire perpendicularem à vertice ad basim in trian-





triangulo nō rectā-gulo, tamen hìc etiam aliter varietatis gratià, & breuiter indicemus. Interuallo AB, ex A fiat sectio in I, & IB bifarietur in D; erit enim iuxta 12 propos. huius, AD perpēdicularis. Pari modo si interuallo EF ex E fiat sectio in K, productæ GF, bifariatio inter KF dat H terminum perpendicularis EH. Inuentis igitur punctis D, & H, facile scies ex 47 quantitatem imaginati catheti AD, & EH. nam quadratum ex AB æquale est duobus quadratis ex BD, DA; detrahe ex quadrato AB quadratum BD, reliquum fit quadratum, cuius radix est AD. Idemq; fiet circa EFH, vt habeatur EH. Habiti catheti numerus multiplicatus in dimidias bases triangulorum dat areas triangulorū, & rectangulorū æqualiū ipsis triangulis, multiplicatus vero in totas bases dat areas rectangulorum, & parallelogrammorum duplo, quàm triangula maiorum, inter easdem parallelas, super æqualibus, vel eadem basi. &c. velut ipsorum BN, FP, iuxta proposit. 41 huius li. 1 Eucl. & iuxta notata à nobis ad eam propos. Et quoniam quælibet figura rectilinea diuidi potest in partes triangulares, vt non semel iam in antecedentibus docuimus, ideo dùm hìc diximus ex 47 inuenire quantitatem perpēdicularis à vertice trianguli, &c. habes à nobis modum ab hac 47, quo metiare superficies quarumcūq; irregularium figurarum. Reuise etiam § 3 ad prop. 41.

Ac memento hìc etiam pro praxi inueniendæ quātitatis catheti in quotlibet partes æquales, itemq; basium, ac laterum figurarum, quarum areas meteris, vsui expeditissimo futurum circinum proportionum, iuxta dicta de eo ad propos. 10 huius. Illuc reuise.

Ex

Ex 47 compendia ad præcipua problemata, & theoremata vniuersæ Geometricæ Philosophiæ.

EXempla saltem in aliquibus indicabo, eruntque circa inuentionem linearum inter se proportionalium; circa transformationem vniuersalem dati rectilinei in æquale, ac simile dato rectilineo. Ac licet aliqua supponi videantur è libris Euclidis consequentibus, tamen facillimæ sunt intelligentiæ etiam Tyroni nondum in ijs libris versato; & proponuntur ad exercitiũ in primis praxium, & hic in locum extremum à nobis reiecta sunt, vt quasi gradus quidam sint ex hac 47 penultima ad vlteriora, quibus quantum lucis, adiumenti, & compendij afferat hæc eadem 47 propositio Tyrones vtcumque prospiciant. Præsertim cùm hic subijcienda futura etiam sint plurimi vsus ysdem Tyronibus versaturis aliquando in praxibus aliquibus vel Gnomonicis, vel Geometricis. &c.

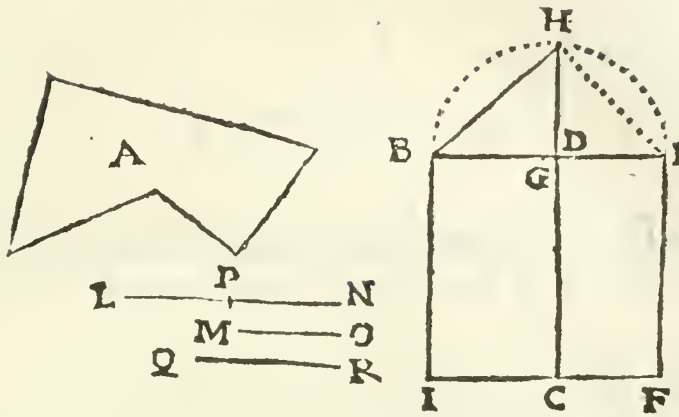
§. XVIII.

PROBLEMA.

Datis duabus rectis lineis mediam, vel tertiam proportionalem inuenire per hanc 47 Eucl.

1 *SI datæ sint L, M, inter quas media inuenienda sit proportionalis, idest ad quam altera datarum habeat eandem proportionem, quam ipsa media ad alteram; secanda erit maior ad magnitudinem minoris, velut interuallo MO facienda est sectio ex N in P, & componendæ vt factum vides in BE, DE, & interuallo dimidiæ ipsius LN signandus est semicirculus, ad quem erigenda est perpendicularis ex P, vt factum est ex D*

in



in H. Recta enim iungens H, & E erit media quæsita, iuxta quidem partem secundam corollarij ex 8 prop. & iuxta propos. 17. lib. 6. sed nos ijs propositionibus libri sexti (quo nondum Tyro Geometricus pertigit) vix egemus, ac demonstrabimus problema è nostris antecedentibus. Nam (vt vidisti in nostro Lemmate in § 10, & in Probl. § 11. vbi dato rectilineo æquale quadratum constituimus) vtrumlibet laterum constituentium angulum rectum H (in exemplo nostro, HE) efficit quadratum æquale rectangulo sub tota basi, & sub segmento adiacente, &c. hoc est sub BE, ED, ac proinde HE media est prop. inter BE, ED, hoc est ipsa QR æqualis ipsi HE, &c. Corollarij vero ex 8 propos. lib. 6 pars secunda pro Tyronibus, iuxta Clauij versionem sic habet: vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium medium proportionale est inter totam basim, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet. *& propos. 17. lib. eiusdem 6. sic habet:* si tres rectæ lineæ sint proportionales, quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur quadrato.

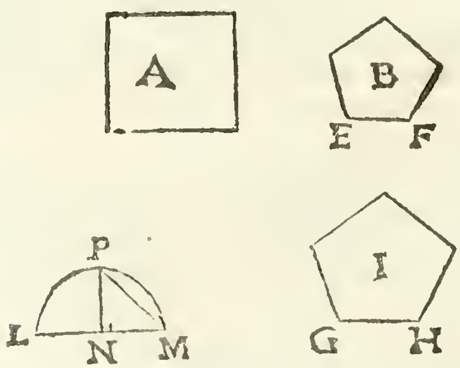
2 Sin autem duabus LN, QR tertia proportionalis inuenienda sit, semicirculus erit rursus ducendus supra LN, vt factum est supra BE, deinde secunda QR applicanda erit in semicirculo, vt est HE, demissa perpẽdicularis à puncto peripheriæ, vbi applicatę alterum extremum est, secat in basi tertiam proportionalem. Sic vides à puncto, & extremo H demissa perpendicularis HD bene. cio secari DE, (hoc est MO illi æqualem) quæ est tertia ad primam BE, & secundam EH proportionales. Quę patent ex citatis nostro Lemmate, & Problemate § 10, & 11, & è coroll. & prop. lib. 6. adductis. &c.

§. XIX.

PRAXIS

Dato rectilineo æquale rectilineum, & alteri dato simile constituendi.

Hoc Problema est propos. 25 lib. 6 Euclidis, & fons omnium transformationum geometricarum in planis figuris. Non censui fraudandos Tyrones Geometricos hàc saltem praxi vniuersali, & vtilissimà in Geometricis, deductà ex hac 47, & è nostris coroll. licet deinde ad ipsius praxis demonstrationem opus sit lib. 6 aliqua propositione. Tamen, vt fieri solet in praxibus, satis erit Tyroni constructionem ex antecedentibus prodere. Constructionis facilitati viam strauit nostrum Problema ex antecedentibus, vbi dato rectilineo quadratum æquale constituimus ex hac 47 propos. Hìc vniuersalius transformamus rectilineum non solum in quadratum, sed etiam in quodlibet aliud rectilineum.



Sit

Sit rectilineo A constituendum æquale rectilineum, ac simile ipsi B, hoc est sit rectilineum A transformandum in pentagonum æquale. Ad latus EF in angulo lubito constituatur parallelogrammum æquale ipsi B, per 45 huius, & ad alterum constituti parallelogrammi latus constituatur alterum parallelogrammum æquale ipsi A. Sintq; eorum parallelogrammorum duo latera LM, MN. Describatur semicirculus LPM; & ex N erigatur perpendicularis NP. Iungatur PM, quæ, ex antedictis, & deductis ex hac 47, erit media proportionalis inter LM, MN. Super PM constituatur figura, velut I, similis ipsi B, iuxta dicta ad 23 huius, eritq; eadem I æqualis ipsi A. Demonstratio huius praxis pendet ex corollar. 2, prop. 20, li. 6. vt ibi videbis.

Interim dum nondum accessit Tyro ad 6 lib. vtatur ad compendium solà constructione, ac praxi hìc traditâ ad vniuersalẽ transformationem figurarum planarum. Habet enim ad praxim omnia necessaria ex duabus propositionibus huius lib. 1. nempe transformationem datorum A, & B in parallelogrammata, quorum latera sunt LM, MN ex 45, & inuentionem mediæ PM ex 47 pro constructione quæsiti I æqualis ipsi A, & facti similis ipsi B per vsum propos. 23 huius.

§. XX.

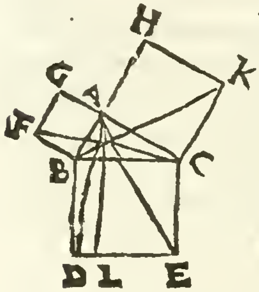
SCHOLION.

Pythagoricam hanc propositionem efficere vniuersalem è communibus notionibus.

1 E*Vclides l. 6. propos. 31. vniuersaliorem demonstrat, quam à Pythagora accepit. Nam Pythagoras de solis laterum quadratis, Euclides de quibuscunq; figuris similibus supra latera, &c.* In triangulis rectangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente æqualis est figuris, quæ fiunt à lateribus rectum continentibus, similibus, similiterq; descriptis. *Demonstrat eã vniuersalem Euclides ex hac 47. Nam*

figuræ super lateribus angulum rectum comprehendentibus eandẽ habent rationem ad similem, similiterq; positum super latere subtendente angulum rectum, quam quadrata laterum ad quadratum lateris sub recto angulo. &c. At quadratum id, ex hac 47, eſt æquale, &c. ergo & figura eius lateris figuris laterum, &c. Videbunt Tyrones expressiora suo loco: nos hic vix indicamus, vt quasi à longe videant Tyrones quemadmodum hæc 47 producat etiam eam vniuersalem in lib. 6.

2 *Quod præcipuè hic quærimus, & proposuimus Tyronibus eſt, vt videant siue geometricà demonstratione à notionibus communibus quemadmodum vniuersalitas ab Euclide tributa Pythagoricæ huic propositioni patere possit saltem in quadrilateris rectangulis figuris. nam in figurà Euclidis si fingas ex Quadratis GB, HC, CD abscissa esse dimidia. hoc eſt facta esse rectangula ex vno laterum integro, & ex altero dimidiato, (vel etiam tertià, vel quartà parte imminuto &c.) erit rectãgulũ super latere BC æquale rectangulis super lateribus BA, AC. Si enim totum BE eſt æquale totis GB, HC; erit & dimidiũ dimidijs, tertia pars tertijs, &c. æqualia, &c. In libro vero 6 ex hac 47 videbis vniuersalitatem ad quaslibet figuràs etiam præter quadratas, & rectangulas, &c.*



3 *Hic interim adde Pythagoricæ hanc vniuersalem:* In triangulis rectangulis quod fit à latere rectum angulum subtendente quadrilaterum rectangulum æquale eſt quadrilateris rectangulis, quæ fiunt à lateribus rectum angulum comprehendentibus, similibus, similiterq; positis.

Adde præterea vniuersalitatem productam etiam extra rectãgula ad parallelogrammata etiam non similia constituta super lateribus trianguli rectanguli, quorum id quod opponitur recto angulo æquale eſt reliquis duobus, &c. vt habes à nobis Problema ad 35 propos. quod à Pappi Theoremate confecimus.

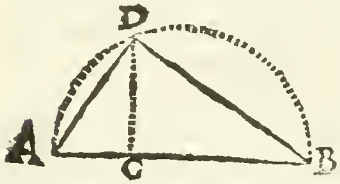
§.XXI.

§. XXI.

THEOREMA, & Corollarium è 47 propos. Eucl.

Si recta linea secta fuerit vtcumq; in duo segmenta, quadrata duarum mediarum proportionalium inter totam, & vtrumq; segmentum æqualia sunt quadrato totius.

QVod non nemo quasi nouum, ac reconditum proposuit, est corollarium, quod facillimè deducitur, ac soluitur è 47 huius. Nam —



— Recta linea AB secta sit vtcumq; in C; dico quadrata tum mediæ proportionalis inter totam AB, & segmentum AC, tum mediæ inter totam, & segmẽtum CB esse simul sumpta æqualia quadrato ex totâ AB.
Vt statim veritas demonstrata pateat, finge super AB descriptum semicirculum ADB, & è puncto sectionis C erectam perpendicularem, quæ circumferentiam secet in D; & iunctas esse AD, BD.

Quoniam triangulum ABD in semicirculo habet angulum ad D rectum, &, per § 18 nostrum ad hãc 47 Eucl. AD est media proportionalis inter AB, AC, item recta DB est media proportionalis inter AB, CB; & per hanc 47 quadratum ex AB recto angulo oppositum est æquale duobus quadratis ex AD, DB; ideo constat, & deducitur veritas propositi Theorematis, & Corollarij.

§. XXII.

§. XXII.

Campus Geometricus è 47 propoſ. pro praxibus diuidendorum, augendorum, imminuendorum, &c. circulorum ita, vt & tota, & partes, & reſidua, &c. ſint circuli.

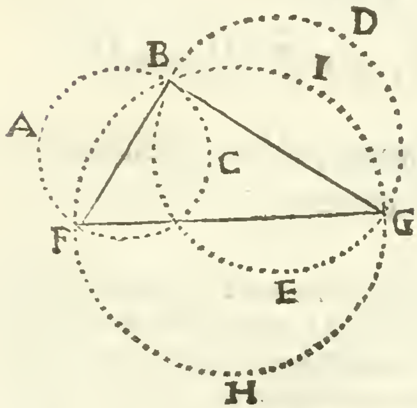
QVoniam, quemadmodum habẽt inter ſe quadrata ex diametris, ita inter ſe habent circuli, quorum eæ ſunt diametri, per 2 prop. lib. 12, quæcumque geometricè luſimus in varijs Problematibus antecedentibus circa quadrata ex hac 47 propoſ. poßunt etiam ſaltem practicè exerceri circa circulos, ſuppoſità cit. prop. 2 lib. 12.

Itaq; vt in § 6 probl. 1 & § 7 poriſm. & coroll. & probl. 2, 3; & § 8, probl. 4, & § 9 probl. 5, 6; & § 12, quadratũ minus ex maiore detraximus, reſiduo quadrato, differentiam quadratã duorum quadratorum inueſtigauimus, auximus quadratum in figurã maiorem quadratam addito quadrato, quadratum in geminata quadrata æqualia bifariauimus, atq; etiã duplauimus, infinitis numero quadratis vnum æquale præſtitimus, gnomonibus æqualia quadrata exhibuimus, &c. iiſdem prorſus modis licebit è maiori minorem circulum ſubducere, ſemper circularibus figuris permanentibus, circularem differentiam inter duos circulos inuenire, augere circulum in maiorem circulum addito circulo, circulum in duos æquales circulos diuidere, circulum duplicare, lunulis æquales circulos exhibere. &c. Quæ hic ſaltem indicamus, vt Tyronibus pateat campus geometricè in circulis ſe ſe exercendi ex hac mirifica 47 prop. Eucl. Omiſſis omnibus alijs exemplis hic indicatis, aliqua tantùm ad praxim propono, quorum primum eſto —

Pro-

PROBLEMA, & PRAXIS I.

Datis duobus circulis tertium ęqualem facillimè describere è 47 prop. huius.



DAtorum inæqualium circulorum ABC, BDE diametri FB, BG iungantur in angulum rectũ B, iuncta basis FG dabit diametrum circuli HFIG. Quem affirmo eße equalem datis duobus circulis. Nam ex 47 propoſ. huius vt quadratum ex FG eſt æquale quadratis ex FB, & ex BG, ita circulus diametri FG eſt æqualis circulis ex diametris FB, BG, per 2 propoſ. lib. 12. Itaq; ſaltem praxis conſtat. Sic & alia problemata de circulis indicata.

COROLLARIVM practicum pro fontibus. &c.

SI fontem habeas, qui duabus circularibus, ſiue cilindricis, etiam inæqualium orium fiſtulis tuos irriget hortos, ac velis ora duarum earum fiſtularium circularia transferre in cilindricam vnius oris circularis fiſtulam ita, vt tantundẽ aquæ ex vnius ore effluat, quantum è duabus, habes artem in antecedenti praxi, qua diametrum iuſtam inuenias, ad cuius quantitatem os fiſtulæ circulare conflетur. Plura circa hortenſia, & militaria ex circularibus figuris videbis in lib. 6 ad prop. 20.

SCHO-

SCHOLION.

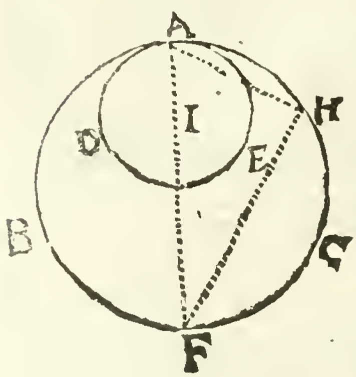
Datis pluribus circulis vnũ æqualem describes, si vtaris lateribus quadratorum (in fig. probl. 6, § 9 anteced.) tamquam diametris circulorum. &c.

§. XXIII.

PRAXIS, seu Problema II.

Dato circulo lunulam ęqualem facillimè describere.

Intellige lunulam ex contactu interiore duorum inæqualium circulorum. Igitur in figurâ proximè antecedenti finge datum circulum esse BDE, cui lunula æqualis describenda sit. Ad dati circuli diametrum iungatur in angulum rectum altera recta lubitæ longitudinis, puta esse ipsam FB: iungatur subtẽsa recto angulo recta, velut FG. Diametris FG, FB describantur duo circuli, quales hic vides ABC, ADE se in puncto aliquo A contingentes. Dico spatium curuilineum interceptum inter conuexum minoris, & concauũ maioris circuli, nempe lunulam ABCED esse æqualem dato circulo in anteced. fig. BDE. Quoniam enim, per probl. in § 22 anteced.

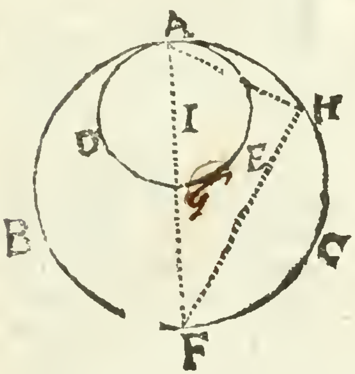


circulus hic ABC diametri datæ FG est æqualis & circulo hic ADE diametri datæ FB, & circulo dato BDE; ergo alterutro minorum, velut ADE inscripto, ac tangente maiorem, reliquum spatium ab inscripto ADE non occupatum (nempe descripta lunula ABCED) erit æquale alteri circulo minorum, nempe dato IDE. Quod fuit præstandum.

§.XXIV.

PRAXIS 3, seu Porisma.

Datæ lunulæ ex contactu interiore duorum inæqualium circulorum inuenire facillimè, ac describere circulum æqualem.



EX contactu interiore in A maioris circuli ABC cum interiore minore ADE esto lunula ABCED, cui opporteat inuenire, ac describere circulum æqualem. In semicirculo ACF applicetur ex A diameter minoris circuli AG in H. Interuallum FH erit diameter circuli æqualis datæ lunulæ ABCED. Quoniam enim in triãguli rectanguli AHF in semicirculo AHCF basis, siue diameter AF est circuli æqualis duobus ADE, & alteri circa diametrum FH, & diametri AH circulus ADE occupat partem maximi circuli ABC, ergo reliqua pars, idest lunula ABCED, est æqualis circulo circa diametrum FH. Ergo datæ lunulæ inuẽtus est circulus æqualis, ac describendus è bifariata diametro FH. Quod propositũ fuit.

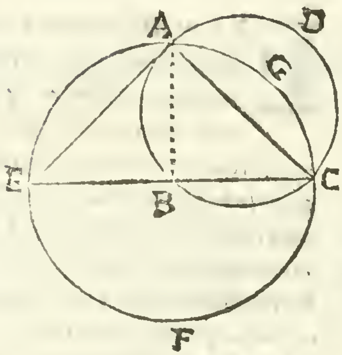
SCHOLION.

CIrca inscriptionem minoris intra maiorem circulum ita, vt se in communi puncto contingant, vides in figurà artem, scilicet accepto interuallo diametri minoris in maiori ab A v. gratia vbi vis fieri contactum, ad G, & bifariatà GA in I, &c. Hæc tyronibus.

§. XXV.

PRAXIS 4, & Problema.

Dato circulo æqualem semicirculum describere.



Esto datus circulus ABCD, cui æqualem semicirculum opporteat describere. A diametri alterutro extremo A excitetur perpendicularis AE, seceturque æqualis diametro AC, & iungatur EC, quæ bifarietur in B, & alterutrâ semidiametro BE describatur circulus EFCA; erit eiusdem circuli quodlibet dimidium EAC æquale circulo, cuius alterutra diameter sit AE, AC, scilicet dato ADCB. Nam, iuxta antecedentia problemata ad hanc 47, isoscelis rectanguli trianguli AEC latus EC efficit quadratum æquale duobus quadratis ex æqualibus lateribus EA, AC, pariterque diametri EC circulus est æqualis duobus æqualibus circulis æqualium diametrorum EA, AC; ergo dimidius circulus EAC est æqualis alteri minorum inter se æqualium circulorum, scilicet ipsi ADCB.

§. XXVI.

§. XXVI.

PRAXIS 5, & Corollarium.

Dato triangulo isosceli rectangulo lunulam (factam ex mutuà sectione duorum circulorum, quorum alter alterius sit duplus) æqualem describere.

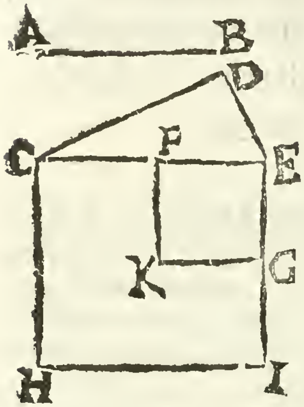
SIt triangulum isosceles rectangulum ABC. Sitq; diametri recto angulo opposita AC circulus ABCD. Alterutro laterum AB, BC rectum angulum ad B comprehendentium factà semidiametro, & centro in B facto, describatur circulus CAEF, qui, per proximè antecedens Problema, duplus est circuli ABCD, & semicirculus EAC æqualis eidem circulo ABCD. ergo cum tota sint æqualia, erunt & dimidia inter se æqualia, dimidiũ scilicet semicirculi quadrans BAGC, & dimidium minoris circuli ACD erunt inter se æqualia. Æqualium ergo BAGC, ACD auferatur commune ACG, eritque triangulo isosceli rectangulo BAC lunula AGCD æqualis descripta. Quod erat præstandum.

SCHOLION.

IN antecedẽtibus proximè duobus problematibus habes, mi Tyro, quadraturam lunulæ Hippocratis Chij, quam merito demirata est omnis antiquitas. Ad quam quemadmodum te manuducat hæc 47 hic iam didicisti.

§. XXVII.
PROBLEMA.

Dato quadrato ęqualem gnomonē exhibere.



QVod in § 12 antecedentiū polliciti sumus hic in extremo loco ad hanc 47 quadratariam propositionem præstabimus, vt in proprijs, idest in quadratis post circulos demonstratiuè concludamus; atque vt dato circulo æqualem lunulā, sic dato quadrato æqualē gnomonem exhibeamus. Esto quadratū datū (cuius latus AB) cui oporteat statim exhibere gnomonem æqualem. Datę AB, siue ipsi AB æquali DC iūgatur ad angulū rectum in D quælibet recta DE, iunctáq; CE, & descripto super eà quadrato CI, interuallo ED fiat sectio ex E in F, & G, & compleatur quadratum FG; erit Gnomon sub rectis CHIGKFC æqualis quadrato ex AB, siue ex CD sumptà æquali ipsi AB. Patet demonstratio iuxta antecedentia, quoniam in quadrato CI, quod est æquale duobus ex ED, & ex CD, inscripto FG ex EF æquali ipsi ED, reliquum spatium in quadrato CI vacans ab occupante FG (hoc est gnomon CHIK) est æquale reliquo quadrato ex CD, siue AB.

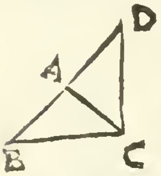
SCHOLION.

QVæ hic, & in antecedentibus indicauimus, vel exercuimus in diuisione, vel auctione per æqualia, &c. vide ad prop. 31. lib. . vniuersaliter facta pro quacumq; proportione. Præterea, cū ex antec. § 11 ex hac 47 quadretur à nobis datum rectilineum, ergo & quodlibet rectilineum, augetur, diuiditur, &c. ex hac 47 (scilicet translatum prius in quadratum) si non in se, saltem in sibi æqualibus quadratis.

Pro-

Propos. XLVIII. Theor. XXXIV.

Si quadratũ ab vno trianguli latere descriptum æquale fuerit quadratis à reliquis lateribus descriptis, angulus à reliquis lateribus contentus rectus erit.



ESto quadratum à latere BC trianguli ABC descriptum æquale quadratis à lateribus BA, AC descriptis. Dico angulum BAC rectum esse.[a] Ducatur enim ab A pũcto lineæ AC ad angulos rectos recta AD, & sit[b] AD ipsi AB æqualis, iungaturq; DC. Et quia DA, AB æquales sunt, erit & quadratum ab AD descriptum æquale quadrato ab AB descripto. apponatur commune quadratum ab AC descriptum:[c] erũt igitur quadrata ipsarum DA, AC æqualia quadratis ipsarũ BA, AC. Sed quadrata ipsarum DA, AC æqualia sunt quadrato ipsius DC,[d] angulus enim DAC rectus est. Quadratis autem ipsarum AB, AC ponitur æquale quadratum ipsius BC. quadrata ergo ipsarum DC, BC sunt æqualia:[*] ergo & latera. Et cum AD, AB æquales sint, communis AC, igitur duæ DA, AC duabus BA, AC sunt æquales, & basis DC basi BC:[e] erit ergo & angulus DAC angulo BAC æqualis. Est vero DAC rectus: ergo & BAC rectus erit. Si ergo quadratum, &c. Quod oportuit demonstrare.

a prop. 11. 1.
b prop. 2. 1.
c ax. 2.
d per præc.
* Vide Proclum ad propos. 46.
e prop. 8. 1.

§. I.

SCHOLION.

Indicatæ Conuersiones aliæ vniuersaliores anteced. 47 propositionis, preter hanc 48. Ex ijs explorationes qualitatis angulorum in triangulis.

1 Q*Vemadmodum indicauimus in antecedentibus varias vniuersalitates præcedentis propos. 47, ita & hìc indicabimus vniuersalitates conuersæ huius 48.*

Prima: Si quod fit ab vno trianguli latere rectangulum æquale fuerit rectangulis similibus, quæ fiunt à reliquis duobus trianguli lateribus, erit sub ijs lateribus contentus angulus rectus. *Secunda:* Si figura, quæ fit ab vno latere trianguli, æqualis fuerit figuris, quæ fiunt a reliquis duobus lateribus similibus, similiterque descriptis, erit angulus sub ijs lateribus contentus rectus. *Quibus præpone tertiam, quæ est hìc propos. 48 Eucl. Prima est conuersa prioris vniuersalitatis à nobis factę à communibus notionibus progrediendo à quadratis ad rectangula similia. Secunda est conuersa propositionis 31 lib. 6 vniuersalissimæ. Tertiam habes hìc ab Euclide.*

Has vero conuersiones indicauimus ad praxes, de quibus paullò post; ideo dum ad praxes propero, præmitto hìc theoricam geometricam exercitationem Tyronibus, si lubitum ijs fuerit ex hactenus demonstratis in hoc lib. 1. demonstrare hìc indicatas conuersiones per deductionem ad impossibile, vel alia methodo. &c. Sed circa secundam tutius versabuntur cum in lib. 6. didicerint aliqua ibi supposita.

2 *Quemadmodum dum vnius lateris vel quadratū, vel rectangulum, vel denique quælibet rectilinea figura est æqualis vel quadratis, vel rectangulis, vel deniq; similibus, similiterque positis figuris reliquorum duorum laterum, angulum rectū indicant, &c.*

Sic

Sit si sint id quadratum, rectangulum, figura qualibet. &c. minora figuris &c. laterum duorum reliquorum, indicant angulum recto minorem. Sin autem id quadratum, rectangulum, figura &c. sint maiora figuris &c. reliquorum duorũ laterum, indicant angulum recto maiorem. Vnde habes multiplicem modum explorandi angulorum qualitates in dato triãgulo, si aueas scire an datus trianguli angulus sit rectus, an obtusus, an acutus. diuisis enim trianguli lateribus in partes æquales, & (vtamur quadratis ad facilitatem) confectis laterum quadratis per multiplicationem in seipsum numeri partium, &c. si lateris oppositi angulo, cuius quantitatem, seu qualitatem exploras, quadratum fuerit æquale, vel minus, vel maius quadratis reliquorum duorum laterum, inde conijcies æqualitatem, vel maioritatem, vel minoritatem anguli oppositi respectu anguli recti. &c.

Ex 47 pro. explorare in triãgulo qualitatem angulorũ.

§. II.

VSVS

Propositionis 48 ad normę formationem, & examen, ad Architecturam, & Machinariam. Ex Vitruuio, & ad Vitruuium notata, & cauta aliqua.

1 V*itruuius lib. 9. Architec. cap. 2. sic:* Pythagoras normam sine artificis fabricationibus inuentam ostendit, & quam magno labore fabri normam facientes vix ad veram perducere possunt, id rationibus, & methodis emendatum, ex eius præceptis explicatur. namque si sumantur regulæ tres, e quibus vna sit pedes tres, altera pedes quatuor, tertia pedes quinq;, eæq; regulæ inter se compositæ tangat alia aliam suis cacuminibus extremis, schema habentes trigoni, deformabunt normam emendatam. Ad eas autem regularum singularum lõgitudines si singula quadrata paribus lateribus describantur, quod erit pedum trium latus areæ, habebit pedes nouem,

Normæ inuentio Pythagoræ ex prop. 47. 48.

quod

quod erit quatuor, sexdecim, quod quinq; erit, vigintiquinque. Ita quantum areæ pedum numerum duo quadrata, ex tribus pedibus longitudinis laterum, & quatuor efficiunt, æquè tantum numerum reddit vnum ex quinq; descriptum. Id Pythagoras cum inuenisset, non dubitans à Musis se in eà inuentione monitum, maximas gratias agens, hostias dicitur ijs immolasse. &c. *Quæ verba quemadmodum commentarij loco esse possunt ad prop. hanc 48, & ad antecedentem 47; sic & ipsa intelligi nequeunt sine intelligentia earumdem propositionum.*

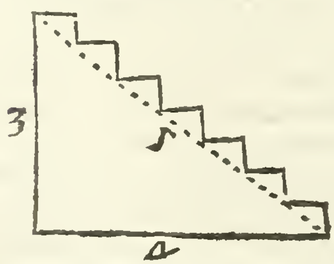
Demõstratiuũ examinis normæ.

2 Habes ex Vitruuio vnde normam examines, & demonstratiuè scias ea contineri angulum rectum, diuisis lateribus iuxta rationem, quam habent inter se latera trigoni Pythagorici ex 47, & 48 proposit. Demonstratio normæ ritè factæ vim habet à 48 propos. quæ est conuersa 47 propositionis. Si enim normæ latera ita in æquas partes sunt diuisa, vt quadratum ab vno laterum sit æquale quadtatis à reliquis duobus lateribus, angulus sub ijs est rectus.

Scalarum regula in Architectura ex 47, & 48 prop.

3 Ad Architecturã, & ad hanc 48 propos. pertinent quæ apud eundem Vitruuium in cit. cap. Ea autem ratio quemadmodum in multis rebus, & mensuris est vtilis, etiam in ædificijs, scalarũ ædificationibus, vti temperatas habeant graduum librationes, est expedita. Si enim altitudo contignationis ab summa coaxatione ad imum libramentum diuisa fuerit in tres partes, erit earũ quinque in scalis scaporum iusta longitudine inclinatio. Nam quam magnæ fuerint inter contignationem, & imum libramentum altitudinis partes tres, quatuor à perpendiculo recedant, & ibi collocentur interiores calces scaporum. Ita enim erunt temperatæ graduum, & ipsarum scalarum collocationes. Item eius rei erit subscripta forma.

Cochlea ad aquam attollendam eleua in iuxta triang. ex propos. 47, 48.



4 Quod ad Machinariam attinet, idem Vitruuius lib. 10. cap. 11 dum docet ad quem angulum eleuanda sit mira illa machina Archimedea, qua sensim aqua descendendo ascendit per spiralem circa cilindrum, affirmat eleuandam ad formam trianguli ex 47 prop. ita vt cochlea sit instar lateris oppositi angulo recto, & minimum latus sit altitudo perpendicularis à vertice cochlicæ, &c.

Verba

Verba Vitruuij sunt: Erectio autem eius ad inclinationem sic erit collocanda, vti quemadmodum pythagoricum trigonum orthogonium describitur, sic id habeat responsum, idest, vti diuidatur lõgitudo in partes quinq;, earum trium extollatur caput cochleæ, ita erit à perpendiculo ad imas nares eius spatium partes quatuor. *Vide in Apiar. 4 Progym. 1. Schol. 4. post propos. 11. expressiora, immo & cautiones ad eum locum Vitruuij ex Griembergeri censurà positas.*

Cautiones apud nos circa praxim Vitruuij in Cochlea.

§. III.

SCHOLION.

Ratio inueniendorum, & diuidendorum numerorum ita, vt juxta eos diuisa trianguli latera efficiant Pythagoricum triãgulum.

1 *Datum numerum partire per 12: multiplica quotientem per 3, per 4, per 5, & summæ ternæ tales erũt, vt maximæ quadratum sit æquale quadratis simul compositis reliquarum duarum summarũ. Esto datus numerus 48: diuisus per 12 dat quotientem 4: multiplicatus 4 per 3 conficit 12, per 4 conficit 16, per 5 dat 20. Quadratum ipsius 20, quod est 400, æquale est quadratis ipsorum 12, & 16, nempè ipsius 144, & 256 simul additis in summam 400. Vide operationes in A, B, C, D, E, F.*

Regula.

Exemplũ.

A	B			C	D	E	F
48 (4	4	4	4	20	12	16	144
12	3	4	5	20	12	16	256
	12	16	20	400	144	256	400

2 *Accipe, ab alijs iam vulgata, hîc à nobis ex primo antiquitatis fonte apud Proclum in comment. ad anteced. 47 propos.* Traditæ autem sunt & viæ quædam inuentionis huiusmodi triangulorum, quarum vnam quidem ad Platonem referunt, alteram vero

Pythagoræ regula circa impares numeros.

ro ad Pythagoram, quippe quę ab imparibus orta est numeris. Ponit enim datum imparem numerum tanquam minus latus eorum, quæ circa rectum angulum sunt, & cum acceperit eum, qui ab ipso fit, quadrangulum, ab hocq; vnitatem abstulerit, reliqui dimidium ponit tanquam maius latus eorum, quæ circa rectum sunt angulum, cum autem huic quoque vnitatem adiecerit, reliquum quod subtendit latus efficit. Exempli gratia cum Ternarium acceperit, ab ipsoque quadrangulum *(idest quadratum)* produxerit numerum, & ab ipso nouenario vnitatem abstulerit, Octonarij dimidium quaternarium suscipit, huicq; rursus vnitatem addit, & facit quinarium, repertumque est triangulum rectangulum, quod vnum quidem ex lateribus trium, alterum autem quatuor, tertiū verò quinq; vnitatum habet.

Exemplū.

Platonis regula circa numeros pares.

At Platonica à paribus adoritur. Cùm enim datum parem susceperit numerum, ponit ipsum tanquam vnum latus eorum, quę circa rectum angulum sunt, huncq; cum bifariam diuiserit, & à dimidio quadrangulum numerum produxerit, cum vnitatē quidem quadrangulo illi adiecerit, latus subtendens efficit, cùm vero vnitatem à quadrangulo abstulerit, facit reliquum latus eorum, quæ circa rectum angulum sunt. Verbi causa, cùm quaternarium susceperit, huiusque dimidium binarium in se ipsum multiplicauerit, ipsumq; quaternarium fecerit, cùm vnitatem quidem abstulerit, ternarium efficit, cum vero adiecerit, efficit quinarium, idēque triāgulum factum habet, quod ab altera etiam via perficiebatur. Quod enim ab hoc fit, ei, quod fit à ternario, & ei, quod à quaternario æquale componit.

Exemplū.

Vsus prædictarū regularum.

Hæc quæ in hocce Scholio, & § tertio sunt proderunt ad praxes facilius exercendas, quæ sunt indicatæ in anteced. Schol. & § 2.

CO-

CORONIS,

In qua sunt — à Circulo Paradoxa ad, & extra propositiones aliquot huius libri 1 Geometrici Elementaris.

Sed opinor in hoc extremo primo libro exigis à nobis non solum normam, (quam dedimus in praeced. § 2) sed & circinum; non modò triangulum rectangulum, sed & circulum, vt in eo primi huiusce libri orbem concludamus. Age, fiat; & accipe hìc à circulo paradoxa (praeter plura alia in antecedentibus) modo quodam opposita propositionibus aliquibus huius libri primi Geometrici elementaris.

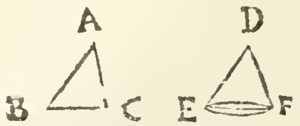
§. I.

PARADOXVM — Extra 4 propos. Eucl.

Duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habent vtrumq; vtriq;, habent etiam angulum angulo aequalem sub aequalibus rectis lineis contentum; nec tamen habent basim basi aequalem, nec est triangulum aequale triangulo, nec reliqui anguli reliquis angulis ęquales sunt. &c, sub quibus aequalia latera subtenduntur.

Patet in 2. figura propos. 4 Eucl. Si nempe duo latera aequalia duobus vtrumque vtriq; contineant angulum aequalem,

ſed habeant pro baſe rectilinea baſim curuilineam, ſeu circularem. nam in 2. figura Euclidis, in qua triangulum eſt DEF, cuius baſis rectilinea EF media eſt inter duas baſes circulares, ſiue curuilineas, patet angulos mixtilineos ſub vtrolibet latere rectilineo DE, DF, & ſub curua baſi concauà ſuprà, & vltra rectam EF, eſſe minores angulis rectilineis DEF, EFD ſua recta vtralibet DE, DF, & ſub baſi rectilineà EF, vtpote partes ipſorum rectilineorum DEF, EFD. Item anguli mixti ſub rectis DE, DF, & ſub curua, quæ eſt citra, & infra rectam EF ſunt maiores angulis iiſdem rectilineis DEF, EFD, qui ſunt partes curuilineorum ſub rectis, & conuexà.



Baſes vero illæ curuæ ſunt maiores rectà intermediâ EF, per Scholium noſtrum poſtremum poſt § 4 ad propoſ. 20 Euclid. in anteced.

§. II.

PARADOXUM — Extra 13, & 15 Propoſ.

1 Linea ſuper lineam cōſiſtens angulos duos nec rectos, nec duobus rectis ęquales facit.

2 Duæ lineę ſe mutuo ſecant, nec angulos ad verticem æquales efficiunt.

Patent hæc etiam ſine vlla figura, ſi imagineris rectam inſiſtentem ſegmento peripheriæ conuexo, vel concauo, quæ faciet angulos & minores, & maiores duobus rectis, vt facile prodetur ſi quis tangentem rectam ducat per punctum, vbi recta inſiſtit curuæ; anguli enim mixtilinei è rectà, & concauà erunt partes rectorum, recti verò erunt partes mixtilineorum, è recta, & conuexà. &c.

Quod ad angulos inæquales ad verticem è ſectione circularium,

vel

vel recta, & circularis, habes exempla, figuras, &c. in nostris Paradoxis Apiarij tertij, &c. citatis ad 15 proposit. Eucl. in antecedentibus.

§. III.
PARADOXVM Extra propositionem 16.

Triangula, quorum vno latere producto, externus angulus interno opposito non est maior, sed æqualis.

HAbes à circulo hoc paradoxum, factis triangulis isoscelibus. Quorum bases sint circulares; eductis enim semidiametris à centro, seu vertice trianguli, anguli externi ad semidiametros, & ad basim sunt æquales internis, &c. Sunt enim omnes in eodē circulo anguli semicirculorum æquales, iuxta probata à nobis in Apiar. 3.

§. IV.
PARADOXVM Extra corollaria ex 16, & 17.

Ab eodē puncto ad vnam, eandemq; lineam possunt duci plures, quàm duæ rectæ lineę inter se æquales. Ab eodem puncto ad eādem lineam possunt duci plures rectæ lineæ perpendiculares.

IN Scholijs ad 16 propos. Eucl. ex Proclo demonstratur (vt vidisti in antecedētibus) duas tantum rectas inter se æquales posse

se duci ab eodem puncto ad eandem lineam. At si ea linea sit circularis, nemo dubitabit ab eodem centro ad eandem lineam circularē, siue ad eādem peripheriam plurimas duci, immo omnes duci æquales, quæ est definitio, & essentia circuli.

Item in Schol. ad propos. 17 Eucl. ex Proclo demonstratur vnicam tantum perpendicularem duci posse ab eodem puncto ad eandem lineam. At si ea circularis fuerit, & peripheria, ab eodem centro omnes semidiametri ad eam peripheriam erunt breuissimæ inter se æquales, ac perpendiculares ad tangentes peripheriā. &c.

§. V.

PARADOXVM.
Extra 24, & 25 propos.

In dilatatione anguli ad verticem, vel basis permanet eadem altitudo triangulorum habentium æqualia latera. &c.

IN proposit. 24 affirmatur duorum triangulorum habentium æqualia latera, alterum, quod habet angulum maiorem æqualibus lateribus contentum, habere etiam basim maiorem. In propositione vero 25, alterum, quod habet basim maiorem, habere etiam angulum maiorem contentum sub æqualibus lateribus. At Scholiastæ sapienter aduertunt in ea anguli ad verticem, vel basis dilatatione imminui altitudinem trianguli, idest perpendicularem ab angulo verticali ad basim esse minorem dum dilatantur vel angulus verticalis, vel basis, manente eadem laterum longitudine; iuxta ea quæ habes apud nos in Apiar. 3, progymnasmate de paradoxis figurarum intra easdē parallelas. At vero in circulo, ductis semidiametris à centro ad peripheriam, etiam si ad cētrū facias angulos alijs maiores, vel peripheriæ maiores alijs partes pro basibus adsumas, tamen eadem altitudo, & quantitas semidiametri perseuerat, &c. Tu exemplis, & figuris exprime.

§. VI.

§. VI.

PARADOXVM *Extra 26 propositionem.*

Duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habent vtrumq; vtriq; vnumque latus vni lateri æquale, immo vtrumq; latus, quod æqualibus angulis subtenditur æquale; tamen tertium latus, & tertium angulum tertio æqualia non habent, nec triangula sunt æqualia.

Relege verba proposit. 26 Euclidis, & confer cum conditionibus nostræ huius 6 ptopositionis paradoxicæ, ac vide nos etiam addere conditiones plures, quibus ea triangula deberent esse æqualia angulis, lateribus, areà, tamen circulus obnititur. In ijs quæ diximus in Paradoxo, & § 5 nostro antec. poteris agnoscere paradoxum huiusce nostræ propos. si ab eodẽ centro ad eandẽ peripheriam duxeris tres semidiametros ita, vt angulus interceptus, & peripheriæ pars intercepta inter secundam, & tertiam semidiemetrum sint maiores, quàm interceptus angulus, & peripheriæ pars intercepta inter primam, & secundã semidiametrum. Alterum enim triãgulum maius erit altero, quod maiorem angulum ad verticem, & maiorẽ basim habebit, licet duo anguli ad basim trianguli minoris duobus ad basim maioris trianguli sint æquales, & duo latera alterius trianguli opposita æqualibus angulis sint æqualia duobus alterius. &c.

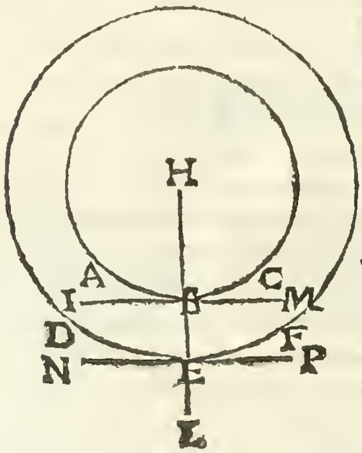
§. VII.

PARADOXVM Extra propositionem 28.

1 In duas rectas lineas tertià incidens externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes inæqualem facit.

2 Internos, & ad easdem parte duobus rectis maiores.

Tamen parallelæ sunt illæ lineæ.



Sint concentrici ABC, DEF, & à cẽtro H incidat semidiameter HL, atque etiam secet vtramq; peripheriam in B, & E.

1 In duas ABC, DEF incidit recta HL, & tamẽ externus angulus ABH non est æqualis interno ad easdem partes DEB. est enim minoris circuli ABC peripheria curuatior, quàm peripheria maioris DEF. & quemadmodum maioris circuli peripheria magis ad rectam accedit, quàm minoris, ita maioris minor est angulus contactus; DEN additus recto NEL; minoris vero circuli maior est angulus contactus ABI additus recto IBL, spectatis conuexis circulorũ. &c. Contraria vero ratione, si concaua circulorũ spectes, minoris circuli minor est angulus semicirculi ABH, qui fit à cõcaua ad semidiametrum; maioris vero circuli maior est angulus semicirculi DEH. &c. ergo externus ABH concauus minor est interno concauo DEB, tamen ipsæ

ABC,

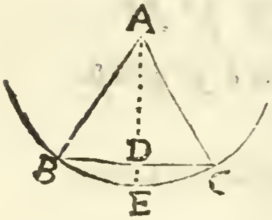
ABC, DEF sunt æquidistantes; intercipitur enim inter ipsas eadem semper pars BE semidiametri HE, nempè detractâ semidiametro minori ex maiori, &c. vt patet.

2 Interni ad easdem partes ABE, BED sunt maiores duobus rectis. Vide duos rectos NEB, IBE. Angulus contactus maioris circuli aufert NED ex NEB; angulus verò contactûs minoris circuli apponit IBA ipsi IBE. At per nuper ostensa maior est IBA, quàm NED, ergo duobus rectis appositum est aliquid amplius, quàm detractum; ergo duo ABE, BED maiores sunt duobus rectis, & tamen in alteram partem, nempè versùs C, & F protracta AC, DF non coincident, &c.

§. VIII.

PARADOXVM – – Extra propositionem 32.

Triangula, quorum tres interni anguli sunt maiores duobus rectis.

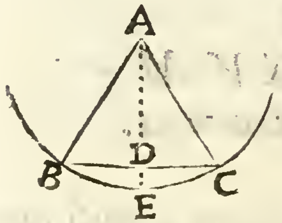


Patet, à centro ductis semidiametris, &c. vel è vertice A isoscelis ABC ducta parte peripheriæ per puncta extrema basis B, & C, quoniam interni anguli A, B, C rectilinei trianguli sunt æquales duobus rectis, appositis DBE, ECD, sunt tres BAC, ABE, ECA maiores duobus rectis.

§. IX.

PARADOXVM.

Isoscelia, quæ diuisa non faciunt scalena, vt assolet, sed isoscelia.

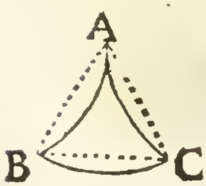


Isoscelia in scalena diuidi manifestum est, tamen si isoscelis ABEC basim circularem diuidas in E, sunt partialia isoscelia ABE, AEC, & anguli omnes æquales facti à semidiametris eiusdem circuli, &c. ad bases circulares, &c.

§. X.

PARADOXVM– –Extra corollarium è 32 prop.

Aequilaterum non æquiangulum.



Vulgatum est inter corollaria è 32, æquilateri trianguli tres angulos esse inter se se æquales. Contra, & ex extra hoc circulus exhibet paradoxum. ceu pelecoides ABC confectū è tribus æqualibus curuis AB, BC, CA æqualium circulorum, iuxta ea, quæ habes in nostris paradoxis

de

de angulis, & triangulis in Apiar. 3. tamen angulus ad verticem A minor est angulis curuilineis B, vel C. Reuise citata nostra paradoxa.

Sunt & alia à circulo paradoxa ad sequentes libros Euclidis, quorum aliqua interim habes in 12 è nostris Apiarijs ad eorum librorum propositiones.

TYPOGRAPHVS.

AMicus, & olim in Rhetoricis discipulus Authoris huius Ærarij distichon Romà vltrò misit præscribendum initio huius primi Tomi. Ego post finem reieci, quia compertum mihi est ab Ærarij Authore humanas laudes in postremis haberi.

REV.[s] P. MARIVS BETTINVS BONON.[sis]

Anagramma.

SVPREMVS EST IN ARTIBVS BONIS.

VT Phœbus inter astra primus emicat,
Marius SVPREMVS EST IN ARTIBVS BONIS.

INDEX XIV
Theorematum Elementariorum.

1

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri; habuerint autem & angulũ angulo, ęqualibus lateribus contentum, æqualem, & basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo ęquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur.

2

Isoscelium triãgulorum anguli ad basim sunt æquales: &, productis æqualibns rectis, erunt & anguli infra basim æquales.

3

Si triãguli duo anguli æquales fuerint, erunt & latera, æquales angulos subtendentia, æqualia.

4

Super eadem recta linea duabus rectis lineis aliæ duæ rectę ęquales altera alteri non constituentur ad aliud, atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq; cum primo ductis terminos habẽtes.

5

Si duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, habuerint verò & basim basi ęqualem; habebunt quoque angulum æqualibus lateribus contentum angulo æqualem.

6

Quando linea recta super rectam consistẽs, angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

7

Si ad rectam aliquam lineam, atq; ad punctum in illa datum duæ rectæ non ad easdem partes ductæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt illæ lineæ.

8

Si duæ rectæ se inuicem secuerint, angulos ad verticem æquales facient.

9

Omnis trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

10

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

11

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

12

Omnis triãguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

13

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt quomodocũq; sumpta.

14

Si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectæ intra constituantur, erunt hæ minores reliquis duobus trianguli lateribus, at maiorem angulum continebunt.

15

Si duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, angulum vero angulo maiorem, qui ęqualibus rectis lineis continetur, & basim basi maiorem habebunt.

16

Si duo triãgula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, alterum alteri, & basim basi maio-

rem,

Si

34

Si quadratum ab vno trianguli latere descriptũ ęquale fuerit quadratis à reliquis lateribus descriptis, angulus à reliquis lateribus contentus rectus erit.

INDEX XV
Problematum Elementariorum.

1

SVper data recta linea terminata triãgulum ęquilaterum constituere.

2

Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam ponere.

3

Datis duabus inæqualibus rectis lineis, à maiore minori æqualem abscindere.

4

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

5

Datam rectam finitam bifariam secare.

6

Datæ rectæ lineæ ex puncto in illa dato lineam rectam ad angulos rectos ducere.

7

Ad datam infinitam, à pnncto dato extra illam, perpendicularem rectam ducere.

8

Ex tribus rectis, tribus datis rectis æqualibus, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua maiores esse quomodocũq; sumptas; quòd omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumq; sumantur.

9

Ad datam tectam, datumq; in ea punctum dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

10

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam ducere.

11

Dato triangulo æquale parallelogrãmum constituere in dato angulo rectilineo.

12

Ad datam rectam lineam dato triangulo ęquale parallelogrammũ applicare, in dato agulo rectilineo.

13

Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

14

A data recta linea quadratum describere.

INDEX XVI

Rerum Notabiliorum.

B

C

D

Pa-

Q

Qua-

R

S

LECTOR,

Vide reliqua in Indicibus antecedentibus. Omiſſa ſunt hìc & alia plurima minus notabilia.

PRIMI TOMI FINIS.

ERRORES,

Amice Lector, præſertim grauioris momenti, aut nullos, aut correctos habes. Si qui tamen diligentiam noſtram fugerint æquus tu corrige. Velut in literulà aliquà diſſonante à figurà, fac. 280, AD pro AB; in numero, fac.206, § 12 pro 22; fac. 188, principium patitur, *pro*: petitur, *&c.*

REGISTRVM.

a b c d e f g h A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z. A a B b C c D d E e F f G g H h I i K k L l M m N n O o P p Q q R r S s T t V u X x Y y Z z. A a a B b b C c c D d d E e e F f f G g g H h h I i i K k k L l l M m m N n n O o o P p p Q q q R r r S s s T t t V u u X x x Y y y Z z z. A a a a B b b b C c c c D d d d E e e e F f f f G g g g H h h h I i i i K k k k L l l l M m m m N n n n O o o o P p p p Q q q q R r r r.

Omnes ſunt Duerniones, præter Z z, & R r r r, quæ ſunt Terniones.